المحاضرة الثامنة

النـهايات

مفهوم النهاية:

نهاية الدالة يقصد بها إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة. وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a $(x \to a)$

مثال:

إذا كانت f(x)=2x+1 فان $\lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما قيمة x تؤول إلى ٢. وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥.

جبر النـهايات:

١. إذا كانت $f(x) = c$ ، حيث c عدد حقيقي فان $\lim_{x \to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢. إذا كانت $f(x) = mx + c$ فان $\lim_{x \to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال:

أوجد قيمة كل مما يأتي:

1. $\lim_{x \to 5} 27$
2. $\lim_{x \to -2} (1 - 2x)$
3. $\lim_{x \to 2} (3x + 4)$
4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5)$

الحل:

1. $\lim_{x \to 5} 27 = 27$
2. $\lim_{x \to -2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 1 + 4 = 5$
3. $\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$
4. $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$

٣. إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ، وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = k$ وكانت c أي عدد حقيقي ، فإن:

i. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = l \pm k$

ii. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \times \lim_{x \to a} f(x) = c \times l$

iii. $\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = l \times k$

iv. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim g(x)} = \frac{l}{k} \quad , k \neq 0$

مثال:

إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$

فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x \to 2} [h(x) - f(x)]$

ii. $\lim_{x \to 2} [g(x) \times h(x)]$

iii. $\lim_{x \to 2} 8f(x)$

iv. $\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)]$

v. $\lim_{x \to 2} [f(x) - g(x) \times h(x)]$

vi. $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

vii. $\lim_{x \to 2} \frac{h(x)}{f(x)}$

الحل:

i. $$\lim_{x \to 2} [h(x) - f(x)] = \lim_{x \to 2} h(x) - \lim_{x \to 2} f(x)$$
$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

ii. $$\lim_{x \to 2} [g(x) \times h(x)] = \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$$
$$= -8 \times 10.5 = -84$$

ii. $$\lim_{x \to 2} 8f(x) = 8 \lim_{x \to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

iv. $$\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} h(x) + \lim_{x \to 2} g(x)$$
$$= 5 + 10.5 + (-8)$$
$$= 15.5 - 8 = 7.5$$

v. $$\lim_{x \to 2} [f(x) - g(x) \times h(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) - \lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x)$$
$$= 5 - (-8 \times 10.5)$$
$$= 5 + 84 = 89$$

vi. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} f(x)}{\lim\limits_{x\to 2} g(x)} = \dfrac{5}{-8} = -\dfrac{5}{8}$

vii. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{h(x)}{f(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} h(x)}{\lim\limits_{x\to 2} f(x)} = \dfrac{10.5}{5} = 2.1$

نظرية:

إذا كانت النهاية $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عددا صحيحاً موجباً فان

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال:

$$\lim_{x\to 1} [3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = [3-1]^6 = 2^6 = 64$$

أمثلة:

أوجد نهاية كل من الدوال التالية:

1. $\lim\limits_{x\to 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) = 3\times 2^3 + 5\times 2^2 - 7$

$= 3\times 8 + 5\times 4 - 7$

$= 24 + 20 - 7 = 37$

2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3x^2+7}{x-5} = \dfrac{3\times 3^2+7}{3-5} = \dfrac{3\times 9+7}{-2} = \dfrac{27+7}{-2} = \dfrac{34}{-2} = -17$

3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-1}{5x+3} = \dfrac{2\times 2-1}{5\times 2+3} = \dfrac{4-1}{10+3} = \dfrac{3}{13}$

4. $\lim\limits_{x\to 2} e^x = e^2$

5. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

6. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1} = \dfrac{(-1)^2-1}{-1+1} = \dfrac{1-1}{-1+1} = \dfrac{0}{0}$ كمية غير معينة

7. $\lim\limits_{x\to 2} \left((\log(3x^2+5)\right) = \log(3\times 2^2+5)$

$= \log(3\times 4+5)$

$= \log(12+5)$

$= \log 17$

8. $\lim\limits_{x\to 3} \left(\ln(2x-5)\right) = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln 1 = 0$

9. $\lim\limits_{x\to 1} (3x^3+4x-2)^3 = (3\times 1^3+4\times 1-2)^3 = (3+4-2)^3 = 5^3 = 125$

10. $\lim\limits_{x\to 2} \sqrt[3]{x^2+5} = \sqrt[3]{2^2+5} = \sqrt[3]{4+5} = \sqrt[3]{9}$

٣. إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل:

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات:

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الأولى

i. تقع a ضمن مجال القاعدة الثانية

ii. تقع a على الحد الفاصل بين المجالين

مثال: إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

فأوجد

$$i.\ \lim_{x\to 3} f(x) \quad , \quad ii.\ \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) \quad , \quad iii.\ \lim_{x\to 1} f(x)$$

الحل:

i. تقع ٣ ضمن مجال القاعدة الثانية لان $3>1$

$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3} 7x-2=7\times 3-2=21-2=19$$

ii. تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال القاعدة الثانية لان $\frac{1}{2}<1$

$$\therefore \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)=\lim_{x\to \frac{1}{2}} 3x^2+5=3\left(\frac{1}{2}\right)^2+5=\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{20}{4}=\frac{23}{4}$$

iii. تقع ١ على الحد الفاصل بين مجال القاعدتين لذا نحسب النهاية من اليمين (أي $\lim_{x\to 1^+} f(x)$) والنهاية من اليسار (أي $\lim_{x\to 1^-} f(x)$)

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} 7x-2=7\times 1-2=7-2=5$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1} 3x^2+5=3\times 1^2+5=3+5=8$$

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)\neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة

تمارين

أ- إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$
فأوجد مما يلي:

i. $\lim_{x\to 2}[5f(x) - 4h(x)]$

ii. $\lim_{x\to 2}\left[-\frac{1}{2}g(x)\times h(x)\right]$

iii. $\lim_{x\to 2}[f(x) + 2h(x) + 3g(x) - 2]$

iv. $\lim_{x\to 2}[8f(x) - g(x)\times h(x)]$

v. $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)}{f(x)}$

vi. $\lim_{x\to 2}\frac{h(x)}{2f(x)}$

ب- أوجد النهايات التالية إذا وجدت:

1. $\lim_{x\to 2}(x^2 - 2x + 1)$

2. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2 - 4}{x - 2}$

3. $\lim_{x\to -2}\frac{2x - 3}{x + 4}$

4. $\lim_{x\to 0} e^x$

5. $\lim_{x\to 6}\sqrt[4]{x^2 - 3x - 8}$

6. $\lim_{x\to 3}(\log(2x + 4))$

7. $\lim_{x\to 2}(\ln(x^2 + 1))$

8. $\lim_{x\to -1}(2x^2 + 5x + 1)^2$

9. $\lim_{x\to 1}\sqrt{x}$