المحاضرة (1)

المجموعات والاقترانات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها عدد من العناصر بينها صفات مشتركة تكتب بين حاصرتين { } و تسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة ..... A , B , C ,

و من الأمثلة على المجموعات $A=\{1,3,5,7,9,.......\}$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل:

a , b , c , ...

يستخدم الرمز ∈ " ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصوة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فيكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

1- طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :

مثال : $A = \{1,5,10,15\}$ $B=\{a , b ,c , d\}$ $C=\{1 , 2 , 3 .....\}$

(و هي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل1 2 3 4وهكذا)

$A = \{1, 2 , 3,....,100\}$

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

2- طريقة القاعدة (الصفة المميزة):-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : x عدد زوجي }

B = { x : x طالب بمقرر الاحصاء في الادارة }

C = { x : x طالب بنظام التعليم عن بعد }

$D = \{ x : -3 \leq x \leq 1$ عدد صحيح $x\}$

$X = \{ x : 0 \leq x \leq 12$ عدد صحيح $x\}$

أنواع المجموعات :-

1- المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

$A = \{ x :$ عدد طبيعي زوجي و فردي $x\}$

$B = \{ x :$ دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية $x\}$

2- المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال : المجموعات التالية مجموعات منتهية .

$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8\}$

$B = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , 100\}$

$C = \{ x , y , s, t\ u \}$

3- المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال : المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

$A = \{ x :$ عدد طبيعي فردي $\}$

$B = \{ 10, 20 , 30 ,\ldots\ldots\ldots \}$

4- المجموعة الكلية:-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية ، و يرمز لها بالرمز U .

5- المجموعة الجزئية:

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة: $A \subset B$

أمثلة :-

إذا كانت $A = \{ 2,4,6\}$ و $B= \{1,2,3,4,5,6,7,8 \}$ فإن $A \subset B$.

المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم لإلكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

6- تساوي المجموعات:

تكون المجموعة A و B متساويتان إذا كانت:

$A = B$ >>>> $A \subseteq B$ $A \subseteq B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها و تكتب على الصورة

$B \equiv A$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{1, 5, 7, 9\}$, $B = \{9, 7, 5, 1\}$

2- $A = \{2, 5, 9\}$, $B = \{a, s, d\}$

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

1. الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B ($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال : إذا كان $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$ و $B = \{2, 4, 6, 8\}$ أوجد ($A \cup B$) ؟

الحل

$(A \cup B) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

2. التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :- إذا كان $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ و $B = \{0, 2, 4, 6\}$ أوجد $B \cap A$

الحل

$(A \cap B) = \{0, 2\}$

3. المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ و $A = \{2,4,6,8,10\}$

أوجد

الحل

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$

4. الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل

A-B = { 1 , 2 , y }

مثال :-

إذا كانت

A={1,2,3,x,y} و

B={3,4,5,x,w}

و المجموعة الكلية

U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}

فأوجد :-

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

الحل:

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$

2- $A \cap B = \{3, X\}$

3- $B - A = \{4, 5, w\}$

4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$

5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$

8- $\overline{A} \cup A = U$

9- $\overline{A} \cap A = \{ \}$

مجموعات الاعداد :-

١- مجموعة الاعداد الطبيعية :و هي تحتوى على الاعداد الصحيحة الموجبة $N = \{1,2,3,4,.........\}$

٢- مجموعة الاعداد الصحيحة: وهى مجموعة الاعداد الموجبة و السالبة بالإضافة الى الصفر $I = \{ .....,$

٣- مجموعة الاعداد النسبية : و العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على صورة $\frac{a}{b}$ و تحتوي مجموعة الاعداد الصحيحة بالإضافة الى الكسور مثل $\frac{9}{1}, \frac{2}{3}$.

٤- مجموعة الاعداد غير النسبية : و هي الاعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ مثل جذور الاعداد التي ليست مربع كامل $\sqrt{6}$.

٥- مجموعة الاعداد الحقيقية : وهي تحتوى على الاعداد النسبية و غير النسبية و يرمز لها بالرمز **R** و تمثل بخط الاعداد و الذي يمتد من $-\infty$ إلى ∞ و منتصفه الصفر

<u>الفترة :-</u>

و الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية و هي الاعداد التي تمتد من النقطة a إلى النقطة b و تكتب حسب نوعها كالآتي :-

١- الفترة المفتوحة : $(a , b) : \{ x\in R: a < x < b\}$

٢-الفترة نصف المغلقة (نصف المفتوحة) :

$[a , b) : \{ x\in R: a \leq x < b\}$

٣-الفترة المغلقة : $[a , b] : \{ x\in R: a \leq x \leq b\}$

مثال :-

اذا كانت الفترات $B = [1, 4]$ و $A = [-2, 3)$ فاحسب ما يلي :

1- $A \cap B$
2- $A \cup B$
3- $A - B$
4 - $B - A$

الحل :-

1- $A \cap B = [1, 3)$
2- $A \cup B = [-2, 4]$
3- $A - B = [-2, 1)$
4 - $B - A = [3, 4]$

<u>مجموعة المجموعات :-</u>

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a , b , c\}$

الحل

$P(s) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} ,\{a,b\} , \{a,c\} , \{b,c\} ,\{a,b,c\} ,Ø \}$

<u>ملاحظة :</u> إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{ a, b , c \}$

$P(S) = \{ \{a\} , \{b\} , \{c\} , \{a,b\} , \{a,c\} ,\{b,c\} ,\{a,b,c\} , Ø \}$

$2^3 = 8$

<u>تمارين :</u>

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

A ={x: عدد سالب و موجب x }

$B = \{3 ,6 ,9 ,12 \}$

C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

$D = \{ 2 , 4 , 6 , ...,100\}$

$E = \{ 100 , 200 , 300 ,.......\}$

$F = \{ w , e , r , t \}$

٢- إذا كانت $A = \{3 , 5 , 7 \}$ و $B = \{ 1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{5 ,10 ,15 ,20 \}$, $B = \{15 ,10 ,5 , 20 \}$

2- $A= \{ 20 ,50 ,70 \}$, $B = \{ k , d , u \}$

٤- اذا كانت $U= \{0 , 1, 2, 3,.......,10\}$ وكانت $C = \{ 6, 7,8, 9,10\}$ ، $B = \{ 1 , 2 ,3 ,4 ,5 \}$ ، $A = \{ 2, 4 ,6 ,8 ,10\}$

فجد ما يلي:-

1- $A \cup B$

2- $A \cap C$

3- $\overline{A} \cap \overline{B}$

4- $B \cup C$

5- $A \cap \overline{C}$

6- $A - (B \cap C)$

7- $(\overline{A} \cup B) - C$

8- $(\overline{\overline{B} \cap \overline{C}})$

1- $A \cup B = \{ 1 , 2 , 3 ,4 , 5 ,6 , 8 , 10 \}$

2- $A \cap C = \{ 6 , 8 , 10 \}$

3- $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{ 0 , 7 ,9 \}$

4- $B \cup C = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 ,10 \}$

5- $A \cap \overline{C} = A - C = \{ 2 , 4 \}$

6- $A - (B \cap C) = B \cap C = \emptyset$

$A - (B \cap C) = A - (\emptyset) = A$

7- $(\overline{A} \cup B) - C$

$\overline{A} = \{0 , 1 , 3 , 5 , 7 , 9\}$

$\overline{A} \cup B = \{0, 1 , 2 ,3 , 4 , 5 ,7 ,9 \}$

$(\overline{A} \cup B) - C = \{ 0 , 1 ,2 ,3 ,4 ,5\}$

8- $(\overline{\overline{B} \cap \overline{C}}) = \overline{(B \cup C)} = B \cup C$

$B \cup C = \{ 1 , 2, 3 ,4 , 5 ,6 ,7 ,8 , 9 ,10 \}$

5- إذا كانت

$A=\{8,10,12,r,m\}$ و

$B=\{4,6,10,o,r\}$

أوجد المجموعة الكلية

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

6- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$ ؟

7- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر $P(S)$ ؟

المحاضرة (2)

المجموعات والاقترانات

ثانياً : الاقترانات (الدوال) Functions :

1- إقتران كثير الحدود : ويكون على الصورة :

$f(x) = anxn + an\text{-}1xn\text{-}1 + ...+ a1x + a$

و تكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران .

مثال :-ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x - 4$

3- $f(x) = x2 \ - x \ + 1$

4- $f(x) = x3 + x7 + 5x - 7$

5- $f(x) = 2 - 3\,x + x3$

1- $f(x) = 3$

الدرجة الصفرية و يسمى أيضاً اقتران ثابت .

2- $f(x) = 3x - 4$

الدرجة الأولى ويسمى اقتران خطي .

3- $f(x) = x2 \ - x \ + 1$

الدرجة الثانية أو اقتران تربيعي .

4- $f(x) = x3 + x7 + 5x - 7$

الدرجة السابعة .

5- $f(x) = 2 - 3\,x + x3$

الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبي .

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

1- الجمع و الطرح :-

يتم الجمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس .

مثال (1) :

1- $(3x3 - 4x2 + 6) + (x4 - 2x3 - 4x + 3)$

الحل :

$(3x3 - 4x2 + 6) + (x4 - 2x3 - 4x + 3) = x4 + x3 - 4x2 - 4x + 9$

مثال (2) :

2- $(6x5 + 3x3 - 4x + 5) - (3x5 + x4 - 2x2 - 4x + 7)$

الحل :

$(6x5 + 3x3 - 4x + 5) - (3x5 + x4 - 2x2 - 4x + 7) = 3x5 - x4 + 3x3 + 2x2 - 2$

2- الضرب :- مثال :-اذا كان $f(x) = (3x2 - 5x + 4)$ ، وكان $h(x) = (x2 + 2x - 1)$ فجد $(f.h)(x)$

الحل :

$(f.h)(x) = (3x2 - 5x + 4) (x2 + 2x - 1)$

$= 3x4 + 6x3 - 3x2 - 5x3 - 10x2 + 5x + 4x2 + 8x - 4$

$= 3x4 + x3 - 9x2 + 13x - 4$

2- الضرب :-

مثال :-اذا كان $f(x) = (2x2 + 3x)$ ، وكان $h(x) = (x3 + 5x - 8)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :

$(f.h)(x) = (x3 + 5x - 8) (2x2 + 3x)$

$= 2x5 + 10x3 - 16x2 + 3x4 + 15x2 - 24x$

$= 2x5 + 3x4 + 10x3 - x2 - 24x$

1- الاقتران النسبي :-

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيري حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود .

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ ، $h(x) \neq 0$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ كثيري حدود

<u>مثال :-</u>

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

<u>الحل :-</u>

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

نساوي المقام بالصفر فيكون (X-1 = 0) إذاً X=1 إذا المجال $R \setminus \{1\}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

يكون الاقتران معرف عندما يكون $X^2-4 > 0$ ، ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $X^2-4=0$ و نبحث في اشارة الاقتران $X^2 = 4$ ، $X = \pm 2$ ، ويكون مجال الاقتران موجب على $R \setminus [-2 , 2]$ ، وهذا هو مجال الاقتران النسبي .

<u>مثال :-</u>

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{4x+11}{x-12}$

2- $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-16}}$

3- $f(x) = \frac{12x^2}{5x^2+10}$

<u>الحل :-</u>

1- $f(x) = \frac{4x+11}{x-12}$

نساوي المقام بالصفر فيكون (X-12 = 0) إذاً X=12 إذا المجال $R \setminus \{12\}$

2- $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{4x^2-16}}$

يكون الاقتران معرف عندما يكون $4X^2-16 > 0$ ، ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $4X^2-16=0$ و نبحث في اشارة الاقتران $X^2 = 4$ ، $X = \pm 2$ ، ويكون مجال الاقتران موجب على $R \setminus [-2 , 2]$ ، وهذا هو مجال الاقتران النسبي .

3- $f(x) = \frac{12x^2}{5x^2+10}$

يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

<u>العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-</u>

١- الجمع والطرح :-

مثال اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}=\frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)}+\frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}=$$

$$\frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}=\frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$$

١- الجمع والطرح :-

مثال اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}=$$

$$\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}=\frac{15x^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$$

2- الاقتران الأسي :-

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة أي $f: R\to R^+$ حيث $f(x)=a^x$

حيث a عدد حقيقي موجب و يسمى a الاساس و x الاس

(كمثال $f(x)= 10^x$) .

اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي

$f(x)= e^x$

واذا كان الاساس = ١٠ فان الاقتران يسمى الاس العشري

$f(x) =10^x$

قوانين الاسس :-

1- $a^x . a^y = a^{x+y}$

2- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3- $(a^x)^y = a^{xy}$

4- $a^x . b^x = (ab)^x$

5- $a^0 = 1$

6- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

مثال :-

حل المعادلات الأسية التالية :-

1- $3^{2x-1} = 243$

2- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

الحل :-

1- $3^{2x-1} = 243$

$3^{2x-1} = 3^5$

$2x - 1 = 5$

$2x = 6$

$x = 3$

تابع حل المثال :-

2- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$x^2 = 4$

$x = \mp 2$

3- الاقتران اللوغاريتمي :-

الاقتران اللوغاريتمي هو الاقتران المعكوس للاقتران الاسي و بالتالي يكون الاقتران اللوغاريتمي معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة إلى مجموعة الاعداد الحقيقية .

