الاحصاء للإدارة

د.رائد الخصاونة

إعداد : آلحان الشوق ، سرّو ، وعد ، مَلاك
شرح الواجبات والاختبار الفصلي : أهلاوي ملكي
تجميع الملزمة : مَلاك ..

الفصل الأول: نظرية الاحتمالات
التجربة الإحصائية والفضاء العيني والحوادث

تعريف ١: التجربة الإحصائية هي أي عملية أو مجموعة عمليات لا تعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي. فمثلا رمي زهرة نرد، أو إلقاء قطعة نقد يمثلان تجربة إحصائية ويسمى هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية حيث نلاحظ أن النتائج تتغير في كل مرة يتم إجراء فيها التجربة.
ولكل تجربة إحصائية نتائج، وتعرف النتيجة للتجربة على أنها (النتيجة البسيطة، أي التي لا يمكن تحليلها إلى نتيجتين أو أكثر) وتسمى جميع النتائج البسيطة الممكنة الحدوث بالفضاء العيني للتجربة.
شرح : هناك نوعين من التجارب الاحصائية : **١): الأكيدة** ، تكون نتائجها المسبقة معروفه بشكل حتمي ..
مثال على التجارب الأكيدة : لو رمينا كره في الهواء فلابد بالنهاية ان ترتد إلى الأرض بفعل الجاذبية
٢): العشوائية ، النتائج تتغير في كل مره يتم اجراء فيها التجربة بمعنى اننا لانعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي .
مثال على التجارب العشوائية : عند إلقاء قطعه نقد مره واحدة اما ان يكون الناتج هو صورة أو كتابة .

تعريف ٢: الفضاء العيني (Sample Space) لتجربة إحصائية هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة وسنعبر عن الفضاء العيني بالرمز S.

تعريف ٣: الحادث Event هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني ويرمز له بأحد الأحرف التالية ... ,A, B, C ويقسم إلى قسمين:
١- **الحادث البسيط:** وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجة واحدة فقط.
٢- **الحادث المركب:** وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجتين فأكثر.
الشرح في مثال : عند القاء قطعه نرد مرتين ، عندما نرمي الاولى سيظهر لدينا العدد ١ أو العدد ٢ (هذه الحوادث البسيطة) وعند القائها المره الثانية ستظهر لدينا من ١ إلى ٦
عند القاء قطعه نرد مرتين إما سيظهر حادث بسيط العدد ١،١ – ٢،٢ – ٣،٣ ... سيكون لدينا ٣٦ ناتج ، الحادث المركب إذا ضمينا أكثر من نتيجة في نفس الوقت
كما يمكن تعريف بعض من الحوادث التالية:
١- **الحادث المستحيل:** وهو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر ورمزه Ø.
الشرح : عند القاء قطعه نرد او نقد من غير الممكن ان يظهر لنا حادث مستحيل .. " لايحتوي على أي عنصر "
٢- **الحادث الأكيد:** وهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني S.
الشرح : لابد أن يظهر لدينا احد الوجهين .

تعريف ٤: فضاء العينة المنفصل يسمى الفضاء العيني فضاءً منفصلا إذا كان محدودا أو لا نهائيا معدودا، أي إذا أمكن ربط عناصره واحدا إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة كان نقول اربط العنصر الأول مع العدد ١ والعنصر الثاني مع العدد ٢ وهكذا إلى مالا نهاية.
إضافات : متى يسمى الفضاء فضاء منفصل ؟ ١) : إذا كان محدوداً ٢) : لانهائي معدود
- **محدود :** بأن نقول لدينا تجربة عشوائية عند رمي قطعه نقد يكون لدينا الناتج أما صورة أو كتابة
- **لانهائي معدود :** بأن نجري تجربة عشوائية عدد لانهائي من المرات وفي كل مره نربط نتيجة هذه التجربة بأعداد صحيحة موجبة [نستطيع ان نربط عدد مالانهاية مع مجموعه الاعداد الصحيحة الموجبة]

مثال: في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حادث بسيط، حادث مركب وحادث أكيد؟
ملاحظة: سيتم الرمز بالحرف H لوجه الصورة، وبالحرف T لوجه الكتابة.
الحل:

صورة ↑ (H,H)   كتابة ↑ (T,T)

S= {(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}

A={(H,H)}   حادث بسيط

B={(T,H),(T,T)}   حادث مركب

C= S   حادث أكيد

[لاحظ أن الحادث الأكيد دائما هو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني، بينما الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر يسمى بالحادث المستحيل.]

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حادث بسيط، حادث مركب وحادث أكيد؟

الحل: الفضاء العيني للتجربة S={1, 2, 3, 4, 5, 6} ، وبالتالي يمكن كتابة الحوادث التالية:

A={5} حادث بسيط
B={3, 4} حادث مركب
C= S حادث أكيد
D= {7} حادث مستحيل

[لاحظ أن العدد 7 لا ينتمي إلى الفضاء العيني لهذه التجربة ولذلك سمي بالحادث المستحيل.]

تمرين ١: في تجربة إلقاء قطعة نقد وحجر نرد، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم اعط مثال على حادث بسيط وحادث مركب؟
تمرين ٢: في تجربة إلقاء حجري نرد مرة واحدة، أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة واعط مثال على حادث بسيط، حادث مركب وحادث أكيد؟

- **الحوادث المتنافية**

نقول بأن الحادثان A، B حادثان متنافيان إذا تحقق الشرط التالي:

$$A \cap B = \emptyset$$

مثال: إذا كان **S ={ 1, 2, …, 10}، وكان A حادث يمثل ظهور عدد فردي وB حادث يمثل ظهور عدد زوجي من S، فعندئذ نقول بأن الحادثان A, B حادثان متنافيان.**

- **العمليات الجبرية على الحوادث**

$A \cup B = \{ x: x \in A \text{ or } x \in B\}$
$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ and } x \in B\}$
$\bar{A} = \{ x : x \in S \text{ and } x \notin A\}$
$A - B = \{ x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$

مثال: إذا كان $S=\{ 1, 2, 3, \ldots\ldots, 10\}$
A={ x: x عدد فردي }
B={ y: y عدد زوجي}

أوجد : $A \cup B$، $A \cap B$، $\bar{A}$، $A - B$؟
الحل:
$A \cup B= S$
$A \cap B= \emptyset$
$\bar{A} = B$
$A-B= A$

المحاضرة الثانية – طرق العد

مقدمة:

قبل البدء بدراسة مفهوم الاحتمال النسبي ولاعتماده بشكل أساسي على عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية ,فلا بد من معرفة الطرق التي تساعدنا على ذلك .وهنالك أربعة طرق للعد سنتعرف عليها على النحو الآتي:

- **أولا : قاعدة الضرب**

إذا كانت التجربة E1 تحدث في n1 الطرق وكانت التجربة E2 تحدث في n2 من الطرق ,فإن التجربتين معا تحدثان في n1n2 من الطرق.

مثال :إذا أراد طالب أن يسجل في مقررين احدهما في قسم الإحصاء والآخر من قسم المحاسبة ,فإذا كان عدد المقررات لقسم الإحصاء هو 3 وعدد المقررات من قسم المحاسبة هو ,4 فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الطالب فيها؟
الحل : عدد الطرق= ٣×٤=١٢ طريقة
ملاحظة : يمكن تعميم القاعدة لتشمل k من التجارب.

مثال :كم هاتفا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا تألف رقم الهاتف من أربعة أرقام بشرط أن يكون الرقم الأول من اليسار ؟ أوله العددين ٨ أو٩؟
الحل :عدد الهواتف = ١٠×١٠×١٠×٢= طريقة
(لاحظ أن العدد الأول له طريقتان فقط لاختياره أما باقي المنازل فله ١٠طرق لاختيارهم هي عبارة عن الأعداد من ٠ إلى ٩).

❖ **ثانيا :قاعدة الجمع**
إذا كانت تجربة ما تحدث في n1 من الطرق وكانت تجربة أخرى تحدث في n2 من الطرق بحيث كان من المعلوم أن التجربتين لا تحدثان معا(مانعتان لبعضهما البعض)فإن واحدة منهم أو الأخرى تحدث في n1+n2 من الطرق.
مثال : أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الإحصاء أو قسم المحاسبة ,بحيث كان عدد المقررات في قسم الإحصاء 3وفي قسم المحاسبة ,4 فما عدد الاختيارات لديه؟
الحل: عدد الطرق = ٣+٤=٧ طرق
ملاحظة : يمكن تعميم قاعد الجمع لتشمل k من التجارب.
الشرح : المثال المعطى في السؤال هو الذي يحدد القاعدة المطلوبة ، مثلاً : في المثال الأول التجربتين تحدثان معًا فقمنا باستخدام قاعدة الضرب ، والمثال الثاني أحد التجربتين تكون مانعة للتجربة الأخرى فقمنا باستخدام قاعدة الجمع .

مثال : أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الإحصاء أو قسم المحاسبة أو قسم الرياضيات ، حيث أن عدد المقررات في قسم الإحصاء 4 والمحاسبة 6 والرياضيات 4 فما عدد الاختيارات لديه ؟
الحل : حاصل جمع عدد مقررات القسم الأول + حاصل جمع عدد مقررات القسم الثاني + حاصل جمع مقررات القسم الثالث
عدد الطرق = 4 + 6 + 4 = 14 طريقة .

❖ **ثالثاَ:التباديل Permutations**
التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما.
مثال : ما عدد طرق ترتيب جميع الأحرف a,b,c ؟
الحل : لاحظ أنه لدينا ثلاثة أماكن لنملأها من الأحرف الثلاثة حيث يمكن اختيار ثلاثة أحرف للمكان الأول أما المكان الثاني فيتبقى لدينا حرفان لملء المكان وأخيرا يبقى حرف واحد لملء المكان الأخير وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على:
عدد الطرق= **٣×٢×١=٦ طرق**
الشرح : يشترط قانون التباديل (الترتيب) . حينما يُذكر في السؤال كلمة ترتيب نطبق قانون التباديل على المعطيات الموجودة في السؤال .
+ يمكن استخراج ناتج التباديل من الآلة الحاسبة بالضغط على الأزرار التالية : SHIFT + X
وبشكل عام ,لدينا الحالات الثلاث التالية:
١- يمكن ترتيب **n** من العناصر المختلفة بطرق عددها
$nPn = n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1$
وهذا هو عدد تباديل **n** من العناصر المميزة.

ملاحظة: تسمى العملية !n بمضروب العدد n وهو عبارة عن $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times 3\times2\times1$ **ومثال عليها**
$4!=4\times3\times2\times1=24$

مثال : بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة" تقوى "؟
الحل : عدد الطرق يساوي
$4P4 = 4\times3\times2\times1 = 24$
الشرح : نطبق القاعدة الأولى في حالة العناصر المختلفة ، حيث أحرف كلمة (تقوى) لايوجد بها أي حرف مكرر (متشابه) .
+ في حالة وجود لدينا n من العناصر فيها n1 من العناصر المتماثلة و n_2 من العناصر المتماثلة والمختلفة عن الأولى وهكذا لغاية k من العناصر المتماثلة ,فإن عدد التباديل في هذه الحالة يصبح على النحو الآتي:
$$npr = \frac{n_1}{n_{1!}\, n_{2!\ldots nk1!}}$$

مثال : ما عدد تباديل أحرف كلمة" سلسبيل" ؟
الحل : عدد الطرق يساوي

$$6p6\,\frac{6!}{2!\times 2!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 2\times 1}=180$$

لاحظ أن حرف" س "تكرر مرتين وكذلك حرف" ل "أما بقية الأحرف فتكررت مرة واحدة.
الشرح : في هذا المثال لانستطيع التعويض فقط بالآلة الحاسبة ، بسبب أن لدينا بعض الأحرف المكررة ، تكرر حرف (س) مرتان ، كما أنه تكرر حرف (ل) مرتان ايضًا ، فيكون مجموع احرف الكلمة في البسط مع علامة المضروب (!) ، ويكون في المقام عدد تكرار الأحرف مع اشارة الضرب (x) بينهما كما هو موضح في المثال .
+في حالة كان لدينا n من العناصر المميزة وأردنا ترتيب جزء من هذه العناصر وليكن ،r ففي هذه الحالة يكتب قانون التباديل على الصورة التالية:

$$npr=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : ما عدد تباديل حرفين من كلمة" تاريخ"؟
الحل: لاحظ أن عدد أحرف كلمة " تاريخ "هو 5 وبذلك تصبح قيمة n=5 أما r= 2 كما هو مطلوب في السؤال وبذلك تصبح عدد الطرق تساوي

$$5p2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1}=20$$

الشرح : نستخدم هذا القانون حينما يُحدد في السؤال طلب معين ، في هذا المثال كان المطلوب تباديل حرفين فقط من الكلمة ، فيكون 2 هو المميز والذي نُعوض به قيمة r في القانون . و n نعوض بها عدد أحرف الكلمة .

- ❖ **رابعا : التوافيقCombinations**

التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب.

- كما يمكن استخراج ناتج التوافيق من خلال الآلة الحاسبة من خلال الضغط على الازرار التالية :
SHIFT+÷

مثال :ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف A, B, C دون الاهتمام بالترتيب؟
الحل : الاختيارات هي {A,B} , {A,C}, {B,C}وبذلك يكون لدينا 3 طرق.
وبشكل عام ,عدد الطرق التي نختار بها r عنصر من مجموعة فيها n من العناصر بغض النظر عن الترتيب هو عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة ويعطى بالصيغة التالية:

$$ncr=\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال :صف فيه ١٠ طلاب ,بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلاب دون النظر إلى الترتيب؟
الحل:

$$10c3=\frac{10!}{(10-3)!\times 3!}$$
$$=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1\times 3\times 2\times 1}=120$$

مثال : صندوق فيه 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء.
أ) بكم طريقة نختار 4 كرات من الصندوق؟
ب) بكم طريقة تختار الكرات الأربع بحيث تكون فيها واحدة حمراء وثلاث كرات بيضاء؟
الحل:
أ) من قاعدة التوافيق ,عدد طرق اختيار 4 كرات من الصندوق يساوي

$$12c4=\frac{12!}{(12-4)!\times 4!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8!}{8!\times 4!}=\frac{12\times 11\times 10\times 9}{4\times 3\times 2\times 1}=495$$

ب) عدد طرق اختيار كرة واحدة من الكرات الحمراء هو

$$5c1=\frac{5!}{4!\times 1!}=\frac{5\times 4!}{4!}=5$$

أما عدد طرق اختيار 3 كرات بيضاء فهو

$$7c3=\frac{7!}{4!\times 3!}=\frac{7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3\times 2\times 1}=35$$

إذن ,من قاعدة الضرب ,عدد طرق اختيار كرة واحدة وثلاث كرات بيضاء هو

$$5\times 35=175$$

❖ **أمثلة :**

١- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI" ؟

الحل: لاحظ أن هذه الكلمة مكونة من ١٠ أحرف ,منها الحرف S تكرر اربع مرات وكذلك الحرف P تكرر مرتين ,الحرف I تكرر ثلاث مرات .وبذلك يكون الحل كما يلي:

$$10P10=\frac{10!}{4!\times 3!\times 2!}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4!}{4!\times 3\times 2\times 1\times 2\times 1}=12600$$ طريقة

أما عدد طرق تكوين كلمة من جميع أحرف كلمة "MISSISSPPI" بغض النظر عن الترتيب فهو طريقة واحدة فقط.

