المحاضرة العاشرة

الاشتقاق

الاشتقاق:

متوسط التغير:

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث $x_2 = x_1 + \Delta x$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 1.5

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 1.5$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من ١ إلى 2

الحل:

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من ٢ إلى 4

الحل:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

تعريف المشتقة الأولى:

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (ان وجدت) تسمى المشتقة الاولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx} f(x) \quad ، \quad y' \quad ، \quad f'(x) \quad ، \quad \frac{dy}{dx}$$

إذاً

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

مثال:

إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد $f'(x)$ من المبادئ الأولية .

الحل:

$$f(x) = x^2$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

ملاحظة:

وعندما تكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a تكون قيمتها $f'(a)$ ويقال أن الدالة قابلة للاشتقاق في a .

جبر الاشتقاق:

١. إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = x^5$

II. $y = x^{-3}$

III. $y = x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

II. $\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

III. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$

٢. إذا كانت $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 5$

II. $y = -10$

III. $y = \frac{3}{4}$

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 0$

II. $\frac{dy}{dx} = 0$

III. $\frac{dy}{dx} = 0$

---

٣. إذا كانت $y = cx^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = ncx^{n-1}$$

مثال:أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 3x^4$

II. $y = -2x^7$

III. $y = 16\ x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 12\ x^3$

II. $\frac{dy}{dx} = -14\ x^6$

III. $\frac{dy}{dx} = 8\ x^{-\frac{1}{2}}$

---

٤. إذا كانت $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ حيث $n \neq 0$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)ax^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12\ x^3 + 15\ x^2 - 4x + 7$$

٥. إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (2x^2 + 5)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7 \cdot 4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$

٦. إذا كانت $y = (f(x) \cdot g(x))$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (x^2 + 1)(2x^3 - 2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2x(2x^3 - 2) + 6x^2(x^2 + 1)$$
$$= 4x^4 - 4x + 6x^4 + 6x^2$$
$$= 10x^4 + 6x^2 - 4x$$

٧. إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x))}{[g(x)]^2}$$

مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{2x + 5}{3x - 4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x - 4)(2) - (2x + 5)(3)}{(3x - 4)^2}$$
$$= \frac{6x - 8 - 6x - 15}{(3x - 4)^2}$$
$$= \frac{-23}{(3x - 4)^2}$$

نتيجة: إذا كانت $y = \frac{c}{f(x)}$ حيث c ثابت فان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{3}{x^2 - 2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2 - 2)^2} = \frac{-6x}{(x^2 - 2)^2}$$

٨. إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فان :

(قانون السلسلة) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

مثال: إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{du} = 2u + 5$ ، $\frac{du}{dx} = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5)(1) = 2(x + 3) + 5 = 2x + 11$$

المشتقات العليا:

عندما نشتق الدالة للمرة الثانية فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثانية ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^2y}{dx^2} , f''(x) , y''$$

وعندما نشتق الدالة للمرة الثالثة فإننا نحصل على ما يسمى بالمشتقة الثالثة ويرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$\frac{d^3y}{dx^3} , f'''(x) , y'''$$

وهكذا

مثال: أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

مثال: أوجد المشتقات الأربع الأولى للدالة

$$y = 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 2x^2 + x - 1$$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^4 + 12x^3 - 24x^2 + 4x + 1$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 80x^3 + 36x^2 - 48x + 4$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 240x^2 + 72x - 48$$

$$\frac{dy^4}{dx^4} = 480x + 72$$

تمارين

١. أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}\left(x^5 - x^{-3}\right)$

iv. $y = \dfrac{2x - 1}{2x + 1}$

v. $y = x + 1$

vi. $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

viii. $y = \dfrac{1}{2x + 3}$

ix. $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

٢. أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت :

i. $y = u^3 - 2u \quad , \quad u = x^2 - 5x + 6$

ii. $y = u^2 - 2u^{-2} \quad , \quad u = x^2 + 2$

iii. $y = \dfrac{u^2 + 1}{u - 2} \quad , \quad u = 3x + 7$

٣. أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

iv. $y = \dfrac{1}{3x + 1}$

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة العاشرة:

١-

$vii.\quad y=\sqrt[5]{3x^2+4}$

الحل:

$$y=(3x^2+4)^{\frac{1}{5}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5}(3x^2+4)^{\frac{1}{5}-1}.6x=\frac{6}{5}x(3x^2+4)^{-\frac{4}{5}}$$

$ix.\quad y=(4x^2+5x-2)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=8(4x^2+5x-2)^7.(8x+5)$$
$$=(64x+40)(4x^2+5x-2)^7$$

٢-

$iii.\quad y=\frac{u^2+1}{u-2}\quad,\quad u=3x+7$

الحل:

$$\frac{dy}{du}=\frac{(u-2).2u-(u^2+1).1}{(u-2)^2}=\frac{2u^2-4u-u^2-1}{(u-2)^2}$$
$$=\frac{u^2-4u-1}{(u-2)^2}$$

$$\frac{du}{dx}=3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dx}=\frac{u^2-4u-1}{(u-2)^2}\times 3=\frac{3(3x+7)^2-12(3x+7)-3}{(3x+7-2)^2}$$
$$=\frac{3(3x+7)^2-36x-87}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{3(9x^2+42x+49)-36x-87}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{27x^2+126x+147-36x-87}{(3x+5)^2}$$
$$=\frac{27x^2+96x+60}{(3x+5)^2}$$

٣-

$iv.\quad y=\frac{1}{3x+1}$

الحل:

$$y'=\frac{-1\times 3}{(3x+1)^2}=\frac{-3}{(3x+1)^2}$$

$$y''=\frac{-(-3)(2(3x+1)\times 3)}{(3x+1)^4}=\frac{18(3x+1)}{(3x+1)^4}=\frac{18}{(3x+1)^3}$$

$$y'''=\frac{-18\times 3(3x+1)^2\times 3}{(3x+1)^6}=\frac{-162}{(3x+1)^4}$$