فإذا كانت :-

$f(x) = \log a\ x$

$y = ax$

$x = \log a\ y$

مثال :-

أوجد الاقتران المعكوس (اللوغاريتمي) للاقترانات التالية :-

1- $f(x) = 2^x$

2- $f(x) = e^x$

3- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4- $f(x) = 10^x$

الحل :-

1- $f(x) = 2^x$

$f^{-1}(x) = \log_2 x$

2- $f(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \log_e x$

ويسمى المقدار الاخير اللوغاريتم الطبيعي و يكتب على الصورة

$\ln(x)$

تابع حل المثال :-

3- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4- $f(x) = 10^x$

$f^{-1}(x) = \log_{10} x = \log x$

و هذا المقدار يسمى اللوغاريتم العشري .

قوانين اللوغاريتمات :-

1- $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

2- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3- $\log_a x^y = y \log_a x$

4- $\log_a a = 1$

5- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

6- $\log_a 1 = 0$

7- $\log_a a^x = a^{\log_a x} = x$

8- $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

بسط ما يلي إلى ابسط صورة

1- $\frac{\log 10+\log 100+\log 1000}{\log 1000}$

2- $\frac{\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9}{\log_2 4}$

الحل :-

1- $\frac{\log 10+\log 100+\log 1000}{\log 1000}$

$= \frac{1+\log 10^2+\log 10^3}{\log 10^3} = \frac{1+2+3}{3} = \frac{6}{3} = 2$

2- $\frac{\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9}{\log_2 4}$

$= \frac{\log_2 3.6-\log_2 9}{\log_2 2^2} = \frac{\log_2 \frac{18}{9}}{2\log_2 2} = \frac{\log_2 2}{2} = \frac{1}{2}$

مثال :-

حل المعادلة اللوغارتمية التالية :-

$\text{Log}(x-1)^3 = \log(2) + \log(32)$

الحل

$\text{Log}(x-1)^3 = \log(2).(32) = \log 64$

$3\,\text{Log}(x-1) = \log(4^3) = 3\log 4$

$\log(x-1) = \log 4$

$x-1 = 4$

$x = 5$

مثال :-

حل المعادلة اللوغارتمية التالية :-

$$\text{Log}(x+1)^4 = \log(4) + \log(64)$$

الحل

$$\text{Log}(x+1)^4 = \log(4) . (64) = \log 256$$

$$4\,\text{Log}(x+1) = \log(4^4) = 4\log 4$$

$$\log(x+1) = \log 4$$

$$x+1 = 4$$

$$x = 3$$

تمارين واجب :-

١- أوجد :-

a- $(16x^6 + 30x^4 - 20x^2 + 15x) - (12x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 4x + 2)$

b- $(9x^3 + 5x^2 + 12) \times (2x^2 - 5x - 10)$

٢- ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{20x^2+10}{x-10}$

2- $f(x) = \frac{2x+15}{\sqrt{5x^2-125}}$

3- $f(x) = \frac{30x^4}{12x^2+120}$

٣- اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{2X+3}{X-5} - \frac{4X^2-6}{3X+1}$$

٤- حل المعادلات الاسية التالية :-

$$4^{3x+2} = 1024$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \frac{16}{81}$$

٥- أوجد الاقتران المعكوس (اللوغاريتمي) للاقترانات التالية :-

$f(x) = 3^x$

$f(x) = e^{-x}$

$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{3x}$

$f(x) = 10^x$

٦- أكمل ما يلي :-

$\log_2 \ldots\ldots = \log_2 6 + \log_2 8$

$\log_5 64 = \log_5 2 + \log_5 \ldots.$

$\log_2 \ldots\ldots = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{5}{7}$

$\log_3 \ldots\ldots = \log_3 15 - \log_3 5$

$\log_3 30 = \log_3 15 - \log_3 \ldots.$

$\log_4 x^5 = \ldots\ldots \log_4 \ldots.$

$\log_8 8 = \ldots\ldots$

$\log_{10} 1 = \ldots\ldots$

$\log_6 6^x = \ldots\ldots\ldots$

٧- بسط ما يلي إلى ابسط صورة

$$\frac{4\log 100 - \log 100 + 6\log 10}{2\log 1000}$$

$$\frac{\log_3 5 + \log_3 8 - \log_3 10}{\log_3 4}$$

$$\frac{\log_2 6 + \log_2 12 - \log_2 18}{\log_2 8}$$

٨- حل المعادلة اللوغارتمية التالية :-

$\text{Log}\,(2x+1)^3 = \log(5) + \log(25)$

المحاضرة (3)

المعادلات و المتباينات

أولاً: المعادلات:

يحتل موضوع المعادلات مكانة كبيرة في علم الرياضيات ، و هو من أقدم المواضيع التي طُرحت للبحث ، و في هذه الوحدة سنتطرق إلى:

1. حل المعادلات الخطية
2. حل المعادلات التربيعية
3. حل أنظمة معادلتين بمجهولين
4. حل نظام بثلاثة مجاهيل

و يقصد بحل المعادلة هو إيجاد قيمة المتغير أو المتغيرات في المعادلة.

1. حل المعادلة الخطية:

أن المعادلة الخطية هي معادلة في متغير واحد و من الدرجة الأولى ، أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد ، و الشكل العام للمعادلة الخطية هو:

$$ax + b = 0$$

مثال: حل المعدلة الخطية التالية:

$$2x - 3 = 0$$

الحل:

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

2. المعادلة التربيعية:

و المعادلة التربيعية يكون أكبر أس فيها هو اثنين ، و تأخذ الصورة:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

و هناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ، و لكننا سوف نعتمد على القانون العام للحل ، حيث أنه من أسرع هذه الطرق و أكثرها دقة و يأخذ القانون العام الشكل التالي:

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

و يسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ و هو ما أسفل الجذر بالمميز.

وهناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة و هي:

1- الحالة الأولى: إذا كان المميز (Δ) > 0 فيوجد حلين للمعادلة:

$$\left(x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \;,\; x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

2- الحالة الثانية: إذا كان المميز($\Delta = 0$) فيوجد حل وحيد للمعادلة:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3- الحالة الثالثة: إذا كان المميز($\Delta < 0$) فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة

مثال:

حل المعادلات التربيعية التالية:

1. $x^2 + 2x - 3 = 0$
2. $3x^2 - 4x + 5 = 0$
3. $x^2 - 2x + 1 = 0$
4. $x^2 - 5x + 3 = 0$

الحل :-

$1- x^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1 \;,\; b = 2 \;,\; c = -3$

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times -3 = 16 > 0$$

.:.يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

$2-\ \ 3x^2 - 4x + 5 = 0$

a = 3 , b = -4 , c = 5

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44 < 0$$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة .

$3-\ \ x^2 - 2x + 1 = 0$

a = 1 , b = -2 , c = 1

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

∴يوجد حل وحيد للمعادلة هو : -

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{--2}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$$

تابع حل المثال :-

$4-\ \ x^2 - 5x + 3 = 0$

a = 1 , b = -5 , c = 3

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

مثال :-

حل المعادلات التربيعية التالية :-

1- $4x^2 + 5x = -6$

2- $5x^2 - 2x = 0$

3- $3x^2 - 6x = -3$

4- $3\text{-}2x^2 + 3x = 0$

الحل :-

1- $4x^2 + 5x + 6 = 0$

a = 4 , b = 5 , c = 6

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times 4 \times 6 = -71 < 0$$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة .

2- $5x^2 - 2x = 0$

a = 5 , b = -2 , c = 0

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 0 = 4 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{4}}{2 \times 5} = \frac{2 - \sqrt{4}}{10} = 0$$

$$, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{4}}{2 \times 5} = \frac{2 + \sqrt{4}}{10} = 0.4$$

3- $3x^2 - 6x + 3 = 0$

a = 3 , b = -6 , c = 3

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

∴يوجد حل وحيد للمعادلة هو : -

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{--6}{2 \times 3} = \frac{6}{6} = 1$$

تابع حل المثال :-

4- $3 - 2x^2 + 3x = 0$

$-2x^2 + 3x + 3 = 0$

a = -2 , b = 3 , c = 3

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times -2 \times 3 = 9 + 24 = 33 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) - \sqrt{4}}{2 \times -2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) + \sqrt{4}}{2 \times -2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

3. <u>المعادلة التربيعية:</u>

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام طريقة الحذف ، حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة و لكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين و نجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في إحدى المعادلتين و نجد قيمة المتغير الأول.

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة الحذف :-

$$2x + 3y = 7$$
$$3x + 2y = 8$$

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (3) و الثانية في (2) لحذف المتغير x فتصبح المعادلتين :-

$$\begin{array}{r} 6x + 9y = 21 \\ -\ \ 6x + 4y = 16 \\ \hline 5y = 5 \end{array} \quad \text{نطرح}$$

$$\underline{y = 1}$$

نعوض بقيمة y في المعادلة الثانية :-

$$3x + 2(1) = 8$$
$$3x + 2 = 8$$
$$3x = 6$$
$$\underline{x = 2}$$

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة الحذف :-

$$3x + 4y = 9$$
$$2x + 3y = 7$$

الحل :-

حتى يتم توحيد معاملات أحد المتغيرين و ليكن المتغير x يمكن ضرب أحد المعاملات في قيمة المتغير الأخر .

$$(3x + 4y = 9) \times 2$$
$$(2x + 3y = 7) \times 3$$

$$\begin{array}{r} 6x + 8y = 18 \\ 6x + 9y = 21 \\ \hline y = 3 \end{array} \quad \text{نطرح}$$

نعوض في المعادلة الأولى :-

$$3x + 4(3) = 9$$
$$3x + 12 = 9$$
$$3x = -3 \quad , \quad X = -1$$

ثانياً: المتباينات:

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية (<) أقل من (>) أكبر من ، (≤) أكبر من أو يساوي ، (≥) أقل من أو يساوي و من الأمثلة على المتباينات :-

$x < 2$

$x + 1 \leq -3$

$x^2 + 2x + 5 \geq 0$

تعريف : تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها بمجموعة التعويض ، وهذه المجموعة تعطى في السؤال و تكون عادة إحدى مجموعات الاعداد و في كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية "R" .

تعريف : تسمى مجموعة قيم X التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) مجموعة الحل للمتباينة .

مجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

مثال :-

أوجد مجموعة الحل للمتباينة التالية :-

$3X - 2 > X + 1$

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

$3X - 2 > X + 1$

$3X - X > 1 + 2$

$2X > 3$

$X > \frac{3}{2}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2}, \infty)$

مثال :-

أوجد مجموعة الحل للمتباينة التالية :-

$6X - 5 > X + 3$

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

$6X - 5 > X + 3$

$6X - X > 3 + 5$

$5X > 8$

$X > \frac{8}{5}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{8}{5}, \infty)$.

ثالثاً: المتتاليات:

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R و تكتب على الصورة :-

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \dots\dots\dots, a_n$$

و تسمى العناصر $a_1, a_2, a_3, \dots\dots\dots, a_n$ بحدود المتتالية يسمى الحد a_n الحد العام للمتتالية .

وتكتب المتتالية بدلاله حدها a_n .

مثال :-

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية :-

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{3n - n^3\}$

3- $\{2n + 4\}$

4- $\{2^n\}$

الحل :-

الحدود الاربعة الاولى هي a_1, a_2, a_3, a_4

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}_{n=1}^{4} = \left\{\frac{1^2}{2}\right\}, \left\{\frac{2^2}{2}\right\}, \left\{\frac{3^2}{2}\right\}, \left\{\frac{4^2}{2}\right\} = a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = 2, a_3 = \frac{9}{2}, a_4 = 8$

2- $\{3n - n^3\}_{n=1}^{4} = \{3.1 - 1^3\}, \{3.2 - 2^3\}, \{3.3 - 3^3\}, (3.4 - 3^3\}$

$= a_1 = \{2\}, a_2 = \{-2\}, a_3 = \{-18\}, a_4 = \{-52\}$

$3- \{2n+4\}_{n=1}^{4} = \{2.1+4\}\{2.2+4\}\{2.3+4\}\{2.4+4\}$

$= a_1 = 6, a_2 = 8, a_3 = 10, a_4 = 12$

$4- \{2^n\}_{n=1}^{4} = \{2^1\},\{2^2\},\{2^3\},\{2^4\} = \quad a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, a_4 = 16$

مثال :-

أوجد الحد الخامس و الحد الثامن للمتتالية :-

$$\left\{\frac{n^2+1}{3n-2}\right\}$$

الحل

الحد الخامس $a_5 = \frac{5^2+1}{3.5-2} = \frac{26}{13} = 2$

الحد الثامن $a_8 = \frac{8^2+1}{3.8-2} = \frac{63}{22}$

المحاضرة (4)

تابع المتتاليات

1. المتتالية الحسابية:

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية و يرمز له بالرمز d ، أي اذا كانت $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n$ متتالية حسابية فإن :-

$$a_2 = a_1 + d \ \ggg\ggg\ggg \quad d = a_2 - a_1$$
$$a_3 = a_2 + d \ \ggg\ggg\ggg \quad d = a_3 - a_2$$
$$a_4 = a_3 + d \ \ggg\ggg\ggg \quad d = a_4 - a_3$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d \ \ggg\ggg\ggg \quad d = a_n - a_{n-1}$$

مثال :-

أي المتتاليات التالية حسابية واذا كانت فما هو اساسها :-

1- 2,4,8,16,......

2- 1,4,7,10,.......

3- 1,4,9,16,25,..

4- 5,3,1,-1,.........

5-6,6,6,6,6,........

6- 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

الحل :-

1- 2,4,8,16,...... (4-2=2 , 8-4=4 , الفرق ليس ثابت)

∴ليست حسابية .

2- 1,4,7,10,.......(4-1 = 3 , 7-4 = 3 , الفرق ثابت)

∴ حسابية و أساسها = ٣ .

3- 1,4,9,16,25,.. (4-1 = 3 , 9 -4 = 5 , الفرق ليس ثابت)

∴ليست حسابية .

4- 5,3,1,-1,......... (3-5 = -2 , 1-3=-2, الفرق ثابت)

∴ حسابية و أساسها = -٢ .

5-6,6,6,6,6,........(6-6=0 , 6-6=0 , الفرق ثابت)

∴ حسابية و أساسها =صفر .

6- 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, .. ($\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ الفرق ليس ثابت)

∴ليست حسابية .

2. <u>الحد العام للمتتالية الحسابية:</u>

<u>اذا كانت (a_n) متتالية حسابية حدها الأول a_1 و اساسها d فإن :-</u>

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + 4\,d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

∴ الحد العام للمتتالية الحسابية هو :-

$$\underline{a_n = a_1 + (n-1)d}$$

<u>مثال :-</u>

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (2) و أساسها (5)ثم أوجد الحد الخامس عشر للمتتالية .

الحل :-

$$a_1 = 2$$

d = 5

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

= 2 + (n – 1) (5)

$$\therefore\ a_n = 5n - 3$$

الحد الخامس عشر :-

$$a_{15} = 5(15) - 3$$

= 75 – 3 = 72

<u>مثال :-</u>

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (5-) و أساسها (3)ثم أوجد الحد العاشر للمتتالية .

الحل :-

$$a_1 = -5$$

d = 3

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

= -5 + (n – 1) (3)

$$\therefore\ a_n = 3n - 8$$

الحد العاشر :-

$$a_{15} = 3(10) - 8$$

= 30 – 8 = 22

مثال :-

إذا علمت أن الحد الحادي عشر من متسلسلة حسابية يساوي ٣٥ و الحد الاول يساوي ٥ أوجد أساس هذه المتتالية ثم أود الحد العاشر ؟

الحل :-

$$a_1 = 5$$

d = ?

$$a_{11} = 35$$

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

35 = 5 + (11 – 1) (d)

$$\therefore \ 30 = 10\,d$$

$$d = \frac{30}{10} = 3$$

الحد العاشر :-

$$a_{15} = 3(10) - 8$$

= 30 – 8 = 22

مثال :-

إذا علمت أن الحد السادس عشر من متسلسلة حسابية يساوي ٨٥ و أساس هذه المتتالية يساوي ٥ أوجد الحد الأول لهذه المتتالية ؟

الحل :-

$$a_1 = ?$$

d = 5

$$a_{16} = 85$$

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

85 = a_1 + (16 – 1) (5)

$$\therefore \ 85 = 75 + a_1$$

$$a_1 = 85 - 75 = 10$$

مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية :-

1- 3 , 6 , 9 , 12 , ...

2- 10 , 8 , 6 , 4 , ...

3- 1 , $\frac{3}{2}$, 2 , $\frac{5}{2}$, 3 , ...

الحل :-

نجد في البداية الحد الأول و الأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام .

1- $a_1 = 3$, $d = 3$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 3 + (n-1)(3)$$

$$a_n = 3 + 3n - 3 = 3n$$

نجد في البداية الحد الأول و الأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام .

2- $a_1 = 10$, $d = -2$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 10 + (n-1)(-2)$$

$$a_n = 10 - 2n + 2 = 12 - 2n$$

نجد في البداية الحد الأول و الأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام .

3- $a_1 = 1 \ , \ d = \frac{1}{2}$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{n+1}{2}$$

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 3 \ , \ a_5 = 19$ أوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين .

الحل :-

تكون الاوساط الحسابية مع العددين متتالية حسابية على الصورة $a_1, a_2, a_3, a_4 \ , a_5$ و تكون الاوساط هي a_2, a_3, a_4

حيث $a_1 = 3 \ , \ a_5 = 19$

$$a_5 = a_1 + (4)d$$

$$19 = 3 + 4d \quad \ggg \quad d = \frac{(19-3)}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\therefore \quad a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15$$

مثال :-

إذا علمت أن $a_5 = 10 \ , \ a_{12} = 45$ أوجد أربع أوساط حسابية بين العددين .

الحل :-

تكون الاوساط الحسابية مع العددين متتالية حسابية و تكون الاوساط هي $a_6, a_7, a_8 \ a_9$

حيث $a_5 = 10 \ , \ a_{12} = 45$

$$a_{12} = a_5 + (7)d$$

$$45 = 10 + 7d \quad \ggg \quad d = \frac{(45-10)}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\therefore \quad a_6 = a_5 + d = 10 + 5 = 15$$

$$a_7 = a_6 + d = 15 + 4 = 20$$

$$a_8 = a_7 + d = 20 + 5 = 25$$

$$a_9 = a_8 + d = 25 + 5 = 30$$

مثال :-

متتالية حسابية حدها الرابع = ١٣ و حدها العاشر = ٢٥ أوجد حدها العام .

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = a_4 + 6d$$

$$25 = 13 + 6 \times d$$

$$d = \frac{(25-13)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

ثانيا نجد قيمة a_1 :-

$$a_4 = a_1 + 3d$$

$$13 = a_1 + 3 \times 2$$

$$a_1 = 13 - 6 = 7$$

ثالثا نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\therefore a_n = 7 + (n-1)2$$

$$\therefore a_n = 7 + 2n - 2$$

$$\therefore a_n = 2n + 5$$

مثال: متتابعة حسابية حدها السابع = 30، و حدها الثاني عشر = 45، أوجد الحد العام.

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{12} = a_7 + 5d$$
$$45 = 30 + 5 \times d$$
$$d = \frac{(45-30)}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_7 = a_1 + 6d$$
$$30 = a_1 + 6 \times 3$$
$$a_1 = 30 - 18 = 12$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\therefore a_n = 12 + (n-1)3$$
$$\therefore a_n = 12 + 3n - 3$$
$$\therefore a_n = 3n + 9$$

مثال: متتابعة حسابية حدها الثاني = 4- ، و حدها السادس = 4 ، أوجد الحد العام.

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_6 = a_2 + 4d$$
$$4 = -4 + 4 \times d$$
$$d = \frac{(4-(-4))}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_6 = a_1 + 5d$$
$$4 = a_1 + 5 \times 2$$
$$a_1 = 4 - 10 = -6$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\therefore a_n = -6 + (n-1)2$$
$$\therefore a_n = -6 + 2n - 2$$
$$\therefore a_n = 2n - 8$$

مثال: متتابعة حسابية حدها السابع = 12- ، و حدها العاشر = 3- ، أوجد الحد العام.

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{10} = a_7 + 3d$$
$$-3 = -12 + 3 \times d$$
$$d = \frac{(-3-(-12))}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_7 = a_1 + 6d$$
$$-12 = a_1 + 6 \times 3$$
$$a_1 = -12 - 18 = -30$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\therefore a_n = -30 + (n-1)3$$
$$\therefore a_n = -30 + 3n - 3$$
$$\therefore a_n = 3n - 33$$

3. <u>مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية:</u>

أول ن حد من حدود هو:

$a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_n$

و مجموعها هو:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$>> S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \ldots\ldots + (a_n + (n-1)d)$$

$$S_n = n\,a_1 + d + 2d + 3d + \ldots\ldots + (n-1)d$$

$$S_n = n\,a_1 + d(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1))$$

$$S_n = n\,a_1 + d\,\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_1 + (n-1)d)$$

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

مثال :-

متتالية حسابية حدها الأول = -٣ ،واساسها (٤) أوجد مجموع أول (٢٠) حد منها .

الحل

$$a_1 = -3, \quad d = 4$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(2(-3) + (19)(4))$$

$$= 10(-6 + 76)$$

$$= (10)(70) = 700$$

مثال :-

متتالية حسابية حدها الأول = ٣ ،واساسها (٥) أوجد مجموع أول (١٠) حد منها .

الحل

$$a_1 = 3 , \quad d = 5$$

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,(2\,a_1 + (n-1)d)}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\,(\,2\,(3) + (9\,)(5)\,)$$

$$= 5\,(\,6 + 45\,)$$

$$= (\,5\,)\,(\,51\,) = 255$$

مثال :-

متتالية حسابية عدد حدودها (١٦) حدها الأول (٣) وحدها الأخير (٣٩) احسب مجموعها .

الحل :

$$a_1 = 3 , \quad a_{16} = 39 , \quad n = 16$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)}$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}\,(\,3 + 39\,)$$

$$= (8)\,(42)$$

$$S_{16} = 336$$

مثال :-

متتالية حسابية عدد حدودها (٨) حدها الأول (-٥) وحدها الأخير (٢٥) احسب مجموعها .

الحل :

$$a_1 = -5 , \quad a_8 = 25 , \quad n = 8$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)}$$

$$S_8 = \frac{8}{2}\,(\,-5 + 25\,)$$

$$= (\,4\,)\,(20)$$

$$S_8 = 80$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{12} (\,5n - 1\,)$$

الحل :

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (١٢) حدها الأول (٤) واساسها (٥)

$$\therefore S_{12} = \frac{12}{2}\,(\,2(4) + 11\,(5)\,) = 378$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{10}(6n-2)$$

الحل :

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (١٠) حدها الأول (٤) واساسها (٦)

$$\therefore S_{10}=\frac{10}{2}\,(\,2(4)+9\,(6)\,)=310$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=6}^{10}(6n-2)$$

الحل :

$\sum_{n=6}^{10}(6n-2)=\sum_{n=1}^{10}(6n-2)-\sum_{n=1}^{5}(6n-2)$

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية حدها الأول (٤) واساسها (٦)

$$\therefore S_{10}=\frac{10}{2}\,(\,2(4)+9\,(6)\,)=310$$

$$\therefore S_{5}=\frac{5}{2}\,(\,2(4)+4\,(6)\,)=80$$

$$\sum_{n=6}^{10}(6n-2)=310-80=230$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=8}^{12}(-2n-5)$$

الحل :

$\sum_{n=8}^{12}(-2n-5)=\sum_{n=1}^{12}(-2n-5)-\sum_{n=1}^{7}(-2n-5)$

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية حدها الأول (7-) واساسها (2-)

$$\therefore S_{12}=\frac{12}{2}\,(\,2(-7)+11\,(-2)\,)=-216$$

$$\therefore S_{7}=\frac{6}{2}\,(\,2(-7)+6\,(-2)\,)=-78$$

$$\sum_{n=8}^{12}(6n-2)=-216-(-78)=-138$$

مثال :-

متتالية حسابية حدها الأول (-٦٠) وحدها الأخير (-٢) و مجموع حدودها (-٣١٠) أوجد عدد حدودها .

الحل :

نطبق القانون

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

$$\gg \frac{n}{2}\big(-60 + (-2)\big) = -310$$

$$\frac{n}{2}\,(-62) = -310$$

$$n\,(-31) = -310$$

$$n = 10$$

المحاضرة (5)

تابع المتتاليات

4. المتتالية الهندسة:

المتتالية الهندسية هي المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة تسمى أساس المتتالية و يرمز لها بالرمز r.

أي إذا كانت $\{a_n\} = a_1 , a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$

متتالية هندسية فإن:

$$a_2 = a_1\,d \quad \ggg \quad d = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2\,d \quad \ggg \quad d = \frac{a_3}{a_2}$$

$$a_4 = a_3\,d \quad \ggg \quad d = \frac{a_4}{a_3}$$

$$a_n = a_{n-1}\,d \quad \ggg \quad d = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال :

أي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها .

1- $1 , 4 , 9 , 16 , 25 , \ldots\ldots.$

2- $2 , 4 , 8 , 16 , 32 , \ldots\ldots..$

3- $2 , 4 , 6 , 8 , 10 , \ldots\ldots..$

4- $1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{8} \;, \ldots \ldots$

5- $1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 \;, \ldots..$

الحل :-

1- $1, 4, 9, 16, 25, \ldots\ldots$

$\frac{4}{1} = 4 \quad , \frac{9}{4} = 2.25$

∴ ليست هندسية .

2- $2, 4, 8, 16, 32, \ldots\ldots$

$\frac{4}{2} = 2 \quad , \frac{8}{4} = 2 \; , \frac{16}{8} = 2$

∴ متتالية هندسية و اساسها ٢ .

3- $2, 4, 6, 8, 10, \ldots\ldots$

$\frac{4}{2} = 2 \; , \frac{6}{4} = 1.5$

∴ ليست هندسية .

تابع الحل :-

4- $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} \quad , \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \; , \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

∴ متتالية هندسية و اساسها $\frac{1}{3}$.

5- $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots\ldots$

$-\frac{1}{1} = -1 \quad , \frac{1}{-1} = -1 \quad , -\frac{1}{1} = -1$

∴ متتالية هندسية و اساسها ١- .

الحد العام للمتالية الهندسية:

اذا كانت $\{a_n\} = \; a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_3$

متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن :-

$$a_2 = a_1\, r$$
$$a_3 = a_2\, r = a_1\, r^2$$
$$a_4 = a_3\, r = a_1\, r^3$$
$$a_5 = a_1\, r^4$$

الحد العام للمتتالية :-

$$\boxed{a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (١) و اساسها (٢) أوجد حدها العام .

الحل :-

$$a_n = 1 \quad , \quad r = 2$$
$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$
$$= (1)\,(2)^{n-1}$$
$$\therefore \quad a_n = 2^{n-1}$$

مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية :-

1- $4, 16, 64, 256, \ldots\ldots\ldots$

2- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots$

3- $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\ldots\ldots$

الحل :-

1- $4, 16, 64, 256, \ldots\ldots\ldots$

$a_1 = 4 \quad , r = 4$

$\ggg \; a_n = a_1 \, r^{n-1}$

$\quad = (4)(4)^{n-1}$

$\therefore \; a_n = 4^n$

2- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots$

$a_1 = 1 \;\; , \;\; r = \frac{1}{2} \ggg a_n = a_1 r^{n-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

الحل :-

3- $-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\ldots\ldots$

$a_1 = -1 \;,\; r = -1 \ggg a_n = a_1 r^{n-1} = (-1)(-1)^{n-1}$

$\therefore \; a_n = (-1)^n$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الرابع (٥) ، وحدها السابع $\left(\frac{1}{25}\right)$ أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad , \quad a_4 = a_1 r^3 = 5 \quad , \quad a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{25}$$

بالقسمة $\frac{a_7}{a_4}$ $\lll\lll$ $\frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{\left(\frac{1}{25}\right)}{5}$

$$\ggg \quad r^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \quad \ggg \quad \therefore r = \frac{1}{5}$$

نعوض في معادلة a_4 لإيجاد a_1

$$a_1 r^3 = 5 \quad \ggg \quad a_1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5 \quad \ggg \quad a_1 \frac{1}{125} = 5 \quad \ggg \quad a_1 = 625$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها السادس (١٢١٥) ، وحدها العاشر ٩٨٤١٥ أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad , \quad a_6 = a_1 r^5 = 1215 \quad , \quad a_{10} = a_1 r^9 = 98415$$

بالقسمة $\frac{a_{10}}{a_6}$ $\lll\lll$ $\frac{a_1 r^9}{a_1 r^5} = \frac{98415}{1215}$

$$\ggg \quad r^4 = 81 \quad \ggg \quad \therefore r = \sqrt[4]{81} \quad \therefore r = 3$$

نعوض في معادلة a_6 لإيجاد a_1

$$a_1 r^5 = 1215 \quad \ggg \quad a_1 (3)^3 = 1215 \quad \ggg \quad a_1 27 = 1215$$

$$\ggg \quad a_1 = \frac{1215}{27} = 45$$

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 2 , a_5 = 1250$ ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين ٢ ، ١٢٥٠

الحل :

$$a_1 = 2 \ , a_5 = 250$$

والمطلوب ايجاد $a_2, a_3 \ , a_4$

$a_5 = a_1 r^4 \ggg 1250 = (2)r^4 \ggg r^4 = \frac{1250}{2} = 625 \gg r^4 = 5^4$

$\therefore r = 5$

$\therefore a_2 = a_1 r = (2)(5) = 10$

$a_3 = a_2 r = (10)(5) = 50$

$a_4 = a_3 r = (50)(5) = 250$

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 5 , a_{10} = 2560$ ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين ٥ ، ٢٥٦٠

الحل :

$$a_1 = 5 \ , a_{10} = 2560$$

والمطلوب ايجاد $a_2, a_3 \ , a_4$

$a_{10} = a_1 r^9 \ggg 2560 = (5)r^9 \ggg r^9 = \frac{2560}{5} = 512 \gg r^9 = 2^9$

$\therefore r = 2$

$\therefore a_2 = a_1 r = (5)(2) = 10$

$a_3 = a_2 r = (10)(2) = 20$

$a_4 = a_3 r = (20)(2) = 40$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (٢) وحدها الأخير (٤٨٦) واساسها (٣) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 486 = (2)(3)^{n-1}$

$(3)^{n-1} = \frac{486}{2} = 243 \quad \gg \quad (3)^{n-1} = (3)^5$

$n - 1 = 5 \quad \gg \quad \therefore \ n = 6$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (٤) وحدها الأخير (٢٠٤٨) واساسها (٢) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 2048 = (4)(2)^{n-1}$$

$$(2)^{n-1} = \frac{2048}{4} = 512 \quad \gg \quad (2)^{n-1} = (2)^9$$

$$n - 1 = 9 \quad \gg \quad \therefore \quad n = 10$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (٣) وحدها الأخير (٣٠٠٠) واساسها (١٠) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 3000 = (3)(10)^{n-1}$$

$$(10)^{n-1} = \frac{3000}{3} = 1000 \quad \gg \quad (10)^{n-1} = (10)^3$$

$$n - 1 = 3 \quad \gg \quad \therefore \quad n = 4$$

جموع أول n حد من الحدود للمتتالية الهندسية:

مجموع أول n حد من المتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1 و أساسها r هو:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$\gg \quad S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1} \ldots (1)$$

بالضرب في r تصبح

$$r\,S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح (١) من (٢) تصبح :-

$$r\,S_n - S_n = (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n) - (a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1})$$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$$r\,S_n - S_n = a_1 r^n \;\; a_1 \quad \gg \quad S_n\,(r-1) = a_1\,(r^n - 1)$$

$\therefore$ مجموع أول n حد هو :-

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}}$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (٨) واساسها (٢) احسب مجموع أول خمسة حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 8 \ , \ \ r = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(r^5-1)}{r-1} = \frac{(8)(2^5-1)}{r-1} = 8(32-1)$$
$$= 248$$

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (١٠) واساسها (٥) احسب مجموع أول ثمانية حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 10 \ , \ \ r = 5$$

$$S_8 = \frac{a_1(r^8-1)}{r-1} = \frac{(10)(5^8-1)}{5-1} =$$
$$= 976560$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (١) واساسها $\left(\frac{1}{4}\right)$ والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7-1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{4^7}-7\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = \left(\frac{1}{16384}-1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = -\frac{16383}{16384} \times \frac{4}{-3}$$

$$S_7 = \frac{5461}{409}$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{10}(5)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (١) واساسها ٥ والمطلوب ايجاد مجموع أول عشر حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{1((5)^{10}-1)}{5-1} = 2441406$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{5}(2.(3)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (٢) واساسها ٣والمطلوب ايجاد مجموع أول خمس حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{2((3)^5-1)}{3-1} = 242$$

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{8}(10.(5)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (١٠) واساسها ٥والمطلوب ايجاد مجموع أول أربع حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_8 = \frac{10((5)^8-1)}{5-1} = 976560$$

تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة:

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة في نهاية المدة على شكل متتالية حسابية و تحسب بالقانون:

$$a_n = a_1 + (n)d$$

حيث أن:

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات = n

الفائدة السنوية على المبلغ= d

d = a_1 × نسبة الفائدة

مثال :-

أودع شخص مبلغ (١٠٠٠٠) ريال لمدة (٨) سنوات بفائدة بسيطة ٧.٥% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

n = 8

$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$

المبلغ في نهاية السنة الثانية = a_8

$a_8 = 10000 + (8)(750)$

= 10000 + 6000 = 16000 SAR

مثال :-

أودع شخص مبلغ ما لمدة (4.75) سنة بفائدة بسيطة ٢% ربع سنوي فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ ٥٥٢٠ ريال أحسب أصل المبلغ .

الحل :-

$a_1 = ?$

n = 4.5

$d = \frac{8}{100} \times a_1 = 0.08\, a_1$

المبلغ في نهاية المدة = $a_{4.75}$

$a_{4.75} = a_1 + (4.75)(0.08\, a_1) = 5520$

$a_1(1+4.75\times 0.08) = 5520$

$a_1(1.38) = 5520$

$a_1 = \frac{5520}{1.38} = 4000$ SAR

مثال :-

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ ريال لمدة ما بفائدة بسيطة ١٠% سنويا ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ ١٢٥٠ ريال أحسب مدة الاستثمار .

الحل :-

$a_1 = 1000$

$n = ?$

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

المبلغ في نهاية المدة $= a_?$

$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$

$1250 - 1000 = n.100$

$250 = n.100$

$$n = \frac{250}{100} = 2.5 \text{ سنة}$$

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحب بالقانون:

$a_n = a_1 r^n$

حيث جملة المبلغ في نهاية المدة = a_n

المبلغ في بداية المدة = a_1

نسبة الفائدة +1= r

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ٨٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٩% لمدة خمس سنوات ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 8000$

$r = 1 + 0.09 = 1.09$

$n = 5$

$$a_5 = 8000\,(1.09)^5 = 12308.9 \text{ SAR}$$

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٥% نصف سنوي لمدة ٣.٥ سنة ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

$r = 1+0.10 = 1.10$

$n = 3.5$

$$a_{3.5} = 10000\,(1.10)^{3.5} = 13959.65 \text{ SAR}$$

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة ٤% نصف سنوي لمدة ٦ سنوات ، فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة ١٥٨٦٨.٧٤٣٢٢ ريال أوجد أصل المبلغ .

الحل :-

$a_1 = ?$

$r = 1+0.08 = 1.08$

$n = 6$

$$a_{3.5} = a_1\,(1.08)^6$$

$$15868.74322 = a_1\,(1.08)^6$$

$$a_1 = \frac{15868.74322}{1.08^6} = 10000 \text{ SAR}$$

المحاضرة (6)

المصفوفات و المحددات

1. **المصفوفات:**

المصفوفة هي عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف و أعمدة و تسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة ، A,B,C,...... , و من الأمثلة على المصفوفة.

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 & 3 \\ -5 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة:

رتبة المصفوفة تساوي عدد الصفوف في X عدد الأعمدة.

مثال:

رتبة المصفوفة A هي 3x4 و تكتب على الصورة A_{3x4}

رتبة المصفوفة B هي 4x2 و تكتب على الصورة B_{4x2}

رتبة العنصر:

رتبة العنصر a هي موقعه في الصف و العمود

أي العنصر في الصف i و العمود j = a_{ij}

مثال:

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{21}, a_{32}, a_{24}

الحل:

العنصر a_{21}: العنصر في الصف الثاني العمود الأول $a_{21} = -5$

العنصر a_{32}: العنصر في الصف الثالث العمود الثاني $a_{32} = -6$

العنصر a_{24}: العنصر في الصف الثاني العمود الرابع $a_{24} = 7$

<u>أنواع المصفوفات :</u>

1. **المصفوفة الصفرية:** هي المجموعة التي تكون جميع عناصرها أصفار.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

مصفوفة صفرية رتبتها 2×3

2. **المصفوفة المربعة:** هي المصفوفة التي تكون فيها عدد الصفوف = عدد الأعمدة.

<u>مثال :</u>

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 (أي من الرتبة الثانية)

المصفوفة Bمصفوفة مربعة من الرتبة 3×3(أي من الرتبة الثالثة)

3. **المصفوفة القطرية:** هي المصفوفة المربعة التي يكون جميع العناصر فيها غير القطر الرئيسي أصفار.

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4. المصفوفة المحايدة: هي المصفوفة القطرية التي تكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد و يرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها).

مثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. المصفوفة المثلثية: و تقسم إلى قسمين:

أ. **المصفوفة المثلثية العليا:** هي المصفوفة التي يكن فيها جميع العناصر **تحت** القطر الرئيسي أصفار.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال:

ب. **المصفوفة المثلثية السفلى:** هي المصفوفة التي يكن فيها جميع العناصر **فوق** القطر الرئيسي أصفار.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال:

<u>المصفوفة المبدلة:</u>

منقول المصفوفة أو مبدل المصفوفة هي تبديل الصفوف بالأعمدة و الأعمدة بالصفوف
و يرمز لها بالرمز A^T

<u>مثال :-</u>

أوجد منقول كل من المصفوفات التالية :

$$1\text{- } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2.3} \qquad 2 - B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3.3}$$

الحل

$$1\text{- } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2 - B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

<u>العمليات على المصفوفة:</u>

1. الجمع و الطرح: و تقسم إلى قسمين:

تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت $A = A^T$

مثال :-

اي من المصفوفات التالية متماثلة :

$$1\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل

$$1\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \ , \quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \ , \ A \neq A^T$$ ∴ A ليست متماثلة

$$2\text{-}\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} ,\ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} \ , \ B = B^T$$ ∴B متماثلة

١- الجمع والطرح :

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة .

مثال :

أوجد ناتج ما يلي :-

$$1\text{-}A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2\text{-}A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

الحل

$$1\text{-}A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$2\text{-}A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

٢- الضرب بعدد ثابت :-

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد .

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي :-

1) 3A
2) 2B
3) 3A – 2B

الحل :-

1) $3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$

2) $2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

3) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$

٣- ضرب المصفوفات :-

عند ضرب مصفوفتين يجب أن تكون عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية وعند الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر a_{ij} في المصفوفة الناتجة .

و يتم الضرب : صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية)

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4,3} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3,2}$$

احسب :-

1) AB

2) BA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4,3} \quad , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3,2}$$

الحل :-

1)AB =

$$\begin{bmatrix} (1\times2+4\times3\pm1\times-1) & (1\times0+4\times1\pm1\times4) \\ (5\times2+6\times3+2\times-1) & (5\times0+6\times1+2\times4) \\ (2\times2+1\times3+7\times-1) & (2\times0+1\times1+7\times4) \\ (3\times2+0\times3+4\times-1) & (3\times0+0\times1+4\times4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 7 & 16 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

2) BA

لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة الأولى لا تساوي عدد صفوف الثانية

ملاحظة :-

١- اذا كانت A_{mn} وكانت B_{nk} فإن $(AB)_{mk}$.

مثال :-

اذا كانت $A_{3\times5}$، $B_{5\times6}$ فأوجد رتبة AB.

الحل :-

$$A_{mn} \quad \times \quad B_{nk} \;=\; AB_{mk}$$
$$A_{3\times5} \;\times B_{5\times6} = AB_{3\times6}$$

و نستنتج من هذا المثال أن :-

$$AB \;\neq\; BA$$

مثال :-

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2

الحل :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (2\times2+4\times6) & (2\times4+4\times5) \\ (6\times2+5\times6) & (6\times4+5\times5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}$$

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت $C = AB \ , \ D = BA$

فأوجد ما يلي :-

$$C_{12} , C_{33} , D_{21} , D_{13}$$

الحل :-

١) حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة B $= C_{12}$

$$\therefore C_{12} = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 5 = 3 + 8 + 25 = 36$$

2) $C_{33} = 6 \times -1 + 4 \times 6 + 7 \times 0 = -6 + 24 + 0 = 18$

3) $D_{21} = 4 \times 3 + 2 \times 2 + 6 \times 6 = 12 + 4 + 36 = 52$

4) $D_{13} = 1 \times 5 + 1 \times 0 + -1 \times 7 = = 5 + 0 - 7 = -2$

عمليات الصف البسيط:

هي مجموعة من العمليات تقام على صفوف وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هي :-

١- ضرب صف بعدد ثابت .

٢- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر .

٣- تبديل صف مكان صف .

مثال :-

في المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب .

١- أضرب الصف الثاني بالعدد ٢ .

٢- اضرب الصف الاول بالعدد (-١) واجمعه الى الصف الثالث .

٣- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث .

الحل :-

$$1)\ 2r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2)\ -1r_1 + r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3)\ r_2 \leftrightarrow r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة):

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة و سوف نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .

خطوات إيجاد معكوس المصفوفة :-

تأخذ المصفوفة الشكل التالي :- $\begin{bmatrix} \text{العنصر الرابع} & \text{العنصر الأول} \\ \text{العنصر الثالث} & \text{العنصر الثاني} \end{bmatrix}$

يتم وضع مصفوفة الوحدة بجانب المصفوفة الأصلية كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} \text{العنصر الأول} & \text{العنصر الرابع} & 1 & 0 \\ \text{العنصر الثاني} & \text{العنصر الثالث} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الهدف هو تحويل العناصر الأربعة إلى مصفوفة الوحدة .

ثم يتم ضرب الصف الأول في مقلوب العنصر الأول أي يتم ضرب في $\frac{1}{\text{العنصر الأول}}$ وبذلك نكون قد حولنا العنصر الأول إلى واحد .

ثم يتم ضرب الصف الأول الجديد في سالب العنصر الثاني و جمعة على الصف الثاني وبذلك نكون قد حولنا العنصر الثاني إلى صفر.

ثم يتم ضرب الصف الثاني في مقلوب العنصر الثالث أي يتم الضرب في $\frac{1}{\text{العنصر الثالث}}$ وبذلك نكون قد حولنا العنصر الثالث إلى واحد .

ثم يتم ضرب الصف الثاني الجديد في سالب العنصر الرابع و جمعة على الصف الأول وبذلك نكون قد حولنا العنصر الرابع إلى صفر.

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة و سوف نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل :-

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \frac{1}{3}r_1 \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\to -6r_1 + r_2 \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to -\frac{1}{3}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\to -\frac{4}{3}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

للتحقق من الحل : $AA^{-1} = I$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{9} + \frac{8}{3} & \frac{12}{9} - \frac{4}{3} \\ -\frac{30}{9} + \frac{10}{3} & \frac{24}{9} + \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{15}{9} + \frac{24}{9} & \frac{12}{9} - \frac{12}{9} \\ -\frac{30}{9} + \frac{30}{9} & \frac{24}{9} + \frac{-15}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

<u>مثال :-</u>

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل :-

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1} .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -3r_1 + r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{2}{9}r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}r_2 + r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{12}{18} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \therefore\ A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{18} & \frac{-1}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :-

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1} .

المحاضرة (7)

تابع المصفوفات والمحددات

Matrices and Determinants

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

اذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية :-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

نعرف المصفوفات التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

حيث تسمى A مصفوفة المعاملات X مصفوفة المتغيرات ، B مصفوفة الثوابت ، وبالتالي يمكن التعبير عن نظام المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتي :-

$$AX = B$$

ولحل هذا النظام باستخدام عمليات الصف البسيط نستخدم الخطوات التالية :

١- نضع المصفوفة $[A|B]$.

٢- نطبق عليها عمليات الصف البسيط .

٣- ينتج $[I|C]$ حيث C تمثل مصفوفة الحل و تكون X = C .

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط .

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - y = 2$$

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \frac{1}{3}r_1 \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to -4r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \end{bmatrix} \to -\frac{3}{11}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x=1 , y=2

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط.

$$5x + 2y = 23$$
$$6x + 10y = 58$$

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 23 \\ 58 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 23 \\ 6 & 10 & 58 \end{bmatrix} \to \frac{1}{5}r_1 \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 6 & 10 & 58 \end{bmatrix}$$

$$\to -6r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & \frac{38}{5} & \frac{152}{5} \end{bmatrix} \to \frac{5}{38}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\to -\frac{2}{5}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

x=3 , y=4

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط .

$$-5\,x + \frac{1}{3}\,y = -18$$
$$\frac{1}{2}\,x + 2y = 14$$

الحل :-

لابد من التخلص من الكسور أولاً عن طريق ضرب المعادلة كلها في مقام الكسر و من ثم تضرب المعادلة الاولى في ٣ و الثانية في ٢ و تصبح على الشكل :-

$$-15\,x + y = -54$$
$$x + 4y = 28$$

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} -54 \\ 28 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -54 \\ 1 & 4 & 28 \end{bmatrix} \to -\frac{1}{15}r_1 \to \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 1 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\to -1r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 0 & \frac{61}{15} & \frac{474}{15} \end{bmatrix} \to \frac{15}{61}r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \frac{1}{15}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

x=4 , y=6

التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر 60 ورقة) و يباع بسعر 2 ريال و يحتاج إلى 3 ساعات عمل في قسم القص و 2 ساعة عمل في قسم التجميع ، و النوع الثاني (دفتر 120 ورقة) يباع بسعر 3 ريال و يحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص و 4 ساعات عمل في قسم التجميع ، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي 35 ساعة ، و 50 ساعة في قسم التجميع ، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن

.

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتج / اقسام التشغيل	قسم القص	قسم التجميع	ثمن البيع
دفتر 60 ورقة (x)	3	2	2
دفتر 120 ورقة (y)	2	4	3
الطاقة المتاحة لكل قسم	35	50	

2- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع) :- $p = 2x + 3y$

ب- القيود :-

$$3x + 2y = 35$$
$$2x + 4y = 50$$

تابع الحل :-

مصفوفة المعاملات $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مصفوفة المتغيرات $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

مصفوفة الثوابت $B = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 35 \\ 2 & 4 & 50 \end{bmatrix} \to \tfrac{1}{3}r_1 \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 2 & 4 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\to -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{80}{3} \end{bmatrix} \to \tfrac{3}{8}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\to -\tfrac{2}{3}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$x=5$, $y=10$

ربح النموذج :-

$p = 2x + 3y = 2 \times 5 + 3 \times 10 = 40\ SAR$

مثال :-

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات (x , y) و تستخدم نوعين من المواد الخام الخشب و الحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يستخدم 8 م من الخشب و 2 كجم من الحديد و النوع الثاني من المنتجات يستدم 10 م من الخشب و 4 كجم من الحديد ، و يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول بسعر 100 ريال و النوع الثاني بسعر 150 ريال ، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي 280 م من الخشب و 100 كجم من الحديد ، المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن .

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتجات / المواد الخام	الخشب	الحديد	الربح
x	8	2	100
y	10	4	150
الطاقة المتاحة	280	100	

2- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- الهدف (الربح) :- $p = 100x + 150y$

ب- القيود :-

$$8x + 10y = 280$$
$$2x + 4y = 100$$

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 280 \\ 100 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 280 \\ 2 & 4 & 100 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{8}r_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 2 & 4 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{240}{8} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{8}{12}r_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{10}{8}r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

x=10 , y=20

ربح النموذج :-

$p = 100x + 150y = 100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\ SAR$

<u>التطبيقات التجارية للمصفوفات :-</u>

<u>مثال :-</u>

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب ، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل في

مرحلة التصنيع و 3 ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي 2400 ساعة لمرحلة التصنيع ، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

الحل :-

يمكن تلخيص بيانات المشكلة في الجدول التالي :-

النوع / مرحلة الانتاج	التصنيع	التشطيب
10(x) قدم	4	2
12 قدم (y)	5	3
الساعات المتاحة	2400	1300

وبفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة ١٠قدم = x وحدة

وبفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة ١٢قدم = y وحدة

ومن ثم يمكن صياغة المشكلة الرياضية السابقة كنظام للمعادلات كما يلي :-

$$4x + 5y = 2400$$

$$2x + 3y = 1300$$

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2400 \\ 2 & 3 & 1300 \end{bmatrix} \to \frac{1}{4}r_1 \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 2 & 3 & 1300 \end{bmatrix}$$

$$\to -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & \frac{1}{2} & 100 \end{bmatrix} \to 2r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\to -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix}$$

x=350 , y=200

مثال :-

الجدول التالي يوضح تلخيص لإحدى مشاكل التي تواجه إدارة الانتاج بإحدى الشركات :-

المنتجات / المواد الخام	النحاس	الحديد	الربح
x	4	6	200
y	5	2	300
الطاقة المتاحة	230	180	

المطلوب :-

باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن .

الحل :-

1- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- **الهدف (الربح) :-** $p = 200x + 300y$

ب- **القيود :-**

$$4x + 5y = 230$$

$$6x + 2y = 180$$

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 230 \\ 180 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 230 \\ 6 & 2 & 180 \end{bmatrix} \to \frac{1}{4}r_1 \to \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{230}{4} \\ 6 & 2 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\to -6r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{230}{4} \\ 0 & -\frac{22}{4} & -165 \end{bmatrix} \to -\frac{4}{22}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{230}{4} \\ 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\to -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 30 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$x=20$, $y=30$

ربح النموذج :-

$p = 200x + 300y$

$P = 200 * 20 + 300 * 30 = 4000+9000 = 13000$ SAR

مثال :-

تنتج شركة صناعية نوعين من المنتجات . وكل نوع له 3 أحجام صغير، متوسط، كبير. والجدول التالي يبين الإنتاج (بالآلاف) في المصنع الأول.

الحجم / النوع	صغير	متوسط	كبير
الأول	20	28	30
الثاني	16	22	20

كما يبين الجدول التالي مستوى الإنتاج (بالآلاف) في المصنع الثاني.

الحجم / النوع	صغير	متوسط	كبير
الأول	30	40	36
الثاني	24	20	28

والمطلوب :

(1) أكتب المصفوفة التي تعبر عن مستوى الإنتاج الكلى في كلا المصنعين.

(2) إذا قررت الشركة أن تفتتح مصنعاً ثالثاً بطاقة إنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثاني. أكتب المصفوفة التي تعبر عن مستوى الإنتاج في المصنع الثالث.

(3) حدد المصفوفة التي تعبر عن حجم الإنتاج الكلى في الشركة.

الحل :

(1)مستوى الإنتاج في المصنعين معاً يساوى إنتاج المصنع الأول مضافاً إليه إنتاج المصنع الثاني.

$$\begin{bmatrix} 66 & 68 & 50 \\ 48 & 42 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

أي ينتج المصنعين معاً : 50 وحدة حجم صغير من النوع الأول.

68 وحدة حجم متوسط من النوع الأول.

66 وحدة حجم كبير من النوع الأول.

40 وحدة حجم صغير من النوع الثاني.

42 وحدة حجم متوسط من النوع الثاني.

48 وحدة حجم كبير من النوع الثاني.

(2) حيث أن المصنع الثالث طاقته الإنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثاني فإنه لإيجاد طاقة المصنع الثالث الإنتاجية نضرب مستوى إنتاج المصنع الثاني في (1.20).

الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث $= 1.20 \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 43.2 & 48 & 36 \\ 33.6 & 24 & 28.8 \end{bmatrix}$$

مثال :-

- تقوم شركة أثاثكو بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب ، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات ، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق 10$ ،ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر ، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع ، بينما يبلغ ثمن الطاولة 40$ ، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر ، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين ، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر ، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع. وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد .

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتجات / المواد	النشر	التجميع	ثمن البيع
الكراسي x	1	1	10
الطاولات y	2	5	40
الطاقة القصوى	100	150	

2- صياغة المشكلة على شكل معادلات :-

أ- دالة الربح :-   p = 10 x + 40 y

ب- القيود :-

x + 2 y = 100

x + 5 y = 150

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 1 & 5 & 150 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-1r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 0 & 3 & 50 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{50}{3} \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{-2r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{200}{3} \\ 0 & 1 & \frac{50}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{200}{3} \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix}$ $x = \frac{200}{3}$, $y = \frac{50}{3}$

ربح النموذج :-

$p = 10\,x + 40\,y = 10 \times \frac{200}{\;} + 40 \times \frac{50}{\;} = \frac{4000}{\;}\ SAR$

المحاضرة (8)

تابع المصفوفات والمحددات

Matrices and Determinants

2- المحددات Determinants :-

محدد المصفوفة هي القيمة الرقمية للمصفوفة ويرمز لها بأحد الرموز التالية :-

$$Det\ A\ , \Delta A\ , |A|$$

١- محدد المصفوفة من الرتبة الثانية 2×2 :

المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتكون محددتها هي :-

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال :-

أوجد قيمة المحددات التالية :-

$$1\text{-}\ A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$2\text{-}\ A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$3\text{-}\ A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$1\text{-}\ A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

$$\Delta A = 5 \times 4 - 2 \times 3 = 20 - 6 = 14$$

$2\text{-}\ A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$

$$\Delta A = 1 \times 2 - 3 \times 5 = 2 - 15 = -13$$

$3\text{-}\ A = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix}$

$$\Delta A = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 18 - 18 = 0$$

ملاحظة : اذا كانت $\Delta A = 0$ فإن A تسمى مصفوفة منفردة Singular matrix

٢- محدد المصفوفة من الرتبة الثالثة :-

المصفوفة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد محدد المصفوفةA نستخدم واحدة من الطريقتين :

أ- طريقة الأسهم (سايروس) :-

في هذه الطريقة نكرر العمود الأول و الثاني ، ثم نجد حاصل ضرب الأقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الأقطار المرافقة كالاتي :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}\quad A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

مثال :-

أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \\ -1 & 7 & 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

Det A = $(1 \times 4 \times 3 + 2 \times 6 \times -1 + 3 \times 5 \times 7) - (2 \times 5 \times 3 + 1 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times -1)$ = (12-12+105) – (30+42-12) = 105 – 60 = 45

<u>مثال :-</u>

أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

<u>الحل :-</u>

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

Det A = $(3 \times 8 \times 4 + 1 \times 9 \times 6 + 2 \times 7 \times 2) - (1 \times 7 \times 4 + 3 \times 9 \times 2 + 2 \times 8 \times 6)$ = (96+54+28) – (28+54-96) = 178 – 178 = 0

∴ A مصفوفة منفردة

٢- طريقة المحددات الصغرى :

نجد المحدد بالنسبة لأي صف أو عمود فإذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن محدد A بالنسبة للصف الأول هي :

$$\Delta A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ثم نجد محددات المصفوفات الثنائية .

ونستطيع ايجاد المحدد بالنسبة لأي صف أو أي عمود وتكون اشارات المصفوفة كالآتي :-

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \end{bmatrix}$$

مثال :-

أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\Delta A = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 3(10-21) - 0(-5-7) + 4(-3-2) = -57$$

مثال :-

أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\Delta A = 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - (5)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= 4(7-0) - 5(42-0) - 2(18-8) = -202$$

خواص المحددات :-

١- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر :-

مثال :-

أحسب قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل :-

حيث أن الصف الثاني أصفار فإن $\Delta A = 0$

٢- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين في المصفوفة فإن قيمة المحدد تساوي صفر :-

مثال :-

احسب قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل :-

حيث أن عناصر العمود الأول و الثالث متساوية فإن $\Delta A = 0$

٣-اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد تضرب في نفس العدد :-

مثال :-

اذا كانت قيمة المحدد التالي تساوي :-

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} , \qquad \Delta A = 5$$

فأوجد قيمة المحدد التالي :-

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل :-

نلاحظ أن المصفوفة B هي المصفوفة A مضروب الصف الثالث فيها بالعدد (3)

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times \Delta A$$

$$\therefore B = 3\,\Delta A = (3)(5) = 15$$

٤-اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة وكان k أي عدد حقيقي فإن :-
$Det(KA) = K^N\ Det(A)$

مثال :-

اذا كانت $\Delta(A_{2\times2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد (3A)

الحل :-

$$\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$$

٥- اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المحدد فإن قيمة المحدد تنعكس اشارتها :-

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \quad , \qquad \Delta A = -2$$

فأوجد قيمة المحدد

$$B = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :-

المصفوفة B هي ناتج تبديل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة A

$$\therefore\ \Delta B = -(-2) = 2$$

٦-اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الأعمدة مضاعف للآخر فإن قيمة المحدد تساوي صفر :-

مثال :-

أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل :-

لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\Delta A = 0$

$7 - \quad \Delta(AB) = (\Delta A)\,(\Delta B)$

مثال :

اذا كانت A ، B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت :-

$(\Delta A) = 2$, $(\Delta B) = 5$, فأوجد $\Delta(AB)$

الحل :-

$$\Delta(AB) = (\Delta A)\,(\Delta B) = (2) \times (5) = 10$$

$8 - \quad \Delta A = \Delta A^T$

مثال :

اذا كانت

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$\Delta A = 10 - 6 = 4$

$$A^T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$\rightarrow \quad \Delta A^T = 10 - 6 = 4$

$$\therefore \Delta A = \Delta A^T$$

٩- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر :-

مثال :-

أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\Delta A = (2)(1)(-3)(-4) = 24$$

١٠- محدد المصفوفة المحايدة = 1

أي $\mathrm{Det}(I_n) = 1$

مثال :-

أوجد قيمة محدد المصفوفة I_5

الحل :-

$$\Delta\, I_5\ 1$$

11- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر :-

مثال :

أوجد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\Delta A = (2)(3)(4) = 24$$

مثال :

أوجد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$$\Delta A = (1)(1)(3) = 3$$

المحاضرة (9)

تابع المصفوفات والمحددات

1. **استخدام المحددات في ايجاد قيمة معكوس المصفوفة**

:

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 أي :-

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

<u>فنجد معكوس المصفوفة بالخطوات التالية :</u>

١- نجد قيمة محدد المصفوفة det A .

٢- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

<u>مثال :-</u>

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :-

Det (A) = 8 – 3 = 5

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

<u>مثال :-</u>

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :-

Det (A) = 5 – 18 = -13

$$A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{-13} & \frac{3}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{5}{-13} \end{bmatrix}$$

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل :-

Det (A) = 12 – 12 = 0

∴ لا يوجد معكوس للمصفوفة .

ملاحظة ١ :

اذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس .

ملاحظة ٢ :

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة

أي اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

١- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 بحيث $(DetA \neq 0)$

أي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

<u>فنجد معكوس المصفوفة A باستخدام المحددات كالاتي :-</u>

١- نجد محدد المصفوفة (Det A) .

٢- نجد محدد المرافقات لكل عنصر من عناصر المصفوفة و نضعها في مصفوفة و نرمز لها بالرمز A^{ι} .

$$A^{\iota} = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} هي محدد المرافقات للعنصر a_{11} و تكون :-

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

٣- نجد $adjA = (A^{\iota})^{T}$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

٤- يكون معكوس المصفوفة هو :-

$$A^{-1} = \frac{1}{\quad} adi\ A$$

<u>مثال :-</u>

أوجد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>الحل :</u>

نجد في البداية محدد A

$$Det\ A = 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 5(9+0) - 2(12-0) + 6(-8-3)$$
$$= 5 \times 9 - 2 \times 12 + 6 \times -11 = -45$$

ثم نجد المحددات المرافقات للعناصر :

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ المصفوفة الاصلية

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = A^{\iota} = \begin{bmatrix} 9 & -18 & -18 \\ -12 & 9 & 24 \\ -11 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$ مصفوفة المرافقات

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix} \qquad \therefore A^{-1} = \frac{1}{-45}\begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{-45} & -\frac{12}{-45} & -\frac{11}{-45} \\ -\frac{18}{-45} & \frac{9}{-45} & \frac{12}{-45} \\ -\frac{18}{-45} & \frac{24}{-45} & \frac{7}{-45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{11}{45} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{15} \\ \frac{2}{5} & -\frac{8}{15} & -\frac{7}{45} \end{bmatrix}$$

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$Det\ A = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 \times -2 + 0 = 6$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$ مصفوفة المرافقات , $$adj\ A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2. استخدام المحددات في حل أنظمة المعادلات الخطية :-

أ- حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة :-

مثال :-

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة ، ثم تأكد من الحل :-

$2x + 3y = 1$

$3x - y = 7$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$ مصفوفة المعاملات

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$ مصفوفة الثوابت

نجد أولاً معكوس A حيث

$$Det\ A = -2 - 9 = -11$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو -:

$$X = A^{-1}\, B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{11} + \frac{2}{11} \\ \frac{3}{11} - \frac{14}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{11} \\ -\frac{11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x = 2 \;,\; y = -1$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى :

2 x + 3 y = 1

2(2) + 3(-1) =1 (الحل صحيح)

أ- <u>حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة :-</u>

<u>مثال :-</u>

حل النظام التالي من المعدلات باستخدام معكوس المصفوفة ، ثم تأكد من الحل :-

5 x + 7 y = 19

6 x – 2 y = 2

الحل

$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$B = \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

نجد أولاً معكوس A حيث

$$Det\ A = -10 - 42 = -52$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-52}\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{52} & \frac{6}{52} \\ \frac{7}{52} & -\frac{5}{52} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو -:

$$X = A^{-1}\, B$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{52} & \frac{6}{52} \\ \frac{7}{52} & -\frac{5}{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{52} \times 19 + \frac{6}{52} \times 2 \\ \frac{7}{52} \times 19 + \frac{-5}{52} \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{11} \\ -\frac{11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x = 2 \;,\; y = -1$$

للتأكد نعوض عن قيم x و y في المعادلة الأولى :

2 x + 3 y = 1

2(2) + 3(-1) =1 (الحل صحيح)

مثال (١) :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة :-

$$x_1 + x_2 - x_3\ 1$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 = 5$$
$$x_1 \ - 4\,x_3 = -3$$

الحل :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

معكوس A :-

$$Det\ A = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times -8 - 3 \times -4 + 1 \times 2 = 6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$ المصفوفة الاصلية,

مصفوفة المرافقات
$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = A^t$$

$$A^t = \begin{bmatrix} -8 & 12 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$ مصفوفة المرافقات , $$adj\ A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{12}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{3}{6} \\ -\frac{2}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{} & \frac{1}{} & -\frac{1}{} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1} \,.\, B = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} \times 1 + & \frac{2}{3} \times 5 + & \frac{1}{3} \times -3 \\ 2 \times 1 + & -\frac{1}{2} \times 5 + & -\frac{1}{2} \times -3 \\ -\frac{1 \times 1 +}{3} & \frac{1 \times 5 +}{6} & -\frac{1 \times -3}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} + \frac{10}{3} - 1 \\ 2 - \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{3}{6} \end{bmatrix} \quad \therefore X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

مثال (٢) :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة :-

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13$$
$$x_1 + 5\, x_2 - x_3 = 8$$
$$4x_1 + 4\, x_3 = 16$$

الحل :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \;,\; B = \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

معكوس A :-

$$Det\ A = 2\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times 20 - 1 \times 4 + 4 \times -16 = -28$$

المصفوفة الاصلية, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^c = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$ مصفوفة المرافقات

$$A^c = \begin{bmatrix} 20 & -8 & -20 \\ -4 & -4 & 4 \\ -16 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$ مصفوفة المرافقات , $$adj\ A = \begin{bmatrix} 20 & -4 & -16 \\ -8 & -4 & 5 \\ -20 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-28}\begin{bmatrix} 20 & -4 & -16 \\ -8 & -4 & 5 \\ -20 & 4 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{28} & \frac{4}{28} & \frac{16}{28} \\ \frac{8}{28} & \frac{4}{28} & -\frac{5}{28} \\ \frac{20}{28} & -\frac{4}{28} & -\frac{9}{28} \end{bmatrix} =$$

$$X = A^{-1} . B = \begin{bmatrix} -\frac{20}{28} & \frac{4}{28} & \frac{16}{28} \\ \frac{8}{28} & \frac{4}{28} & -\frac{5}{28} \\ \frac{20}{28} & -\frac{4}{28} & -\frac{9}{28} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{20}{28} \times 13 + \frac{4}{28} \times 8 + \frac{16}{28} \times 16 \\ \frac{8}{28} \times 13 + \frac{4}{28} \times 8 + -\frac{5}{28} \times 16 \\ \frac{20}{28} \times 13 + -\frac{4}{28} \times 8 + -\frac{9}{28} \times 16 \end{bmatrix} \therefore X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ب- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامر) :-

مثال :-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات :-

$x + y = 1$

$2x + 3y = 5$

الحل :-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{2}{1} = -2 \ , \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظة : اذا كانت محدد المصفوفة Δ تساوي صفر فإن النظام لا يوجد له حل .

مثال :-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات :-

$2x + y + 3z = 3$

$x + 2y + 2z = 5$

$5x + 3y + 6z = 7$

الحل :-

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (12 - 6) - 1 \times (6 - 9) + 5(2 - 6) = 12 + 3 - 20 = -5$$

$$2)\ \Delta_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (12-6) - 5 \times (6-9) + 7(2-6) = 18 + 15 - 28 = 5$$

$$3)\ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (30-14) - 1 \times (18-21) + 5(6-15) = 32 + 3 - 45 = -10$$

$$3)\ \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (14 - 15) - 1 \times (7 - 9) + 5(5 - 6) = -2 + 2 - 5 = -5$$

$$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$\therefore y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$\therefore z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1$$

مثال :-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات :-

$x + 2y + 6z = 7$

$3x + y + 3z = 5$

$4y + 12z = 10$

الحل :-

$$1)\ \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (12 - 12) - 3 \times (24 - 24) + 0(6 - 6) = 0 + 0 + 0 = 0$$

بما أن $\Delta A = 0$ فإن النظام لا يوجد له حل

المحاضرة (10)

النهايات و الاتصال

1. النهايات:

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a.

مثال :-

إذا كانت f(x) = 2x +1 فإن $\lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

١- إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت f(x) = m x + c فإن $\lim\limits_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 5} 30$$

$$\lim_{x\to 2}(1-2x)$$

$$\lim_{x\to 2}(3x+4)$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$$

الحل

$$\lim_{x\to 5} 30 = 30$$

$$\lim_{x\to 2}(1-2x) = 1-(2\times -2) = 5$$

$$\lim_{x\to 2}(3x+4) = 3\times 2+4 = 6+4 = 10$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5) = 8\times 1/2-5 = 4-5 = -1$$

مثال :

إذا كانت $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim\limits_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim\limits_{x\to 5}[h(x) - f(x)]$

$$= \lim_{x\to 2} h(x) - \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x\to 2}[g(x)\times h(x)]$

$= \lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to 2} 8\, f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = [\lim_{x\to 1} 3x-1]^6$$

$$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)$

$$= 3\times 2^3 + 5\times 2^2 - 7$$

$$= 3\times 8 + 5\times 4 - 7 = 37$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $\lim_{x\to 3} \frac{3x^2+7}{x-5}$

$$= \frac{3\times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$3\text{- } \lim_{x\to 2} \frac{2x-1}{5x+3}$$

$$= \frac{2\times 2-1}{5\times 2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$$

$$4\text{- } \lim_{x\to 2} e^{x}$$

$$= e^{2}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

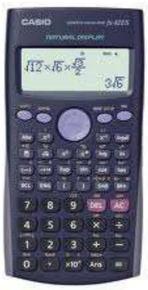
$$5\text{- } \lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1}$$

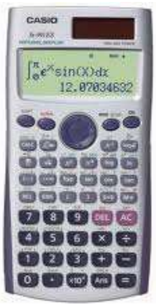
$$= e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^{4}$$

$$6\text{- } \lim_{x\to 2} log(3x^2+5) = \log(3\times 2^2+5)$$

$$= \log(3\times 4+5)$$

$$= \log(12+5) = \log(17)$$





أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$7\text{- } \lim_{x\to 3} ln(2x-5) = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln(1) = 0$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $\lim_{x\to 1}\left(3x^3+4x-2\right)^3$ = ((3×1^3) + 4 × 1 -2)^3

= (3+4-2)^3 = (5)^3 = 125

9- $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ =

2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x)=\begin{cases}9x^2 & , \quad x<5\\ 15x-2 & , \quad x>5\end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3}f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت
$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , x<1\\ 7x-2 & , x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

2- $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ **(و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)**

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\tfrac{1}{2})^2 + 5 = 3\times \tfrac{1}{4} + 5 = \tfrac{3}{4} + 5 = \tfrac{3}{4} + \tfrac{20}{4} = \tfrac{23}{4}$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ **(النهاية من اليمين)**

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) =$ **(النهاية من اليسار)**

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار **لا**

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

$\lim_{x\to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 5} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x \to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x \to 5^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$

$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim_{x \to 5^-} f(x)$$

$\lim_{x \to 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

2. الاتصال:

تعريف :

يقال للدالة *f(x)* متصلة في النقطة *a* إذا تحققت الشروط التالية :-

1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى *R*.

2- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \quad 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x \to 5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim_{x \to 5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x \to 10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$\lim_{x \to 10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12× 10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \quad x \le 8 \\ 1160 + 15x & , \quad x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$f(8) = 20\,x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$

$\lim_{x\to 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$

$\lim_{x\to 8^-} f(x) = 20\,x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

<u>تمارين الواجب:</u>

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 0} 5$$

$$\lim_{x\to 5}(10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x\to 12}(3x + 6)$$

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x - 2)$$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 20$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -15$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 18.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x\to 5}[h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times f(x)]$

4- $\lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

1- $\lim_{x\to 1}[5x-2]^2$

2- $\lim_{x\to 2}[10\ -2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2\mathrm{x}^3-2\mathrm{x}^2-50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1-e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4+15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2-5x+10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}30x^2+15 & , \quad x<2\\ 5x-2 & , \quad x>2\end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3}\mathrm{f(x)}$

2- $\lim_{x\to 1}\mathrm{f(x)}$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases}2x & , \quad 0<x<1\\ 3+x^2 & , \quad x\geq 1\end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

المحاضرة (11)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

1. الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 6x & , \quad 0<x<5 \\ 25+2x & , \quad x\geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 12x^2 & , \quad 0<x<10 \\ 20+4x & , \quad x\geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$\lim\limits_{x\to 10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$\lim\limits_{x\to 10^-} f(x)$ = 12x² = 12× 10² = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 20x^2 & , \quad x\leq 8 \\ 1160+15x & , \quad x>8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

f(8) = 20 x² = 20 × (8)² = 20 × 64 = 1280

$\lim\limits_{x\to 8^+} f(x)$ = 1160 +15x = 1160 +15 × 8 = 1280

$\lim\limits_{x\to 8^-} f(x)$ = 20 x² = 20 × (8)² = 20 × 64 = 1280

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب:

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 0} 5$$

$$\lim_{x\to 5}(10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x\to 12}(3x + 6)$$

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x - 2)$$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $\lim_{x\to 5} f(x) = 20$ **و** $\lim_{x\to 5} g(x) = -15$ **و** $\lim_{x\to 5} h(x) = 18.5$ **، فأوجد ما يلي :-**

1- $\lim_{x\to 5}[h(x) + f(x)]$

2- $\lim_{x\to 5}[h(x) - g(x)]$

3- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times f(x)]$

4- $\lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

1- $\lim_{x\to 1}[5x - 2]^2$

2- $\lim_{x\to 2}[10 - 2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x^2 - 50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1 - e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4 + 15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2 - 5x + 10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x \to 3} f(x)$

2- $\lim_{x \to 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

2. التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل:

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =????

القاعدة الأولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = 15$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$ $\quad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$ $\quad \frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$ $\quad \frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

$$\text{مشتقة حاصل قسمة دالتين } \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x-3x-6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

1 – $y = (15x2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

2 – $y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$ (المشتقة الاولى)

$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$ (المشتقة الثانية)

$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$ (المشتقة الثالثة)

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1. المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

1. القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)
2. القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)
3. القيمة المطلقة للمرونة = 1 (طلب متكافئ المرونة)
4. القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب مرن)
5. القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن.

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي ($D= 200 - 10x$) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D' = -10$)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(-10) \times \frac{20}{200} = -1$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي ($D= 15x-20$) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D' = 15$)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي ($D = 1.5x + 20$) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

المحاضرة (12)

تابع التفاضل

وتطبيقاته التجارية

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار :-

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.6 - 0.04\,x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 -.04 = 0.56$$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8\,x - 0.15x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.8 - 0.3\,x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

= 1 – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.5 = 0.5

3- النهايات العظمى و الصغرى

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

3- النهايات العظمى و الصغرى :-

<u>خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :</u>

1. **يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .**
2. **يتم إيجاد المشتقة الثانية .**
3. **تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .**

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = -0.8$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 500 - 0.2x + 0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.2 + 0.2x$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = 0.2$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

4- الربح الحدي

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6-الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$R' = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10 = 3990$$ ريال

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

سعر بيع الوحدة (Selling price) $= 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R = ($دالة سعر بيع الوحدة$) \times x$

$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ ريال

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

سعر بيع الوحدة (Selling price) $= 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R = ($دالة سعر بيع الوحدة$) \times \mathbf{x}$

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times \mathbf{x} = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 = 4205$ ريال

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = 10x^2 - 12x + 15$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$C^{/} = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (5) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$

$= 3\times(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$

$= 3\times(5\times400 - 60 + 15)^2\times(200-3)$

$= 3\times(1955)\times(197) = 1155405$ ريال

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 15x^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (7):-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 + 3x + 20$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P' = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

$\mathbf{R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15}$

$\mathbf{C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20}$

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$R' = 120x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R' = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

الحل

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$C^/ = 39x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C^/ = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

الحل

3- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$$

$$P^/ = 120x^3 - 39x^2 + 7x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P^/ = 120\times12^3 - 39\times12^2 + 7\times12 - 9 = 201819$ ريال

تمرين شامل (2)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

(Selling price سعر بيع الوحدة) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

<u>المطلوب :-</u>

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × **x**

$R = (3x^2 + 25x - 18) \times \mathbf{x}$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$\mathbf{R = 3x^3 + 25x^2 - 18x}$

$\mathbf{C = 10x^2 + 2x - 5}$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P' = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180$ ريال

تمارين واجب :-

1- إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 0.3x - 0.01x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

2- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = 3x^2 + 5x + 100$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

3- إذا علمت أن :-

سعر بيع الوحدة Selling price ($) = 8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$ (

$C = 4x^2 + 3x - 10$

<u>المطلوب :-</u>

1- دالة الايراد الكلي .

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 15 وحدة .

4- دالة الربح الكلي .

5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 12 وحدات .

<u>المحاضرة (13)</u>

التكامل

وتطبيقاته التجارية

التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،

حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز $\int$ و هو رمز التكامل

و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

1- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \ .dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k \ .dx = k\,x + c$$

$$\int \ .dx = x + c$$

مثال :-

$$1-\ \int x^3 \ .dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

2- $\int x^5 \, .dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

3- $\int 6 \, .dx = 6x + c$

4- $\int 3x^4 \, .dx = \frac{3}{5} x^5 + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \, .dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3 \, .dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4}x^4 - \frac{30}{3}x^3 + \frac{20}{2}x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

2- تكامل e^x :-

$$\int e^x . dx = e^x + c$$

3- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} . dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

<u>مثال :-</u>

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9x^2 - 10x + 15 \; .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$$y = \frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$$

$$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15 \times 4 + c$$

$1 = 3\times64 - 5 \times 16 + 60 + c$

$1 = 172 + c$

$c = -171$

<u>مثال :-</u>

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2}\, x^3 - \frac{1}{4} x^2 - 7 \; .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2,3)؟

الحل

$$y = \frac{1}{2\times4}\, x^4 - \frac{1}{4\times3} x^3 - 7x + c$$

$$y = \frac{1}{8}\, x^4 - \frac{1}{12} x^3 - 7x + c$$

حيث أن قيمة x = 2 و قيمة y = 3 فإن :-

$$3 = \frac{1}{8}\, (2)^4 - \frac{1}{12} (2)^3 - 7x2 + c$$

$$3 = \frac{16}{8} - \frac{8}{12} - 14 + c$$

$C = 15.67$

التطبيقات التجارية للتكامل

1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

4- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

<u>مثال :-</u>

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

2- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

الايراد الكلي $= (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 =$ 150 ريال

<u>مثال :-</u>

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

2- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

تمرين شامل (1)

<u>مثال :-</u>

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12\,x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

<u>المطلوب :-</u>

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

2- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع 25 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع 10 وحدات .

<u>الحل</u>

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12\,x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}\,x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6\,x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع 20 وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$$R = 2\times(20)^4 + 8\times(20)^3 - 6\times(20)^2 + 20\times(20)$$

$$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C' = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$C = 12\times(25)^3 + 20\times(25)^2 - 10\times(25) = 199750$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P' = R' - C'$

$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$

$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$

$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$

$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=10 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2\times(10)^4 - 4\times(10)^3 - 26\times(10)^2 + 30\times(10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$$ ريال

تمرين شامل (2)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدي الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$$R^{/} = (2x+1)(5\text{-}3x^2)$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C^{/} = (3x+1)^2$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة .

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي

$$R^{/} = (2x+1)(5+3x^2)$$

$$R^{/} = 10x + 6x^3 + 5 + 3x^2$$

$$R^{/} = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$$ **(الايراد الحدي)**

وللوصول دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي :-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + \left(\frac{3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{10}{2}\right)x^2 + 5x$$

$$R = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات يتم التعويض عن x=10 :-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)(10)^4 + (10)^3 + (5)(10)^2 + 5(10) = 16550$$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$$C' = (3x+1)^2$$

$$= 9x^2 + 6x + 1 \quad \text{(التكاليف الحدية)}$$

$$C = 3x^3 + 3x^2 + x \quad \text{(التكاليف الكلية)}$$

وللوصول لحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 20 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=20 :-

$$C = 3(20)^3 + 3(20)^2 + (20) = 25220$$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$

$$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$$

$$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$$

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= \left(\left(\frac{6}{4}\right) x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x\right) - \left(3x^3 + 3x^2 + x\right)$$

$$= \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 30 وحدة :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=30 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = \left(\frac{6}{4}\right) \times (30)^4 - 2 \times (30)^3 + 2 \times (30)^2 + 4 \times (30)$$

$= 1162920$ ريال

تمارين متنوعة :-

1- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار 60% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

1- الميل الحدي للإدخار = 0.60 .

2- الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.60 = 0.40

3- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$k' = 0.40$

$K = 0.40x$

تمارين متنوعة :-

2- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار 75% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

1- الميل الحدي للإدخار = 0.75 .

2- الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.75 = 0.25

3- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$k^{/} = 0.25$

$K = 0.25x$

المحاضره 14

تمارين مراجعة

إذا علمت أن :-

" تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات (x , y) و تستخدم نوعين من المواد الخام الخشب و الحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يستخدم 8 م من الخشب و 2 كجم من الحديد و النوع الثاني من المنتجات يستدم 10 م من الخشب و 4 كجم من الحديد ، و يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول بسعر 100 ريال و النوع الثاني بسعر 150 ريال ، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي 280 م من الخشب و 100 كجم من الحديد ، المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أجب عما يلي "

(1) دالة الهدف للمشكلة السابقة هي :-

(أ) $p = 100x + 150y$

(ب) $p = 280x + 100y$

(ج) $p = 8x + 10y$

(د) لا شيء مما سبق

(2) القيود المعبرة عن المشكلة السابقة هي :-

(أ) $8x+10y = 100 \ , \ 2x + 4y = 280$

(ب) $2x + 4y = 100 \ , \ 8x + 10y = 280$

(ج) $100x + 2y = 8 \ , \ 150x + 4y = 10$

(د) لا شيء مما سبق

(3) قيمة المتغير x و الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 10

(ب) 5

(ج) 4

(د) لا شيء مما سبق

(4) قيمة المتغير y الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 10

(ب) 5

<u>(ج) 20</u>

(د) لا شيء مما سبق

(5) ربح النموذج السابق يساوي :-

(أ) 1000 SAR

(ب) 3000 SAR

<u>(ج) 4000 SAR</u>

(د) لا شيء مما سبق

(٦) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) -23

<u>(ب) 23</u>

(ج) 7

(د) لا شيء مما سبق

(٧) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 178

(ب) 28

(ج) 54

<u>(د) لا شيء مما سبق</u>

(٨) اذا كانت $\Delta(A_{3\times3}) = 6$ فأوجد قيمة المحدد $(2A)$:

(أ) 12

(ب) 4

(ج) 48

(د) لا شيء مما سبق

(٩) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(A) = 4$ و $\Delta(B) = 3$ ، فأوجد $\Delta(AB)$:-

(أ) 12

(ب) 64

(ج) 81

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$:-

(١٢) قيمة Det (A) تساوي :-

(أ) 8

(ب) 24

(ج) 5

(د) لا شيء مما سبق

(١٣) المصفوفة A^{-1} هي المصفوفة :-

(أ) B

(ب) C

(ج) D

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت نظام المعادلات التالي :-

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

فباستخدام طريقة المحددات أجب عن الاسئلة التالية :-

(١٤) قيمة محدد x أو ما يرمز بالرمز Δ_x تساوي :-

(أ) 18
(ب) 15
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

(١٥) قيمة محدد y أو ما يرمز بالرمز Δ_y تساوي :-

(أ) 32
(ب) -45
(ج) 10
(د) لا شيء مما سبق

في غلط في الشريحه 10 مشابهه للشريحه 9 وبالتالي لايوجد تمارين 16-17

(٢١) إذا كانت $\lim_{x\to 3} h(x) = 15$ و $\lim_{x\to 3} g(x) = -9$
فإن $\lim_{x\to 3}(g(x) - h(x))$ تساوي :

(أ) -24
(ب) 24
(ج) 6
(د) لا شيء مما سبق

(٢٢) نهاية الدالة $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2x^2 - 10)$ تساوي :-

(أ) 30
(ب) 55
(ج) 35
(د) لا شيء مما سبق

(٢٣) نهاية الدالة $\lim_{x\to 2}(3x^4 + x^2 - 5)$ تساوي :-

(أ) 23
(ب) 47
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

بالتوفيق للجميع

(٢٩) المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة :-

(أ) متماثلة .

(ب) غير متماثلة .

(ج) مثلثية سفلى .

(د) لا شيء مما سبق

(٣٠) المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة :-

(أ) متماثلة .

(ب) غير متماثلة .

(ج) مثلثية سفلى .

(د) لا شيء مما سبق

(٣٥) إذا كانت :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت $C = AB$ فإن قيمة C_{33} تساوي :-

(أ) 36

(ب) 18

(ج) 63

(د) لا شيء مما سبق

(٣٦) إذا كانت :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} , B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت $C = AB$ فإن قيمة C_{12} تساوي :-

(أ) 36

(ب) 18

(ج) 63

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} , D = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

(٣٧) فإن معكوس المصفوفة A تساوي :-

(أ) B

(ب) C

(ج) D

(د) لا شيء مما سبق

(٣٨) حاصل ضرب المصفوفة A في معكوسها تساوي :-

(أ) B

(ب) C

(ج) D

(د) لا شيء مما سبق

إ

ذا علمت أن :-

A = (-3 , 3]

B = (0 , 5)

(39)المجموعة المعبرة عن $A \cap B$ هي :-

(أ) [0 , 4]

(ب) (1, 3]

(ج) (0 , 4)

(د)	لا شيء مما سبق

$A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$

$B=\{1,2,3,4\}$

$A \cap B = \{1,2,3\} = (0,4)$

$= [1,3]$

$A-B = \{-2,-1,0\}=(-3,1)$

$= [-2,0] = (-3,0]$

**(40)		المجموعة المعبرة عن B ¯ A هي (تقرا A ناقصاً B):-**

(أ)	$[-2 , 1]$

<u>(ب)	$(-3, 0]$</u>

(ج)	$(-3 , 2)$

(د)	لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$$h(x) = -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$$

**(41)	فإن $f(x) + h(x)$ تساوي :-**

(أ)	$-3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 23$

<u>(ب)	$5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 14$</u>

(ج)	$-3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 3$

(د)	لا شيء مما سبق

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$$

$h(x) = \quad -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$

$= 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 14$

(42) فإن $f(x) - h(x)$ (تقرأ الدالة f ناقصاً الدالة h) تساوي :-

(أ) $8x^3 - 15x^2 + 11x + 3$

(ب) $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 23$

(ج) <u>$5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 14x + 12$</u>

(د) لا شيء مما سبق

$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$h(x) = \quad -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$

$= 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 14x + 12$

(43) إذا علمت أن :-

$$f(x) = \frac{20x^5 + 30X - 12}{2X^2 - 288}$$

فإن الدالة السابقة تمثل :-

(أ) إقتران نسبي مجاله R

(ب) إقتران نسبي مجاله $R \setminus = \{4\}$

(ج) <u>إقتران نسبي مجاله $R \setminus = \{-12,12\}$</u>

(د)　لا شيء مما سبق

$2X^2 - 288$ = 0

$2X^2 = 288$

$X^2 = \frac{288}{2} = 144$

$X = \pm 12$

(44)　إذا علمت أن :-

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256}$$

فإن قيمة x تساوي :-

(أ)　± 2

(ب)　± 3

(ج)　± 4

(د)　لا شيء مما سبق

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{?}$$

$= 4^{x^2}$

$x = \pm 2$

45) أوجد $\frac{\log 1000 + \log 10000 - \log 100}{\log 10000 + \log 1000}$:-

(أ) $\frac{5}{7}$

(ب) $\frac{9}{5}$

(ج) $\frac{9}{100}$

(د) لا شيء مما سبق

(46)المتتالية التالية

$$\left(1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots\dots\right)$$

:-

(أ) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

(ب) متتالية حسابيه أساسها $\frac{1}{4}$

(ج) متتالية حسابيه أساسها $-\frac{1}{4}$

(د) لا شيء مما سبق

$$\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$$

47)الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (-10) و أساسها (-4) :-

(أ) $a_n=-10-4n$

(ب) $a_n=-6-4n$

(ج) $a_n=-4-10n$

(د) لا شيء مما سبق

$a_1=-10$

d = - 4

الحد العام =

$a_n=a_1+(n-1)d$

$a_n=-10+(n-1)-4$

$a_n=-10-4n+4$

$a_n=-6-4n$

48) متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) فإن مجموعها يساوي :-

(أ) 336

(ب) 363

(ج) 633

(د) لا شيء مما سبق

$n = 16$

$= 3^{a_1}$

$= 39^{a_n}$

$S_n = \frac{n}{2}\ (a_1 + a_n)$

$= \frac{16}{2}\ (3 + 39)$

$= 8\ \times 42 = 336$

49)المتتالية التالية $\left(\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{8},\frac{1}{27},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{3},1\right)$:-

(أ) متتالية حسابيه أساسها $\frac{2}{3}$

(ب) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$

(ج)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

(د) لا شيء مما سبق

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

50)متتالية هندسية حدها الأول (2) و اساسها (3) أوجد حدها العام :-

(أ) $a_n = 3.\ 2^{n-1}$

(ب) $a_n = 2.\ 3^{n-1}$

(ج) $a_n = 2.\ n^{3-1}$

(د) لا شيء مما سبق

$a_1 = 2$

r = 3

الحد العام =

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_n = 2\ .\ (3)^{n-1}$

(51) أودع شخص مبلغ (10000) ريال لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة :-

(أ) 1000

(ب) 16000

(ج) 10000

(د) لا شيء مما سبق

$a_1 = 10000$

$n = 8$

$d = \frac{7.5}{100} \times a_1$

$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$

$a_n = a_1 + nd$

$a_n = 10000 + 8 \times 750$

= 10000+6000 = 16000

52) أودع شخص مبلغ 1000 ريال لمدة ما بفائدة بسيطة 10% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 1250 ريال أحسب مدة الاستثمار :-

(أ) 10سنوات .

(ب) 2.5 سنة .

(ج) 5 سنوات .

(د)لا شيء مما سبق

$a_1 = 1000$

$n = ?$

$d = \frac{10}{100} \times a_1$

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

$a_n = 1250$

$a_n = a_1 + nd$

$$1250 = 1000 + n \times 100$$

$$1250 - 1000 = n \times 100$$

$$250 = n \times 100$$

$$\frac{250}{100} = n$$

n = 2.5سنة

53) ادخر شخص مبلغ 10000 ريال بفائدة مركبة 5% نصف سنوي لمدة 3.5 سنة ، فإن جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي:-

(أ) 13959.65 SAR

(ب) 10000 SAR

(ج) 19359.65 SAR

(د) لا شيء مما سبق

$$a_1 = 10000$$

$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1.10$$

$$n = 3.5$$

$$a_n = ?$$

$$a_n = a_1 r^n$$

$$a_n = 10000\,(1.10)^{3.5}$$

13959.65 SAR$a_n =$

54) ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة 4% نصف سنوي لمدة 6 سنوات ،فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة 15868.74322 ريال أوجد أصل المبلغ :-

(أ) 15000 SAR

(ب) 20000 SAR

(ج) 10000 SAR

(د) لا شيء مما سبق

$a_1 = ?$

$r = 1 + \frac{8}{100} = 1.08$

$n = 6$

$a_n = 15868.74$

$15868.74 = a_1(1.08)^6$

$a_1 = \frac{15868.74}{(1.08)^6}$

=10000 SAR

إذا علمت أن :-

" تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب ، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل في مرحلة التصنيع و 3 ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي 2400 ساعة لمرحلة التصنيع ، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة ،المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أجب عما يلي "

) القيود المعبرة عن المشكلة السابقة هي :-

(أ) 4x+5y= 2400 , 2x +3y =1300

(ب) 4x + 2 y = 1300 , 5x + 3y = 2400

(ج) 2x + 4y = 2400 , 3x+5y = 1300

(د) لا شيء مما سبق

(56) قيمة المتغير x و الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 1300

(ب) 350

(ج) 200

(د) لا شيء مما سبق

57) قيمة المتغير y الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 200

(ب) 1300

(ج) 2400

(د) لا شيء مما سبق

(58)قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) -23

(ب) 23

(ج) 7

(د) لا شيء مما سبق

(59)قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 105

(ب) 60

(ج) 45

(د)لا شيء مما سبق

(60)قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 178

(ب) 28

(ج) 54

<u>(د) لا شيء مما سبق</u>

(61)اذا كانت $\Delta(A_{2\times2}) = 5$ **فأوجد قيمة المحدد (3A) :**

(أ) 15

(ب) 2

<u>(ج) 45</u>

(د) لا شيء مما سبق

(62)اذا كانت $\Delta(A_{3\times3}) = 6$ **فأوجد قيمة المحدد (2A) :**

(أ) 12

(ب) 4

<u>(ج) 48</u>

(د) لا شيء مما سبق

(63)اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 **وكانت** $\Delta(A) = 2$ **و** $\Delta(B) = 5$ **، فأوجد** $\Delta(AB)$**:-**

(أ) 25

(ب) 32

<u>(ج) 10</u>

(د) لا شيء مما سبق

(64)اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 **وكانت** $\Delta(A) = 4$ **و** $\Delta(B) = 3$ **، فأوجد** $\Delta(AB)$**:-**

<u>(أ) 12</u>

(ب) 64

(ج) 81

(د) لا شيء مما سبق

(65)أوجد قيمة المحدد التالي $A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$:-

(أ) 24

(ب) 4

(ج) 0

<u>(د) لا شيء مما سبق</u>

(66)أوجد قيمة المحدد التالي $A=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$:-

(أ) -24

(ب) 4

(ج) 0

<u>(د) لا شيء مما سبق</u>

(67)أوجد قيمة المحدد التالي $A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

(أ) 6

(ب) 12

<u>(ج) 24</u>

(د) لا شيء مما سبق

(68)أوجد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

(أ) 3

(ب) 35

(ج) 63

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 80 – 6x) و كانت الكمية المطلوبة هي 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال :-

(69) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -6

(ج) -0.6

(د) لا شيء مما سبق

(70) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) قليل المرونة .

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 200 – 10x) و كانت الكمية المطلوبة هي 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال :-

(71) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -10

(ج) -0.1

(د) لا شيء مما سبق (1)

(72) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) متكافئ المرونة .

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)" أجب عما يلي :-

(73) الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) لا شيء مما سبق

(74) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8\,x - 0.15x^2$)" أجب عما يلي :-

(75) الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

<u>(ج) 0.5</u>

(د) لا شيء مما سبق

(76) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

<u>(ج) 0.5</u>

(د) لا شيء مما سبق

تمت بحمد الله

بالتوفيق للجميع

سوكره قطريه _شقاوة قطريه سابقا_