٢- بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159

أ- مع الترتيب؟

ب - بدون ترتيب؟

الحل : لاحظ أن جميع الأرقام المكون منها هذا العدد مختلفة ,وكذلك عدد منازل هذا العدد هو n=4 والمطلوب في السؤال ترتيب رقمين فقط بمعنى , r=2 وبذلك يكون الحل هو $4P2=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4\times 3\times 2!}{2!}=12$:

في حال عدم الترتيب ,تصبح صيغة القانون على الشكل التالي

$$4c2=\frac{4!}{(4-2)!\times 2!}=\frac{4\times 3\times 2!}{2!\times 2!}=6$$

❖ **تمارين:**

١- يقدم احد المطاعم 4 أصناف من اللحوم , و 3 أصناف من السلطات , وصنفين من الحلوى كم عدد الاختيارات الممكنة لوجبة غذائية مكونة من صنف واحد من كل نوع ؟

٢- صندوق فيه 8 كرات مختلفة سحبت 3 كرات الواحدة تلو الأخرى . جد عدد طرق سحب الكرات الثلاث إذا كان السحب:

أ- دون إرجاع

ب- مع إرجاع

٣- أراد أربعة أشخاص اخذ صورة جماعية بوقوفهم معا في صف واحد بكم طريقة مختلفة يمكن أن يصطف هؤلاء الأشخاص ؟

المحاضرة الثالثة - نظرية الاحتمالات

مقدمة : مفهوم الاحتمال .. هناك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها :

١/ طريقة الرأي الشخصي : وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما ، و كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرًا للجهد الذي بذله في دراستها .

٢/ طريقة التكرار النسبي :و ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي , n(A) فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$ ، وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت ,وليكن p فعندئذ تقول أن احتمال الحادثA هو العدد. p

مثال : عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها ، نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدًا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$

مثال : إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

التخصص	عدد الطلبة
إدارة أعمال	320
محاسبة	480
تسويق	300
علوم مالية ومصرفية	500

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة ,فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل: التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي $0.3 = \frac{480}{320+480+300+500}$

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي :

فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث : إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه n من النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر . ومن هذا نحصل على النتيجة التالية : إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A)، فإن احتمال هذا الحادث هو : $\frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{n(A)}{n} = p(A) =$

مثال : في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات أوجد احتمال كل من الحوادث التالية :

١/ إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل ؟

٢/ إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة ؟

الحل : لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي :

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2 = 8 (من قاعدة الضرب).

1- $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

لاحظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين .

❖ **قوانين الاحتمالات:** في هذا البند سنورد القوانين الاولية في الاحتمال وهي :

نظرية (1) :

١- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها Ø فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر . بالرمز p(Ø) = 0

٢- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1 . بالرمز p(S) = 1

٣- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد . بالرمز 0 ≤ p(s) ≤ 1

نظرية (2) : إذا كان A حادثًا في s ، وكان $\bar{A}$ هو متممة ذلك الحادث فإن $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

مثال : إذا كان احتمال نجاح طال في مادة الحاسبة ما هو 80% ، فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة ؟

الحل : بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A ، فإن احتمال عدك نجاحه يساوي

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.08 = 0.20$

مثال : إذا كان احتمال وصول طالب إلى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75 فما احتمال وصول الطالب المتأخر ؟

الحل : نفرض أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

$\bar{A}$ = وصول الطالب متأخرًا

$P(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

نظرية (3) : إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20، أجب عن الاسئلة التالية :

أ) ما احتمال غياب الطالب عن أحد المحاضرتين على الأقل ؟

ب) ما احتمال عد غياب الطالب عن أي من المحاضرتين ؟

ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى ؟

الحل : نفرض أن A تمثل غياب طالب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية . وبذلك فأن $A\cap B$ يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين

أ) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين، وهذا يعني متممة الحادث "غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$p\overline{(A \cup B)} = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$

ج) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال : إذا كان $p(A \cup B) = 0.9 , p(B) = 0.8 , p(A) = 0.5$. أوجد

أ) **$p(A \cap B)$**

ب) **$p(\bar{A})$**

ج) **$p\overline{(A \cap B)}$**

الحل :

أ)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$0.9 = 0.5 + 0.8 - p(A \cap B)$$
$$\downarrow$$
$$p(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$$

ب) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

ج) $p\overline{(A \cap B)} = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

ملاحظة : في حال كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فإن تقاطعهما = ∅ وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$$p(A \cup B) = p(A) + P(B)$$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.3$ ، $p(B) = 0.4$ بحيث كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B ؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B او حدوث احدهما على الأقل تعني $p(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معًا فهذا يعني $p(A \cap B)$

نظرية (4) : إذا كان B,A أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

ب) $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعد في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الاقل يساوي أو أوجد احتمال

1- حضور المدير ومساعده؟

2- حضور المدير وحده؟

3- حضور المساعد وحده؟

الحل : نعبر عن حضور المدير بالحادث A وحضور المساعد بالرمز ، وحضور احدهما على الأقل بالرمز $A \cup B$

١- من نظرية رقم ثلاث نجد أن :

الحل :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$$
$$\downarrow$$
$$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$$

٢- حضور المدير وحده تعني أن المدير حضور وغيابك مساعد ، وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \quad 0.90 - 0.88 = 0.02$$

٣- حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب حدوث B وعدم حدوث A .

$$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$$

❖ **تمارين :**

١. **في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين اوجد احتمال ما يلي :**

- ظهور عددين متشابهين
- ظهور عددين مختلفين
- ظهور عددين مجموعهما أكبر من12 ؟
- ظهور عدين بحيث يكون الأول عدد فردي؟

٢. **ألقيت قطعتا نقود متزنتان مرة واحدة فما أحتمال** :

- ظهور صورة واحدة على السطح العلوي ؟
- ظهور صورة واحدة على الأقل ؟
- ظهور صورة واحدة على الأكثر ؟

❖ **أمثلة :**

١) **اذا كان احتمال حصول طالبة على قبول من جامعة الملك فيصل هو 0.5 ، واحتمال حصولها على القبول من جامعة الملك سعود هو 0.8 ، واحتمال حصولها على القبول من كلا الجامعتين هو 0.4 ، فما هو احتمال حصولها على القبول من احدى الجامعتين ؟**

الحل : اذا كان الحصول على القبول من جامعة الملك فيصل هو A ، والحصول على القبول من جامعة الملك سعود هو B فإن :-

$$P(A)=0.5 \quad P(B)=0.8 \quad P(A \cap B)=0.4$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$0.5 + 0.8 - 0.4 = 0.9$$

٢) **في تجربة رمي حجر النرد منتظم مرة واحدة ، أوجد احتمال الحوادث التالية :**

١- الحادث A احتمال ظهور العدد 4 .
٢- الحادث B احتمال ظهور عدد زوجي .
٣- الحادث C احتمال ظهور العدد 9 .

$$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

بما أن حجر النرد منتظم فإن كل نقاط فراغ العينة متساوية في احتمال الظهور .

$$1=P(S)=P\{ (1) \cup (2) \cup \ldots \cup (6) \}$$

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$$

$$6P(1)=1 \rightarrow P(1)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

1- $P(A) = P(4) = \frac{1}{6}$

2- $P(B) = P(2,4,6)= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3- P© $= P\emptyset = 0$

٣) في تجربة القاء حجر نرد مرتين ماهو احتمال :

١- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 10 .
٢- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى أكبر من 10 .
٣- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 7 .

❖ فراغ العينة يتألف من 36 نقطة .

الوجه الأول / الوجه الثاني	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

١- اذا كان A ظهور عددين مجموعهما يساوي 10 .

A=[(4,6),(6,4),(5,5)]

P(A)=$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

٢-اذا كان B ظهور عددين مجموعهما أكبر من 10 .

B=[(5,6),(6,5),(6,6)]

P(B)=$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

٣-اذا كان C ظهور عددين مجموعها يساوي 7 .

C=[(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)]

P(C)=$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

تمرين : وجد في أحد نوادي الرياضة القريبة من الجامعة 50 طالبا من جامعة الدمام ، منهم 20 طالبا من كلية الاقتصاد والادارة و 25 طالبا من كلية الآداب والباقي من الكليات الآخرى . أختير منهم طالبًا عشوائيا أوجد الاحتمالات التالية :

١- احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والادارة .
٢- احتمال أن يكون الطالب من كلية الآداب .

المحاضرة الرابعة – نظرية الاحتمالات

❖ **قوانين ديمورغان :**

من خواص العمليات الجبرية على المجموعات مايسمى بقوانين ديمورغان والتي تنص على أن

$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$$
$$(\overline{A \cap B}) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ومنها نستنتج أن :

$$P(\overline{A \cup B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$
$$P(\overline{A \cap B}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

مثال : إذا كان $P(A \cup B) = 0.5 \;,\; P(B) = 0.4 \;,\; P(A) = 0.3$

أوجد مايلي :

١. **احتمال حدوث الحالتين معاً ؟**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.5 \quad = \quad 0.3 \; + \; 0.4 \; - P(A \cap B)$$
$$\rightarrow P(A \cap B) = \; 0.7 \; - 0.5$$
$$= \quad 0.2$$

٢. عدم حدوث أي من الحادثين A ، B ؟

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

٣. عدم حدوث الحادث A أو الحداث B ؟

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$$

٤. حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B ؟

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

٥. حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A ؟

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

٦. احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A ، B حادثين منفصلين ؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

❖ **الاحتمال الشرطي :** يعرف الاحتمال الشرطي على انه احتمال وقوع الحادث A مشروطاً بوقوع حادث آخر وليكن B ، ويرمز للاحتمال الشرطي بالرمز $P(A/B)$ ويعرف كالآتي :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

وكذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحادث B مشروطاً بحدوث الحادث A على النحو الآتي :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

مثال : وميت قطعه نقد ثلاث مرات ، فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف H وظهور الكتابة بالحرف T . إذا علم أن الوجه الاول في الرمية الاولى H فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H , H ؟

الحل : نلاحظ أن الفضاء العيني يساوي :

S = { (H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (H,T,T) , (T,T,T) , (T,T,H) , (T,H,T) , (T,H,H) }

نفرض أن A يمثل الحادث " ظهور H في الرميه الاولى "

B تمثل الحادث ظهور الوجان H,H في الرميه الثانية و الثالثة

المطلوب : $P(B/A)$ ؟

بالنظر إلى فضاء العينة S فإن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

وكذلك

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

ومن قانون الاحتمال الشرطي ، نحصل على

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

سؤال : اعتماداً على المثال السابق ، إذا علمت ان الوجه الأول كان T فما احتمال ان يكون الوجهان الآخران H,T ؟

❖ قاعدة الضرب :

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$
$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

حيث يطلق على هذه القوانين مايسمى بقوانين الضرب ويستفاد منها في احتساب احتمالات التقاطع إذا علمنا أن الاحداث مشروطة بعضها ببعض .

مثال : إذا كان $\boldsymbol{P(B) = 0.3\ ,\ P(A) = 0.6}$ وكان $\boldsymbol{P(A/B) = 0.4}$

أ) $\boldsymbol{P(A \cap B)}$

من قاعدة الضرب $P(A \cap B) = P(B)\ \times P(A/B) = 0.3\ \times 0.4 =\ 0.12$

ب) $\boldsymbol{P(B/A)}$

من قانون الاحتمال الشرطي $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$

❖ الحوادث المستقلة :

تعريف : يقال بأن الحادثان B,A حادثان مستقلان إذا كان حصول احدهما لايؤثر على حدوث الاخر

اي ان : $P(A/B) = P(A)$

لاحظ أن حدوث A لا يتأثر بوجود الحادث B ، وكذلك

$$P(B/A) = P(B)$$

وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال : إذا كان B,A حادثين مستقلين وكان $\boldsymbol{P(B) = 0.6\ ,\ P(A) = 0.4}$ **.. أوجد :**

١. $\boldsymbol{P(A \cap B)}$

$$P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

٢. $\boldsymbol{P(\overline{A \cap B})}$

$$1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24 = 0.76$$

مثال : إذا كان $\boldsymbol{P(A/B) = P(A) = 0.6\ ,\ P(B/A) = 0.5}$ **هل الحادثان B , A مستقلان ؟ وما احتمال الحادث B ؟**

الحل : بما أن $P(A/B) = P(A) = 0.6$ فإن A ، B حادثان مستقلان .. ومع ذلك نجد أن $P(B) = P(B/A) = 0.5$

❖ نظرية بيز :

إذا كانت $A_1\ ,\ A_2\ ,\ \ldots.\ ,A_n$ تقيسماً لفضاء العينة S أي أن $A_i\ \cap\ A_j$ لكل $i \neq j$ و $\cup_{i=1}^{n} A_i = S$

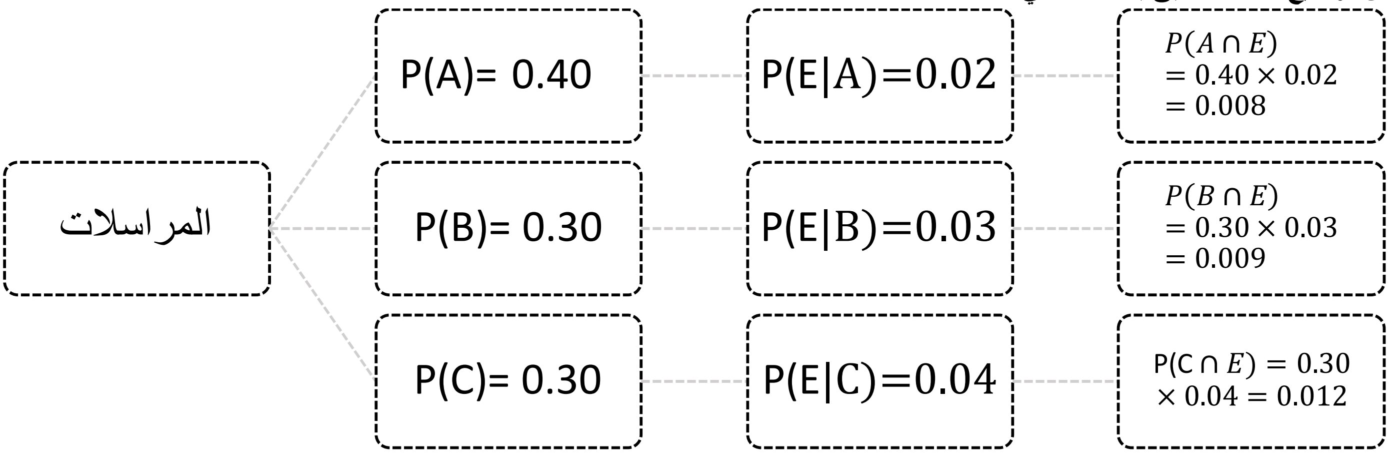
وكان $P(A_i) > 0$ لكل $i = 1\ ,2\ ,\ldots\ \ ,n$ وكان E حادث في S بحيث $P(E) > 0$ فإن $P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E\mid A_k)}{\sum_{i=1}^{k} p(A_i)p(E\mid A_i)}$

مثال : تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما ، فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات ، وتطبع B 30% الباقيه ، وتطبع C 30% الباقيه ، إذا كان احتمال ان A تخطئ في الطباعه هو ٠,٠٢ واحتمال الخطأ في عند B هو 0.03 واحتماله عند C هو 0.04 .. سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ ، اوجدي احتمال ان نكون السكرتيرة B هي التي طبعتها ؟

الحل : إذا كان E هو الحادث ، يوجد خطأ في الورقة المطبوعة .. المطلوب : ايجاد $P(B/E)$

$$P(B/E) = \frac{P(B)P(B/E)}{P(A)P(E/A) + P(B)P(E/B) + P(C)P(E/C)}$$
$$P(B/E) = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 + 0.30 \times 0.04}$$
$$= \frac{9}{29} = 0.31$$

يمكن توضيح المثال السابق بالشكل التالي



تمرين ١ : إذا كان $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.8$ ... أوجد مايلي :

1) $P(A\cup B)$ إذا كان A , B حادثين مستقلين ؟
2) $P(A\cup B)$ إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟
3) $P(\overline{A\cap B})$ إذا كان حادثين مستقلين ؟
4) $P(A/B)$ إذا كان A , B حادثين مستقلين ؟
5) $P(B/A)$ إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟

تمرين ٢ : يوجد في مصنع ثلاث ماكينات تنتج الاولى ٤٥٠ وحدة يومياً والثانية ٣٥٠ وحدة يومياً و الثالثة تنتج ٢٠٠ وحدة يومياً وكانت نسبة المعيب من إنتاج الماكينة الاولى ١% ومن الثانية ٢% ومن الثالثة ٣% . اختيرت من إنتاج المصنع وحدة عشوائياً فوجدت أنها معيبة فاحسب احتمال أن تكون الوحدة المختارة من الماكينة الثانية .

المحاضرة الخامسة - الأسبوع الثالث
الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

مقدمة

في كثير من الأحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقط مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الأعداد من ١ إلى ٦ وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة إحصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي إعطاءنا المجال.

- **المتغير العشوائي Random Variable:**

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه، ويرمز له بحرف لاتيني كبير Y, X ، ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير y, x

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات ؟

الحل :

عناصر الفضاء العيني	قيمة X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
THH	2

نلاحظ أن كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع إعادة تنظيم النتائج السابقة على الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X
[HHH]	٣
[THH , HTH , HHT]	٢
[THT , TTH , HTT]	١
[TTT]	٠

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث تعبر عنها بدلالة X. ففي المثال السابق تكون الحوادث { X=0 } , { X=2 } , { X=3 }.

مثال: اعتماداً على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين بين عدد H وعدد T ؟

ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H ناقصاً عدد T ؟

الحل :

أ)

الحادث المقابل	قيمة y
[TTH , THT , THH , HTH , HHT , HTT]	١
[TTT , HHH]	٣

ب)

الحادث المقابل	قيمة Z
[TTT]	-٣
[HTT , THT , TTH]	-١
[HHT , HTH ,THH]	١
[HHH]	٣

❖ **أنواع المتغيرات العشوائية:**

ينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

١- **المتغير العشوائي المنفصل (Discrete):** وهو المتغير الذي يأخذ قيماً إما محدودة أو لا نهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمة واحداً لواحد مع مجموعة الأعداد الصحيحة. ومن الأمثلة عليه عدد أفراد الأسرة ، عدد المواليد

٢- **المتغير العشوائي المتصل (Continuous):** وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما ومن الأمثلة على ذلك: درجة الحرارة، وزن الإنسان

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالاً لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساوياً لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال : في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث X يمثل عدد مرات ظهور الصورة H، أوجد:

١- **P{X=3}** ٢- **P{X=2}**

الحل :

١- نلاحظ أن X=3 يقابل الحادث HHH وبالتالي $P(X=3) = \frac{1}{8}$

٢- في حالة X=2 فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH}

وبالتالي $P(X=2) = \frac{3}{8}$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي :

قيمة X	P(X=X)
3	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
0	$\frac{1}{8}$

تمرين : في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموعة العددين الظاهرين، عرف ذل كالمتغير واحتمال كل منهما؟

الجدول السابق يقودنا إلى التعريف التالي:

❖ **التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution:**

تعريف : كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعاً احتمالياً منفصلاً أو اقتران احتمالي، بحيث يحقق الشرطين التاليين:

١- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.
٢- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي ١.

وإذا عبرنا بالرمز *f*(x) للاحتمال P(X=x) فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

$f(x) \geq 0$ ، لجميع قيم x
$\sum f(x) = 1$ ، لجميع قيم x

مثال : هل تمثل المعادلة $x = 1, 2, 3, 4, 5$; $f(x) = \frac{x}{15}$ لغير ذلك: $f(x) = 0$ توزيعاً احتمالياً منفصلاً؟

الحل : لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X. أما مجموع قيم *f*(x) فهي:

$$\sum_{1}^{5} f(x) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

إذا: f(x) توزيع احتمالي حقق الشرطين الأول والثاني.
يمكن وضع المعادلة على شكل جدول على الصورة:

X	١	٢	٣	٤	٥	**المجموع**
$f(x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{5}{15}$	1

مثال : أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً واحسب احتمال X اكبر من ٤ واحتمال X أقل من أو تساوي ٤؟

x	١	٢	٣	٤	٥	٦
$f(x)$	**a**	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

الحل : بما أن $\sum f(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{5}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X أكبر من ٤:

$$P(X > 4) = P(X = 6) = \frac{1}{5} = \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي ٤ :

$$P(X \le 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \frac{3}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

المحاضرة السادسة – الاسبوع الرابع
الفصل الثاني : المتغيرات العشوائية و التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :**

تعريف : التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل الذي اقترانه الاحتمالي f (x) هو المقدار التالي :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

مثال : اوجد التوقع الرياضي للمتغير X و الذي توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي :

X	f(x)	Xf (x)
3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.2	1.0
6	0.1	0.6
7	0.2	1.4

الحل : من خلال ضرب القيمة x في f(x) كما هو موضح في العمود الثالث و بعملية الجمع نحصل على

$$\mu = E(X) = 4.7$$

مثال : اوجد توقع X اذا كان $f(X) = \frac{x}{15}\ ; x = 1,2,3,4,5$ ، $f(x) = 0$ لغير ذلك

الحل :

$$\mu = E(X) = \sum_{x} x f(x) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15}$$

$$= \frac{1+4+9+16+25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

- **خواص التوقع الرياضي**

نظرية (١) : لكل متغير عشوائي X ، اذا كان a , b عددين ثابتين فان :

$$E(aX + b) = aE(x) + b$$

وهذا يعني انه اذا ضرب المتغير العشوائي بعدد ثابت وليكن a ، و اضيف له عدداً ثابتاً آخر وليكن b فان التوقع الرياضي يتأثر بنفس الطريقة فيصبح بعد التعديل مساوياً للتوقع الاصلي مضروبا في a و مضافا اليه العدد b .

