جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر
مبادئ الرياضيات (٢)

أ. الطاهر إبراهيم

المحاضرة العاشرة

الاشتقاق

الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2 = x_1 + \Delta x$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^2 + 2$ عندما تتغير x من 1 إلى 1.5

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1.5$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من 1 إلى 2

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 2 إلى 4

الحل:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18-6}{4-2} = \frac{12}{2} = 6$$

تابع: الاشتقاق:

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad ، \quad y' \quad ، \quad \frac{dy}{dx} \quad ، \quad f'(x)$$

إذاً

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

تابع: الاشتقاق:

جبر الاشتقاق:

١. إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = x^5$

II. $y = x^{-3}$

III. $y = x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

II. $\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

III. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

٢. إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 5$

II. $y = -10$

III. $y = \frac{3}{4}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 0$

II. $\frac{dy}{dx} = 0$

III. $\frac{dy}{dx} = 0$

تابع: الاشتقاق:

٣. إذا كانت $y = cx^{n}$ حيث c عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = n.c\ x^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 3x^{4}$

II. $y = -2x^{7}$

III. $y = 16\ x^{\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 12\ x^{3}$

II. $\frac{dy}{dx} = -14\,x^{6}$

III. $\frac{dy}{dx} = 8\,x^{-\frac{1}{2}}$

تابع: الاشتقاق:

٤. إذا كانت $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)ax^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = 3x^{4} + 5x^{3} - 2x^{2} + 7x + 20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12\ x^{3} + 15\ x^{2} - 4\,x + 7$$

تابع: الاشتقاق:

٥. إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} . f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \left(2x^2 + 5\right)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8\left(2x^2 + 5\right)^7 . 4x = 32x\left(2x^2 + 5\right)^7$$

تابع: الاشتقاق:

٦. إذا كانت $y = (f(x) . g(x))$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (x-1)(3x-2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(3) + (3x-2)(1)$$

$$= 3x - 3 + 3x - 2$$

$$= 6x - 5$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (x^2 + 1)(2x^3 - 2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 1)(6x^2) + (2x^3 - 2)(2x)$$
$$= 6x^4 + 6x^2 + 4x^4 - 4x$$
$$= 10x^4 + 6x^2 - 4x$$

تابع: الاشتقاق:

٧. إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x).f'(x) - f(x).g'(x))}{[g(x)]^2}$$

مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{2x + 5}{3x - 4}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-4)(2)-(2x+5)(3)}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{6x-8-6x-15}{(3x-4)^2}$$

$$= \frac{-23}{(3x-4)^2}$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{x^2-5x+7}{2x}$

الحل:

$$y' = \frac{(2x)(2x-5)-(x^2-5x+7)(2)}{4x^2}$$

$$= \frac{4x^2-10x-2x^2+10x-14}{4x^2}$$

$$= \frac{2x^2-14}{4x^2} = \frac{2(x^2-7)}{4x^2} = \frac{x^2-7}{2x^2}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة: إذا كانت $y = \frac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{3}{x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2)^2} = \frac{-6x}{x^4} = \frac{-6}{x^3}$$

تابع: الاشتقاق:

٨. إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$ (قانون السلسلة)

مثال: إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{du} = 2u + 5$ ، $\frac{du}{dx} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5)(1) = 2(x + 3) + 5 = 2x + 11$$

تابع: الاشتقاق:

مثال:

إذا كانت $y = \frac{u}{u+1}$ ، $u = 3x^2 - 1$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

الحل:

$$\frac{dy}{du} = \frac{(u+1)(1) - u(1)}{(u+1)^2} = \frac{1}{(u+1)^2}$$

$$\frac{du}{dx} = 6x$$

تابع: الاشتقاق:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \left[\frac{1}{(u+1)^2}\right](6x)$$

$$= \frac{6x}{(u+1)^2}$$

$$= \frac{6x}{(3x^2 - 1 + 1)^2} = \frac{6x}{9x^4} = \frac{2}{3x^3}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \frac{2}{3(1)^3} = \frac{2}{3}$$

المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ ,\ \frac{d^2}{dx^2}[f(x)],\ f''(x)\ ,\ y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3y}{dx^3}\ ,\quad \frac{d^3}{dx^3}[f(x)]\ ,\quad f^{(3)}(x)\ ,\quad y'''$$

وهكذا

عندما نشتق الدالة للمرة الـ n فإن المشتقة التي نحصل عليها يرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$f^{(n)}(x)\ ,\ \frac{d^ny}{dx^n}\ ,\quad \frac{d^n}{dx^n}[f(x)],\quad y^{(n)}$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

تابع: الاشتقاق:

$$\frac{dy^{3}}{dx^{3}} = 240\ x^{2} + 72\ x - 48$$

$$\frac{dy^{4}}{dx^{4}} = 480\ x + 72$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: اذا كان $y = x^{3} + 3x + 1$

