المحاضرة السادسة

الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية

الدالة الاسية:

أي دالة من النوع $y = a^x$ تسمى دالة أسية .

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس ، x: الأس.

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة.

أي

$$f : R \to R^+$$

أمثلة:

$$f(x) = 2^x \ , \ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ , \ f(x) = e^x \ , \ f(x) = 10^x$$

الدالة اللوغاريتمية:

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فان الدالة الاسية $y = a^x$ لها معكوس يرمز لها بالرمز $x = \log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a .

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية.

أي $f : R^+ \to R$

أمثلة:

$$f(x) = \log_2 x \ , \ f(x) = \log_4 (2x + 4)$$

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:

يعتبر العددان ١٠ ، e (عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالا كأساس للوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$. تسمى اللوغاريتمات للأساس ١٠ باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$.

قوانين اللوغاريتمات:

إذا كان كل من x ، y ، b عدداً حقيقياً موجباً ، b≠1 ، وكان n عدداً حقيقياً فان:

1. $\log_b xy = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^n = n \log_b x$
4. $\log_b 1 = 0$
5. $\log_b b = 1$

الدوال المثلثية:

هناك دالتان أساسيتان هما:

$$(i) \quad y = \sin x$$

$$(ii) \quad y = \cos x$$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

$$(iii)\ y = \tan x \qquad \left(\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0\right)$$

$$(iv)\ y = \sec x \qquad \left(\frac{1}{\cos x} \quad , \cos x \neq 0\right)$$

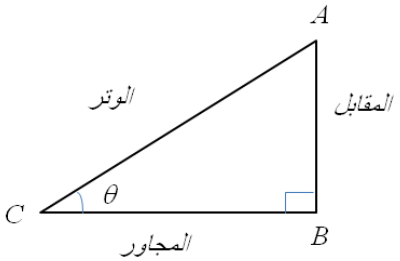
$$(v)\ y = \csc x \qquad \left(\frac{1}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0\right)$$

$$(vi)\ y = \cot x \qquad \left(\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \sin x \neq 0\right)$$

ملاحظة: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

التفسير الهندسي للدوال المثلثية:

إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل التالي:



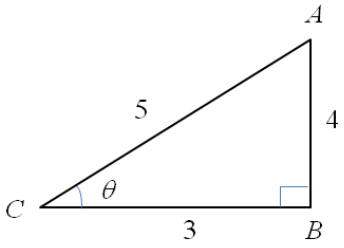
فان النسب المثلثية لزواية حادة θ وهي:

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad ، \quad \tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

مثال:

إذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$ ، فأوجد النسب الأساسية: $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

الحل:



$$\tan\theta = \frac{4}{3} \quad ، \quad \cos\theta = \frac{3}{5} \quad ، \quad \sin\theta = \frac{4}{5}$$

الدوال النسبية:

إذا كان h(x) ، g(x) كثيري حدود فان $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط g(x)≠0 ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

1. $f(x)=\frac{x+7}{x+5}$
2. $f(x)=\frac{1}{x^2}$
3. $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة y=f(x) ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

أمثلة:

1. $y=2x+3$
2. $y=x$
3. $y=x^2+2x-3$

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة f(x,y)=k، حيث k قيمة ثابتة.

أمثلة:

1. $x^2+y^2=25$
2. $x^2+y^2+xy+2x-4y+5=0$
3. $(x-3)^2+(y+5)^2=49$

الدوال الزوجية والدوال الفردية:

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة زوجية إذا كانت f(-x)= f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$f(-x)=(-x)^2$$
$$=(-x)(-x)$$
$$=x^2$$
$$=f(x)$$

اذا الدالة زوجية

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^2 + x$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= (-x)(-x) + (-x) \\ &= x^2 - x \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

اذا ليست زوجية.

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة $y=f(x)$ دالة فردية إذا كانت $f(-x)= -f(x)$

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \\ &= (-x)(-x)(-x) \\ &= -x^3 \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

اذا الدالة فردية.