مثال : اذا كان $E(X) = 6$ ، اوجد

١- $E(3X + 5)$

٢- $E(0.5X - 2)$

الحل :

١- $E(3X + 5) = 3 \times 6 + 5 = 23$

٢- $E(0.5X - 2) = 0.5 \times 6 - 2 = 1$

مثال : اذا كان $E(X) = 10$ وكان $E(ax + 5) = 25$ ، اوجد قيمة a ؟

الحل :

$$E(ax + b) = aE(X) + b = a \times E(X) + b = a \times 10 + 5 = 25 \rightarrow 10a = 20 \rightarrow a = 2$$

تمرين : اعتماداً على الجدول التالي و الذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

X	f (x)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	A

اوجد :

١- قيمة المجهول a
٢- المتوقع الرياضي للمتغير العشوائي x
٣- $E(2X + 10)$ ؟

- **تباين المتغير العشوائي X**

تعريف : اذا كان μ توقع المتغير العشوائي X تباين X و يعبر عنه بالرمز σ^2 بالصيغة التالية :

$$\sigma^2 = \sum_{X} (X - \mu)^2 f(x)$$

مثال : جد تباين X اذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي :

X	f (x)
10	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{4}$
40	$\frac{1}{4}$

الحل : نجد اولا توقع x كما يلي :

$$\mu = E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 25$$

و لحساب التباين ، نجد ان :

$$\sigma^2 = \sum_{X} (X - \mu)^2 f(x)$$

$$= (10 - 25)^2 \times \frac{1}{4} + (20 - 25)^2 \times \frac{1}{4} + (30 - 25)^2 \times \frac{1}{4} + (40 - 25)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{225+25+25+225}{4} = 125$$

اما الجذر التربيعي الموجب للتباين فيسمى الانحراف المعياري و يعبر عنه بالرمز σ حيث نلاحظ ان الانحراف المعياري للمثال السابق هو

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{125}$$

- **خواص التباين :**

اذا كان X متغيرا عشوائيا منفصلا معدله μ وتباينه σ_X^2 وكان لدينا التحويل $Y = aX + b$ حيث b,a ثابتان فان

$$\sigma_y^2 = a^2 \, \sigma_x^2$$

اما الانحراف المعياري للمتغير Y فهو

$$\sigma_y = |a|\sigma_y$$

مثال : اذا كان للمتغير X, $\mu_2 = 50$, $\sigma_X^2 = 16$ اوجد معدل Y وتباينه و انحرافه المعياري اذا كان $Y = 3X - 4$ ؟

الحل :
$$\mu_Y = E(3X-4) = 3\mu_X - 4 = 3\times 50 - 4 = 146$$
$$\sigma_Y^2 = 3^2 \times \sigma_X^2 = 9\times 16 = 144$$
$$\sigma_Y = \sqrt{144} = 12$$

- **توزيعات احتمالية خاصة :**

هنالك كثير من المتغيرات العشوائية التي شاع استعمال توزيعاتها الاحتمالية بحيث من المفيد دراسة كل منها على حده ، ومن هذه التوزيعات

١- **توزيع ذات الحدين Binomial Distribution :**

في كثير من التجارب تكون النتيجة احد الامرين اما نجاح او فشل ، وتتألف هذه التجارب من تكرار و اعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض ، فمثلا في تجربة القاء قطعة نقد فان النتيجة اما ظهور صورة او كتابة و تكون نتيجة أي محاولة مستقلة عن الاخرى وهكذا . ان هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي

تعريف : محاولات بيرنوللي Bernoulli Trials :

كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاولات بيرنوللي :

١- نتيجة كل محاولة احد الأمرين ، نسمي "احدها" نجاح و الأخرى "بالفشل"
٢- نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي المحاولة الأخرى
٣- احتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P وبذلك فان احتمال الفشل هو q = 1-p

<u>ومن الامثلة على هذه التجارب :</u> فحص مجموعة من المصابيح الكهربائية ، فحص مجموعة من الطلاب لمعرفة حاجته الى نظارات طبية

تعريف : اذا اجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان x يمثل عدد النجاحات في المحاولات كلها فان :

$$\mathbf{P\ (X = x) = \ nCx \times p^x \times (1-p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \ldots., n}$$

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p) .

مثال : رميت قطعة نقد متزنة اربع مرات ، جد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة ثم اوجد احتمال ظهور الصورة اربع مرات ؟

الحل : ان هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث ان $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$ ، ومنها

$$b\left(x; 4; \frac{1}{2}\right) = p(X = x) = 4Cx \times (\frac{1}{2})^x \times (1-\frac{1}{2})^{4-x}; x = 0,1,2, \ldots$$

وعند X = 4 ، ينتج ان :

$$b\left(4; 4; \frac{1}{2}\right) = p(x = 4) = 4C4 \times (\frac{1}{2})^4 \times (1-\frac{1}{2})^{4-4} = 1\times(\frac{1}{2})^4 \times (\frac{1}{2})^0 = \frac{1}{16}$$

ويمكن حساب احتمال عدم ظهور الصورة (P (X=0 او ظهور الصورة مرة واحدة (P(X=1 وهكذا .

تمرين ١: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات ، ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها ، ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات ؟
تمرين ٢ : في تجربة ذات الحدين ، اذا كان $n = 15$, $p = 0.1$ اوجد $p(x \le 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات ؟

- **خواص التوقع الرياضي و التباين العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين :**

نظرية : اذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذات الحدين b(x; n; p) فان :

١) توقع X هو $\mu = E(X) = np$
٢) تباين X هو $\sigma^2 = npq$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و التباين لمتغير ذات الحدين اذا كان $n = 60$, $p = \frac{2}{3}$

الحل : $\mu = E(X) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

$$\sigma^2 = npq = 60 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$$

٢- **توزيع بواسون :**

ان التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة تسمى بواسون . و الفترة الزمنية قد تكون دقيقة او يوما او اسبوعا او شهرا او غير ذلك اما المنطقة المحددة فقد تكون صفحة كتاب او مترا مربعا او غير ذلك

وبشكل عام تجربة بواسون تحقق الشروط التالية :

١- معدل النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة او منطقة محددة معلوم وليكن λ
٢- احتمال حدوث نجاح حادث واحد في فترة زمنية قصيرة او منطقة زمنية صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة او مساحة تلك المنطقة .
٣- احتمال حدوث نجاحين او اكثر في فترة زمنية قصيرة او منطقة صغيرة مهمل .
٤- حدوث النجاحات في أي فترة زمنية مستقل عن حدوث أي نجاحات اخرى في عدة فترات زمنية منفصلة .

تعريف : توزيع بواسون

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة هو

$$P(x;\lambda) = P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} ; x = 0,1,2, \dots$$

حيث λ هي معدل النجاحات في الفترة الزمنية المعينة او المنطقة المحددة e= 2.718

مثال : تصل المكالمات الهاتفية الى مقسم احد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة في الدقيقتين
ما احتمال وصول كل من الحوادث التالية :

أ) صفر مكالمة في اربع ؟
ب) 4 مكالمات في فترة اربع دقائق ؟

الحل : نفرض ان X = عدد المكالمات في فترة اربع
اذن $\lambda = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
ان X يتبع توزيع بواسون الذي معدله $\lambda = 2$ وينتج ان

أ) عدم وصول أي مكالمة في اربع دقائق هو :

$$P(0;2) = P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = e^{-2} = 0.1353$$

ب) وصول اربع مكالمتا في اربع دقائق هو :

$$p(4;2) = p(x = 4) = \frac{e^{-2}2^{4}}{4!} = \frac{16}{24}e^{-2} = 0.0902$$

تمرين : معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الاسبوع الواحد . ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين ، ما احتمال حادثين او اقل في اسبوع معين ؟

- **خواص التوقع الرياضي و التباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون :**

نظرية : اذا كان X متغير بواسون العشوائي الذي توزيعه الاحتمالي $P(x;\lambda)$ حيث λ معدل عدد الحوادث في فترة زمنية معينة فان توقع X هو $E(X) = \lambda$ وتباين X هو $\sigma = \frac{2}{x} = \lambda$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون اذا كان $\lambda = 25$ ؟
الحل : $E(X) = 25 , \sigma_{X} = 5$ .. لاحظ ان الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .

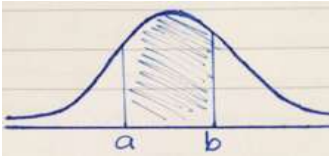
المحاضرة السابعة – الأسبوع الرابع ..
الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي متصل وكان f(x) اقتران حقيقي يتحقق الشرطان التاليين:

١- $f(x) \geq 0 , -\infty < X < \infty$
٢- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(عن المساحة تحت منحنى f(x) وفوق محور السينات = ١ فإن f(x) تسمى الكثافة الاحتمالية أي التوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X.

ويكون احتمال وقوع X بين قيمتين a = x , b = x يساوي المساحة تحت منحنى f(x) وفوق المحور الأفقي والمحصور بين a , b والشكل التالي يوضح ذلك



أي أن:

$$P(\ a < x < b\ ) = \int_a^b f(x)dx$$

ومن أنواع التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي سنتعرف عليها في هذا الفصل:

١- **التوزيع الطبيعي (The normal Distribution):** ويعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يوصل التوزيع الطبيعي من خلال معادلة رياضية تحدد منحناه وتعين تماماً وبمعرفة كل من المعدل μ والتباين س٢ والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \text{س}}} e^{-}(X-\mu)^2/\ 2\text{س}^2$$

حيث μ: معدل التوزيع ، س٢: التباين ، $e \approx 2.718$ ، π=3.14 ، واحتمال الحادث X هو الذي يقع بين النقطتين a ، b هو:

$$p(a < x < b <) = \int_a^b f(x)dx$$

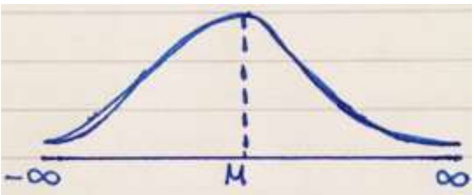
وسنعبر عن المتغير العشوائي X والذي يخضع للتوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه س٢ بالرمز (س ٢ ,X:N (M

٢- **التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution):** هو التوزيع الطبيعي الذي معدله (وسد الحسابي) يساوي صفر وتباينه يساوي ١، وسنعبر عن التوزيع بالرمز Z: N (0, 1).

نظرية: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو المعدل μ والتباين س٢ فإن توزيه المتغير العشوائي:

$Z = \frac{X-M}{\text{س}}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري.

كل قيمة من X تقابلها قيمة من قيم Z حسب التحويل السابق وتسمى قيم Z القيم المعيارية المقابلة لقيم X.



❖ **خواص التوزيع الطبيعي:**

١- مماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي M بحيث يشبه شكله شكل الجرس.

٢- له قيمة واحدة، وبذلك له منوال واحد ينطبق على الوسط الحسابي M.

٣- تقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندا $X \to -\infty$ ، $X \to \infty$.

٤- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي ١.

مثال: إذا كان X: N (70,25) ، أوجد القيم المعيارية المقابلة لكل من القيم التالية:

١- $X_1 = 62$

٢- $X_2 = 13$

الحل: لتحويل قيم X إلى قيم Z ، نستخدم التحويل التالي: $Z = \frac{X-M}{\text{س}}$ (س= ..... المعياري)

1- $Z_1 = \frac{65-70}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

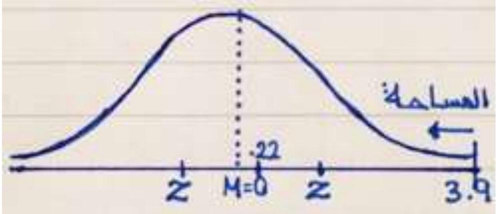
2- $Z_2 = \frac{13-7-}{5} = \frac{-57}{5}$

❖ **المساحات تحت التوزيع الطبيعي:** نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد المساحة المحصورة بين متغيرين عشوائيين حيث تعطى هذه الجداول المساحة إلى يسار Z ثم بشكل عام موجبة كانت أم سالبة بمعنى

.P (Z ≤ z)

لاحظو أن العامود الايسر في الجدول يعطي قيم. الخانة العشرية الثانية وتقاطع الصف مع العامود يعطي المساحة المطلوبة .

المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري :



(قيم Z موجبة) > نستخدم القيم الإحصائية لقيم Z الموجبة

(قيم Z سالبة) > نستخدم الجداول الإحصائية لقيم Z السالبة

[داخل جسم الجدول هي عبارة عن المساحات التي تقع على يسار قيمة معيات معينة]

❖ **أمثلة على المساحة التي تقع على يسار قيم معيارية مختلفة :**

هي عبارة عن المساحات على يسار قيمة معيارية معينة

= 1	Z 3.4
= 0.6982	Z 0.52
=0.0003	Z 3.48
0.4562	Z 0.11

القيمة المعيارية Z المقابلة لقيمة X المختلفة

المحاضرة التاسعة

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

$$X; N(\mu, \sigma^2) \Longrightarrow \mathcal{Z}; N(0,1)$$

المتغير العشوائي Z والذي يقابل المتغير العشوائي X حيث ينتمي هنا المتغير Z الذي توزيعه الطبيعي المعياري الذي وسطه العدد ٠ وتباينه العدد ١	المتغير العشوائي X ينتمي الى التوزيع الطبيعي الذي معدلة μ وتباينه σ^2

وهنالك صيغة تحويل يتم من خلالها إيجار قيمة Z المقابلة لقيم X المختلفة والتي تعطى على الشكل التالي :

$$\mathcal{Z} = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

μ = الوسط الحسابي للتوزيع الاصلي / σ = الانحراف المعياري للتوزيع الاصلي / X = قيمة المتغير العشوائي

مثال : إذا كان لدينا التوزيع الطبيعي المعياري ($\mathcal{Z}; N(0,1)$ ، أوجد مايلي :

1) $P(Z < 1)$
2) $P(Z < -1.96)$
3) $P(Z > 2.57)$
4) $P(-1.23 < Z < -0.68)$

الحل :

z	0.00	0.01	0.02
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686

1- $P(Z < 1)$= 0.8413

نستخرج هذه القيمة من الجدول مباشرة (لان الجدول دائماً تعطينا المساحات التي تقع على يسار قيمة معيارية معينة)

z	0.09	0.08	0.07	0.06
−1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250
−1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314
−1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392
−1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485
−1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594

2- $P(Z < -1.96)$=0.0250

مباشرة من الجدول

3- $P(Z > 2.57)$

سيتم تحويلها لان يتجه لليسار فإن راح نقول

1-$P(Z < 2.57)$ = 1- 0.9949 = 0.0051

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962

4- $P(-1.23 < Z < -0.68)$ = P (Z< - 0.68) – P (Z< - 1.23) = 0.248 – 0.1093 = 0.139

نطرح الاكبر   من الاصغر

z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03
−1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764
−1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918
−1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093
−1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292
−1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515
−0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762
−0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033
−0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327
−0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643
−0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981

إذا كان لدينا التوزيع الطبيعي X;N(65,36) أوجد:

1) P (X > 55)
2) P (X < 68)
3) P (50 < X< 70)

الحل : لابد من عملية تحويل قيم المتغير العشوائي X والتي تنتمي الى المعطى الى قيم معيارية مقابلةZ ولإيجاد المساحات المطلوبة

1) P (X > 55)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{55-65}{6} = -\frac{10}{6} = -1.67$$

$$\sigma^2 = 36 , \sqrt{\sigma} = \sqrt{36} , \sigma = 6$$

P (X > 55) = P (Z > - 1.67)

نفس المثال اللي قبل راح نقلبها

0.9525 = = 1- P (Z < - 1.67) = 1 – 0.0475

من الجدول

2) P (X < 68)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{68-65}{6} = 0.5$$