أثبت ان

$$y^{(3)} + xy'' - 2y' = 0$$

الحل:

$$y' = 3x^{2} + 3$$

$$y'' = 6x$$

$$y^{(3)} = 6$$

تابع: الاشتقاق:

بالتعويض في المعادلة المعطاة نجد ان:

$$6 + x(6x) - 2(3x^2 + 3)$$
$$= 6 + 6x^2 - 6x^2 - 6$$
$$= 0$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$

iv. $y = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

تمارين

v. $y = x + 1$

vi. $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

viii. $y = \dfrac{1}{2x + 3}$

ix. $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

تمارين

٢. أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$i.\quad y = u^2 - u \quad , \quad u = 4x + 3$

$ii.\quad y = u + \dfrac{1}{u} \quad , \quad u = 5 - 2x$

$iii.\quad y = \dfrac{1}{u + 1} \quad , \quad u = x^3 - 2x + +5$

تمارين

٣. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \frac{1}{x}$

iv. $y = \frac{1}{3x+1}$

تمت
بحمد الله

المحاضرة الحادية عشرة
الجزء الاول

مشتقة الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال الاسية:

إذا كانت $y = e^{x}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = e^{u}$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = e^{u} . \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x+1} . (2x+2)$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y = b^x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = b^x . \ln b$$

وبشكل عام إذا كانت $y = b^u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = b^u . \ln b . \frac{du}{dx}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = 3^x$
2. $y = 9^{2x^2}$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$

2. $\frac{dy}{dx} = 9^{2x^2} . \ln 9 .(4x)$

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال اللوغاريتمية:

إذا كانت $y = \ln x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \ln u$ حيث $u = f(x)$ فان $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = \ln(1 + x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x = \frac{2x}{1 + x^2}$$

تابع: الاشتقاق:

نتيجة:

إذا كانت $y = \log_b x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln b}$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \log_b u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{\ln b} \cdot \frac{du}{dx}$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \log_2 4x$
2. $y = \log_2 (1 + x^2)$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4x} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{x \ln 2}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2} \times 2x \times \frac{1}{\ln 2} = \frac{2x}{(1 + x^2) \ln 2}$

تابع: الاشتقاق:

مشتقة الدوال المثلثية:

١. إذا كانت $y = \sin x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \sin u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \, . \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \cos 4x \times 4 = 4 \cos 4x$$

تابع: الاشتقاق:

٢. إذا كانت $y = \cos x$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = -\sin x$$

وبشكل عام إذا كانت $y = \cos u$ حيث $u = f(x)$ فان:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x \times 5 = -5\cos 5x$$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

1. $y = \cos^2 x$
2. $y = \sin x \cos x$

الحل:

1. $\frac{dy}{dx} = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\cos x \sin x$
2. $y = \sin x \times -\sin x + \cos x \times \cos x = -\sin^2 x + \cos^2 x$

تابع: الاشتقاق:

جدول مشتقات بقية الدوال المثلثية:

$$3.\quad \frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$4.\quad \frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \cdot \tan u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$5.\quad \frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cdot \cot u \cdot \frac{du}{dx}$$

$$6.\quad \frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u \cdot \frac{du}{dx}$$

حيث $u = f(x)$

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ الدوال الآتية :

1. $y = \tan^2 x$
2. $y = \cot^3(2x+1)$
3. $y = \sec(x+1)$
4. $y = \csc 2x$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$1.\quad \frac{dy}{dx} = 2\tan x \sec^2 x$$

$$2.\quad \frac{dy}{dx} = 3\cot^2(2x+1).\left[-\csc^2(2x+1)\right].(2)$$

$$= -6\cot^2(2x+1).\csc^2(2x+1)$$

$$3.\quad \frac{dy}{dx} = \sec(x+1).\tan(x+1).(1)$$

$$= \sec(x+1)\tan(x+1)$$

$$4.\quad \frac{dy}{dx} = -\csc 2x.\cot 2x.(2)$$

$$= -2\csc 2x \cot 2x$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الضمني:

لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية(غير صريحة) نعتبر y دالة لـ x ونطبق قواعد

الاشتقاق المناسبة.

ملاحظة:

عندما نفاضل أي حد يحتوي على y نضرب ناتج التفاضل في $\frac{dy}{dx}$ ثم نجمع الحدود المحتوية على $\frac{dy}{dx}$ في طرف ، وننقل الحدود الاخرى في الطرف الثاني.

تابع: الاشتقاق:

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال الآتية:

1. $y^2 + x^2 = 9$
2. $y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3 = 9$
3. $x^2 y + 3xy^3 = x + 3$

$$1. \quad \frac{d}{dx}(y^2 + x^2) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$2. \quad \frac{d}{dx}(y^2 + x^2 + 3x^3 + 4y^3) = \frac{d}{dx}(9)$$

$$2y.\frac{dy}{dx} + 2x + 9x^2 + 12y^2.\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y + 12y^2) = -2x - 9x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - 9x^2}{2y + 12y^2}$$

$$3.\quad \frac{d}{dx}(x^2 y + 3xy^3) = \frac{d}{dx}(x+3)$$

$$x^2 . \frac{dy}{dx} + y . 2x + 3\left[x . 3y^2 . \frac{dy}{dx} + y^3 . 1\right] = 1 + 0$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + 9xy^2 \frac{dy}{dx} + 3y^3 = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\left(x^2 + 9xy^2\right) = 1 - 2xy - 3y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2xy - 3y^3}{x^2 + 9xy^2}$$

تابع: الاشتقاق:

الاشتقاق الجزئي:

إذا كانت لدينا الدالة $z = f(x, y)$ دالة متغيرين ، اذا ابقينا y ثابتاً فان z دالة في x فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى x وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى x ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial x}$

وبنفس الطريقة إذا أبقينا x ثابتاً فان z دالة في y فقط ، وعليه نستطيع ايجاد تفاضل z بالنسبة إلى y وتسمى المشتقة التي نحصل عليها المشتقة الجزئية للدالة z بالنسبة إلى y ويرمز لها بالرمز $\frac{\partial z}{\partial y}$

تابع: الاشتقاق:

مثال:

أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ لكل من الدوال الآتية:

$$1.\quad z = xy + x^2 y + y^2 x$$

$$2.\quad z = 2x^2 + 3xy - 6y^2$$

تابع: الاشتقاق:

الحل:

$$1.\quad \frac{\partial z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

$$2.\quad \frac{\partial z}{\partial x} = 4x + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 12y$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = e^{x^2-2x}$

ii. $y = (2x+3)e^{-2x}$

iii. $y = e^{\cos x}$

iv. $y = \frac{1}{2}\left(e^{3x} + e^{-3x}\right)$

تمارين

v. $y = \log_2 3x$

vi. $y = 7^{x^3}$

vii. $y = \ln(\sin x)$

viii. $y = x^2 e^{2x}$

ix. $y = e^{2x}\cos 3x$

تمارين

٢. أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية:

$i.\quad 9x^2 + 4y^2 = 40$

$ii.\quad y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1$

$iii.\quad 4xy^3 - x^2y + x^3 - 5x + 6 = 0$

$iv.\quad 5x^2 + 2x^2y + y^2 = 8$

تمارين

$v.\quad y = x^2 \sin x$

$vi.\quad y^2 = x \cos y$

٣. إذا كانت $y^2 - 4x^2 = 5$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$ و $y = 3$

٤. إذا كانت $xy^2 + 3y = 27$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 2$ و $y = 3$

تمارين

٥. أوجد $\frac{\partial z}{\partial x}$ و $\frac{\partial z}{\partial y}$ إذا كانت :

i. $z = x^3 - 2xy + y^3$

ii. $z = 5y^3 + xy - 7y^2$

iii. $z = xy - \ln xy$

iv. $z = x\ln y + y\ln x - xe^{xy}$

المحاضرة الحادية عشرة

الجزء الثاني

تطبيقات التفاضل:

إيجاد القيم العظمى والصغرى للدالة:

أسلوب المشتقة الثانية:

الخطوات :

أ- إيجاد المشتقة الأولى للدالة ($f'(x)$).

ب- نضع $f'(x) = 0$ لإيجاد قيم x التي تحقق المعادلة (القيم الحرجة).

ج- إيجاد المشتقة الثانية للدالة ($f''(x)$).

د- عند القيمة الحرجة $x = x_1$ تكون للدالة ......

تابع: القيم العظمى والصغرى :

i. قيمة صغرى محلية إذا كانت $f''(x_1) > 0$

ii. قيمة عظمى محلية إذا كانت $f''(x_1) < 0$

iii. ويفشل الاختبار إذا كانت $f''(x_1) = 0$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

مثال(١): إذا كان $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x - 3)(x + 1) = 0$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

إما $(x-3)=0$

اذاً $x=3$

أو $(x+1)=0$

اذاً $x=-1$

$$f''(x)=6x-6$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند $x=3$

$$f''(3)=6\times3-6=18-6=12>0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x=3$ وهي:

$$f(3)=3^3-3\times3^2-9\times3+5$$
$$=27-27-27+5=-22$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند $x = -1$

$$f''(-1) = 6 \times -1 - 6 = -6 - 6 = -12 < 0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x = -1$ وهي:

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \times (-1)^2 - 9 \times -1 + 5$$
$$= -1 - 3 + 9 + 5 = 10$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

مثال(٢): إذا كان $f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x + 1$ فما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ لهذه الدالة.

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 45$$

$$3x^2 - 24x + 45 = 0$$

$$3(x^2 - 8x + 15) = 0 \qquad \div 3$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x-3)(x-5) = 0$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

إما $(x-3)=0$

اذاً $x=3$

أو $(x-5)=0$

اذاً $x=5$

$$f''(x)=6x-24$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند $x=3$

$$f''(3)=6\times3-24=18-24=-6<0$$

$\therefore$ توجد قيمة عظمى محلية عند $x=3$ وهي:

$$f(3)=3^3-12\times3^2+45\times3+1$$
$$=27-108+135+1=163-108=55$$

تابع: القيم العظمى والصغرى:

عند $x = 5$

$$f''(5) = 6 \times 5 - 24 = 30 - 24 = 6 > 0$$

$\therefore$ توجد قيمة صغرى محلية عند $x = 5$ وهي:

$$f(5) = 5^3 - 12 \times 5^2 + 45 \times 5 + 1$$

$$= 125 - 300 + 225 + 1 = 351 - 300 = 51$$

نقطة الانقلاب ومجالات التقعر:

تعريف:

تسمى النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة انقلاب لمنحنى الدالة f إذا كان منحنى الدالة مقعراً إلى أسفل مباشرة إلى يسار x ومقعرا إلى أعلى مباشرة إلى يمين x أو العكس.

تحديد مجالات التقعر ونقطة الانقلاب:

١. نوجد $f''(x)$

٢. نوجد النقاط الحرجة للمشتقة الثانية $(\ f''(x)=0\ )$

٣. نضع القيم على خط الأعداد

نقطة الانقلاب:

٤. نحدد إشارة $f''(x)$ حول النقاط الحرجة ويكون المنحنى:
- مقعرا نحو الأعلى إذا كان $f''(x)>0$
- مقعرا نحو الأسفل إذا كان $f''(x)<0$

٥. إذا حصل التغير في التقعر قبل وبعد نقطة حرجة x_1 مثلا اذاً توجد نقطة انقلاب وهي $(x_1, f(x_1))$

تابع: نقطة الانقلاب:

مثال(١):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

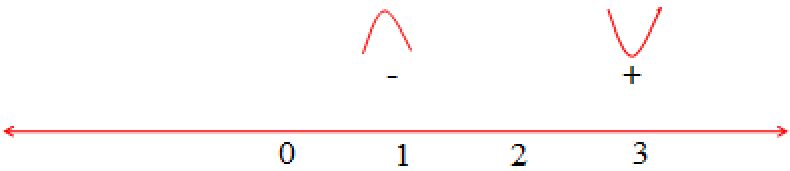
$$f''(x) = 6x - 12$$

$$6x - 12 = 0$$

$$6x = 12$$

$$x = \frac{12}{6} = 2$$

تابع: الحل:



$$f''(1)=6(1)-12=6-12=-6$$

$$f''(3)=6(3)-12=18-12=+6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد ٢ اذا توجد نقطة انقلاب عند x= 2 وهي $(2,f(2))$

$$f(2)=2^3-6\times 2^2+9\times 2+5$$

$$=8-24+18+5=7$$

نقطة الانقلاب هي $(2,7)$

تابع: نقطة الانقلاب:

مثال(٢):

أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x)=x^3-9x^2+24x$

الحل:

$$f'(x)=3x^2-18x+24$$

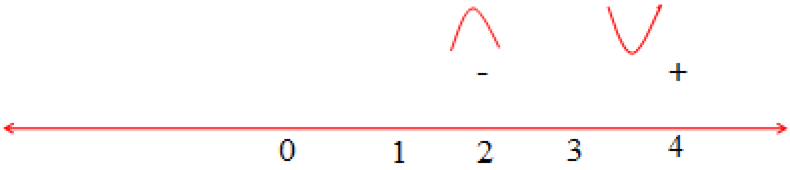
$$f''(x)=6x-18$$

$$6x-18=0$$

$$6x=18$$

$$x=\frac{18}{6}=3$$

تابع: الحل:



$$f''(2) = 6(2) - 18 = 12 - 18 = -6$$

$$f''(4) = 6(4) - 18 = 24 - 18 = +6$$

بما أن حصل تغير في التقعر قبل وبعد 2 اذا توجد نقطة انقلاب عند x= 2 وهي $(3, f(3))$

$$f(2) = 3^3 - 9 \times 3^2 + 24 \times 3$$

$$= 27 - 81 + 72 = 18$$

نقطة الانقلاب هي $(3,18)$

تمارين:

١- ما هي نقط القيم العظمى والصغرى إن وجدت؟ للدوال التالية:

i. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

ii. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$

iii. $f(x) = x^2 + 2x + 18$

تمارين:

٢- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$

٣- أوجد نقطة الانقلاب (ان وجدت) للدالة $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

تمت
بحمد الله