مثال:

هل الدالة $f(x) = x^3 + x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= (-x)(-x)(-x) + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

اذا الدالة فردية

تطبيقات اقتصادية:

١- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

١. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$.
٢. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D=18$
٣. الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل. أي $P = 0$
٤. أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة .

الحل:

١. عندما $P=3$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25 - 5P \\ &= 25 - 5 \times 3 \\ &= 25 - 15 \\ &= 10 \end{aligned}$$

٢. عندما $Q_D=18$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25 - 5P \\ 18 &= 25 - 5 \times P \\ 5P &= 25 - 18 = 7 \\ \therefore P &= \frac{7}{5} = 1.4 \end{aligned}$$

٣. عندما $P=0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25 - 5P \\ &= 25 - 5 \times 0 \\ &= 25 \end{aligned}$$

٤. أعلى سعر يحدث عندما $Q_D=0$

$$\begin{aligned} Q_D &= 25 - 5P \\ 0 &= 25 - 5 \times P \\ 5P &= 25 \\ \therefore P &= 5 \end{aligned}$$

٢- دالة العرض (الإنتاج) الخطية:

هناك علاقة طردية بين كمية الإنتاج من سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما زادت كمية الإنتاج. ونرمز لكمية العرض (الإنتاج) من سلعة ما بالرمز Q_S بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P

مثال:

إذا كانت $Q_S = 3P - 2$ فأوجد:

١. Q_S إذا كانت $P = 5$

٢. P إذا كانت $Q_S = 10$

٣. اقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج).

الحل:

١. عندما $P = 5$

$$\begin{aligned} Q_S &= 3P - 2 \\ &= 3 \times 5 - 2 \\ &= 15 - 2 \\ &= 13 \end{aligned}$$

٢. عندما $Q_S = 10$

$$\begin{aligned} Q_S &= 3P - 2 \\ 10 &= 3P - 2 \\ -3P &= -2 - 10 = -12 \\ \therefore P &= 4 \end{aligned}$$

٣. أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج). أي عندما $Q_S = 0$

$$Q_S = 3P - 2$$
$$0 = 3P - 2$$
$$-3P = -2 - 0 = -2$$
$$\therefore P = \frac{2}{3}$$

٣- التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين:

يحدث التوازن في السوق إذا كانت الكمية المعروضة من سلعة ما مساوياً للكمية المطلوبة منها. وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن.

مثال:

إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

الحل: يحدث التوازن عندما تتساوي الكميتان المطلوبة والمعروضة .

$$Q_S = Q_D$$
$$P - 1 = 2 - P$$
$$P + P = 2 + 1$$
$$2P = 3$$
$$\therefore P = \frac{3}{2}$$

نعوض سعر التوازن في إحدى الدالتين، ولتكن دالة العرض

$$\therefore Q_S = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

تمارين:

١. هل الدالة $f(x)=3x^2-4x$ دالة زوجية؟

٢. هل الدالة $f(x)=3x^3-4x$ دالة فردية ؟

٣. هل الدالة $f(x)=2x^2+x$ دالة فردية ؟

٤. هل الدالة $f(x)=x^3-4$ دالة زوجية ؟

٥. هل الدالة $f(x)=x^3-x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟

٦. إذا كان $\sec\theta=2$ ، فأوجد النسب الأساسية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

٧. إذا دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D=100-5P$ فأوجد

أ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P=19$.

ب) سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D=50$

جـ) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل، أي $P=0$.

د) أعلى سعر يمكن أن يدفعه أي شخص لهذه السلعة.

٨. إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S=4P-5$ فأوجد

أ) Q_S إذا كانت $P=5$.

ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S=7$.

جـ) أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي حاجة الإنتاج(أي لكي يمكن الإنتاج)

٩. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D=25-\frac{1}{2}P$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S=2P-50$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

١٠. إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D=3P-4$.

وان دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_S=36-2P$.

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن