

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

(حالات عدم التعيين) والاتصال

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة:

الكمية الغير معينة هي الكمية التي ليس لها جواب محدد.
من أهم حالات عدم التعيين التي تظهر عند حساب النهايات هي:
 $\frac{\infty}{\infty}$ و $\frac{0}{0}$
يمكن إزالة حالة عدم التعيين بإحدى الطرق التالية:
أولاً: عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كما يلي:
أ- إذا كانت البسط والمقام كثيرات حدود:

التحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

الحل:

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{1 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{3^2 - 9}{3 - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{1^2 - 3 \times 1 + 2}{1 - 1} = \frac{1 - 3 + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = 1 - 2 = -1$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{2x}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{2x} = \frac{0^2 + 0}{2 \times 0} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط إلى عوامله الأولية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x \times 2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$$

ب- إذا احتوت الدالة على جذر:

نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر ونقوم بالتحليل والاختصار ثم التعويض

مثال:

$$1. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$$

أوجد نهاية كل مما يلي:

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \frac{\sqrt{9} - 3}{9 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $(\sqrt{x} + 3)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{9} + 3} \\ &= \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \frac{\sqrt{2+2} - 2}{2 - 2} = \frac{\sqrt{4} - 2}{2 - 2} = \frac{2 - 2}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

كمية غير معينة

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط $(\sqrt{x+2} + 2)$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+2} - 2)(\sqrt{x+2} + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x+2} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4+2} + 2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ثانياً: عندما $x \rightarrow \infty$

عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{\infty}{\infty}$ نتبع ما يلي:
نقسم كل حد من حدود البسط والمقام على x بأكبر أس أو نستخدم النتيجة التالية إذا كان البسط والمقام كثيرتا حدود.

نتيجة:

إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ كثيرتا حدود و $x \rightarrow \infty$ فإن:

$$1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام.

$$2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في البسط}}{\text{معامل } x \text{ بأكبر أس في المقام}}$$

إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام.

$$3 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام.

ملاحظة:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^n = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right]^n = 0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^3 = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right]^3 = 0$$

مثال:

أوجد نهاية كل مما يلي:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أقل من من درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1} = 0$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5} = \infty$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x^3 + 7}$$

الحل:

بما أن درجة البسط = من درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 2}{2x^3 + 7} = \frac{5}{2}$$

تمارين:

أوجد النهايات التالية:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 5x + 6}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{x^2 + 5x + 4}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$$

$$5. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$

$$6. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 3x - 2}{2x^2 + 4}$$

$$7. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$$

الاتصال:

تعريف:

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في نقطة a إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية:

أ- الدالة معرفة في a أي أن $f(a)$ معرفة

ب- $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة

ج- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

مثال (١):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x - 9 & , x \neq -3 \\ -6 & , x = -3 \end{cases}$$

متصلة في $x = -3$ ؟

الحل:

$$f(-3) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

بما أن

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3)$$

إذا الدالة غير متصلة في $x = -3$

مثال (٢):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل:

$$f(5) = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} (25 + 2x) = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} 6x = 6 \times 5 = 30$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$$

بما أن

إذاً

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ غير موجودة
إذاً الدالة غير متصلة في $x = 5$

مثال (٣):

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 3 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

متصلة في $x=0$ ؟

الحل:

$$f(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (5x^2 - 3) = 5(0)^2 - 3 = -3$$

بما أن

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

إذاً الدالة غير متصلة في $x=0$

مثال (٤):

أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ غير متصلة في $x=-2$

الحل:

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 4}{-2 + 2} = \frac{4 - 4}{-2 + 2} = \frac{0}{0} \quad \text{غير معرفة}$$

إذاً الدالة غير متصلة في $x=-2$

تمارين:

بين فيما إذا كانت الدالة المعطاة متصلة أو غير متصلة في العدد x المعطى

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2 + x & , x < 2 \\ 2 - x & , x \geq 2 \end{cases} \quad \text{في } x=2$$

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x - 1 & , x < -1 \end{cases} \quad \text{في } x=-1$$

$$3. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ 2 & , x > 1 \end{cases} \quad \text{في } x=1$$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x < 2 \\ 1 & , x = 2 \\ 5 - x & , x > 2 \end{cases} \quad \text{في } x=2$$

حلول الفقرات المختارة من تمارين المحاضرة التاسعة

$$3. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4}$$

بالتعويض المباشر نجد أن

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4} = \frac{-4+4}{(-4)^2+5 \times -4+4} = \frac{-4+4}{16-20+4} = \frac{0}{0} \text{ كمية غير معينة}$$

لإزالة هذه الحالة نحلل المقام إلى عوامله الأولية

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{x^2+5x+4} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\cancel{x+4}}{(x+4)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{-4+1} \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9}$$

الحل:

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} = \frac{3 - \sqrt{9}}{9 - 9} = \frac{3 - 3}{9 - 9} = \frac{0}{0}$$

لإزالة هذه الحالة نضرب كل من البسط والمقام بمرافق البسط ($3 + \sqrt{x}$)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3 - \sqrt{x}}{x - 9} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{9 - x}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-(x - 9)}{(x - 9)(3 + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{-1}{3 + \sqrt{x}} \\ &= \frac{-1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{-1}{3 + 3} = \frac{-1}{6} \end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$$

الحل:

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام إذاً:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1} = \infty$$

هل الدالة المعرفة بـ

$$2. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & , x \geq -1 \\ x - 1 & , x < -1 \end{cases}$$

متصلة في $x = -1$ ؟

$$f(-1) = 2 \times -1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 2x = 2 \times -1 = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x - 1) = -1 - 1 = -2$$

بما أن

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$$

إذاً

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$$

و بما أن

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) = -2$$

إذاً الدالة متصلة في $x = -1$

هل الدالة المعرفة بـ

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} x + 1 & , x < 2 \\ 1 & , x = 2 \\ 5 - x & , x > 2 \end{cases}$$

متصلة في $x = 2$ ؟

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (5 - x) = 5 - 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 1) = 2 + 1 = 3$$

بما أن

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

إذاً

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

و بما أن

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

إذاً الدالة غير متصلة في $x=2$

رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة:

٣. الدالة التكعيبية:

مثال: ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل:

x	-2	-1	0	1	2
y=f(x)	-8	1	0	1	8