P (X < 68) = P (Z < 0.5) = 0.6915

من الجدول

3) P (50 < X< 70)

$$Z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{50-65}{6} = -2.5$$

$$Z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{70-65}{6} = 0.83$$

P (50 < X< 70) = P (-2.5 < Z< 0.83)

P (Z < 0.83) – P (Z < - 2.5)

= 0.7967 – 0.0062 = 0.7905

تطبيقات على التوزيع الطبيعي
مثال : تخضع اوزان عبوات احدى انواع الحلويات لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي 85 غم وانحرافه يساوي 2.5 غم:

أ) ماهو احتمال ان وزن احدى العبوات والتي اخذت بشكل عشوائي تزيد عن 90 غم
ب) ماهو احتمال ان وزن احدى العبوات والتي اخذت بشكل عشوائي تقل عن 82 غم

المطلوب($X \,;\, N\,(85, 2.5^2)$:-

A) P (X> 90)
B) P (X< 82)

الحل : لابد من ان احول القيم كما في المثال السابق:

A) P (X> 90)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{90-85}{2.5} = 2$$

P (X > 90) = P (Z > 2)
= 1 – 0.9772 = 0.0228

B) P (X< 82)

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{82-85}{2.5} = -1.2$$

P (X< 82) = P (Z< -1.2)
= 0.1151

مثال: تخضع تكاليف الولادة الطبيعية في مستشفيات بلد ما لتوزيع طبيعي وسطه 115 دولار وتباينه 49 دولار ، ما احتمال ان تكون تكاليف احدى الولادات الطبيعية في هذا البلد بين العددين 104 دولار و 122 دولار ؟

المعطى : (X;N (115, 49
المطلوب : (P (104 < X < 122

الحل:

P (X < 122) – P (X < 104)

$$Z_1 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{122-115}{7} = 1 \;,\; Z_2 = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{104-115}{7} = -1.57$$

P (Z < 1) – P (Z < -1.57)
0.8413 – 0.0582 = 0.7831

المحاضرة العاشرة – الأسبوع السادس
الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

٢. توزيع t :
ان احد التوزيعات الاحتمالية المتصلة الهامة لمتغير عشوائي متصل هو توزيع t .
تعريف : اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي t
معطى بالمعادلة :

$$\mathbf{f}\ (\mathbf{t}) = \ \mathbf{c}\ (\ \mathbf{1} + \frac{\mathbf{t^2}}{\mathbf{v}})^{-\mathbf{v}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}, -\infty < t < \infty$$

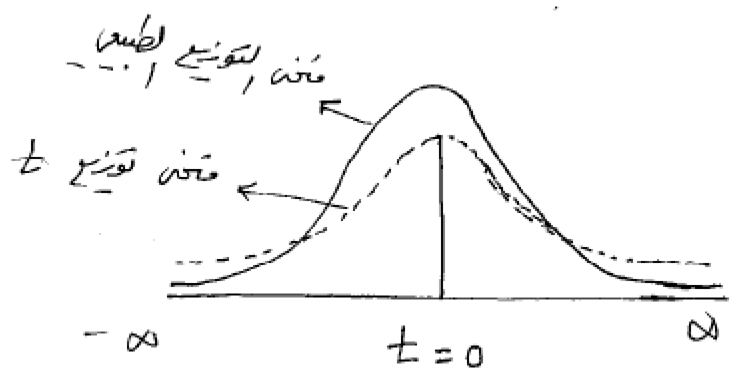
فان هذا التوزيع يسمى توزيع t حيث v درجات الحرية و c ثابت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .

❖ **خواص منحنى توزيع t :**

١- يشبه منحنى توزيع t شكل الجرس ، وهو احادي المنوال له قيمه تقابل t=0 ، بحيث يتماثل منحنى الشكل حول العمود المقام على t

٢- شكله يشبه شكل التوزيع الطبيعي المعياري ألا انه اكثر انخفاضاً منه ، بالاضافه الى ان تقارب طرفيه من الصفر عندما $t \to \infty, t \to -\infty$ ابطأ من تقارب منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

و الشكل التالي يوضح منحنى التوزيع الطبيعي مع منحنى توزيع t :



ملاحظة : يعتمد منحنى توزيع t على معلمة هامة تحدد شكل ذلك المنحنى وهي درجات الحرية فعندما تزداد درجات الحرية يقترب منحنى توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري .

❖ **حساب الاحتمالات تحت توزيع t :**

تحسب الاحتمالات تحت توزيع t من خلال حساب المساحات المختلفة التي تقع على يسار قيم t بدرجات حرية مختلفة ، ويوجد جداول خاصة لهذه المساحات ويكون استعمال هذه الجداول كالتالي :

١- تسجل درجات الحرية v في العمود الايسر ، وعلى الخط الأفقي تسجل مساحات معينة

٢- ان جدول t يعطي قيم $t\left[\surd; v\right]$ القريبة من 1 ، لهذا عندما تكون √ صغيرة مثل 0.05 ، 0.01 وغريها ، فأننا نستعمل القاعدة $t\left[\surd; v\right] = -t\left[1 - \surd; v\right]$ وذلك بسبب تماثل توزيع t حول العمود المقام على الصفر .

مثال : المتغير العشوائي t يتبع لتوزيع t بدرجات حرية 4 ، اوجد

١) المساحة الواقعة على يسار 1.532 ؟

$$t\left[\surd; 4\right] = 1.531$$

من جدول توزيع مباشرة نجد ان $\surd = 0.90$

٢) ما هي قيمة t التي يقع الى يسارها المساحة 0.01 ؟

$$t\ [0.01; 4] = \quad ??$$
$$t\ [0.01; 4] = -t\ [1 - 0.01,4]$$
$$= -t\ [0.99,4]$$
$$= -3.747$$

٣) قيمة √ بحيث $\mathbf{t}\left[\surd; \mathbf{4}\right] = -\mathbf{2.776}$ ؟

$$t\left[\surd; 4\right] = -2.776$$

من الجدول مباشرة ، نجد ان قيمة المساحة التي تحقق الشرط

$$t\left[\surd; 4\right] = 2.776$$

هي $\surd = 0.975$

وبسبب وجود اشارة السالب ، لابد ان اخذ المتممة من العدد 1 ، وبذلك فان قيمة √ التي تحقق الشرط

$$[\surd ; 4] = \ -2.776$$

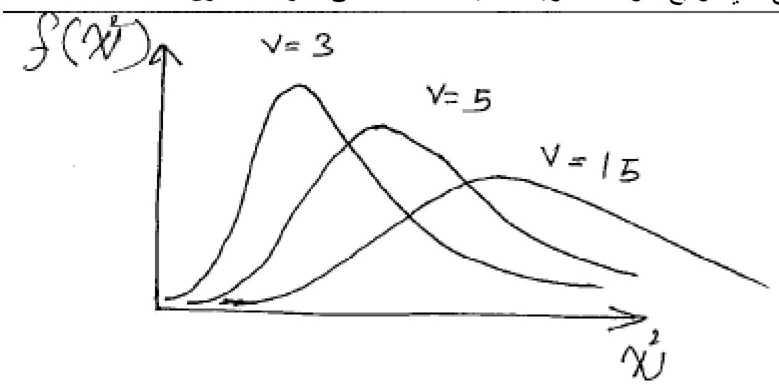
هي $\surd = 1 - 0.975 = 0.025$

٣. توزيع كاي تربيع :

تعريف : اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي x^2 معطى بالمعادلة :

$$\mathbf{f(x^2) = \ c\ (x^2)^{(\ v-2)\backslash 2}\ e^{-\frac{x^2}{2}}} \quad , \qquad \mathbf{x^2} > 0$$

فان هذا التوزيع يسمى توزيع كاي تربيع بدرجات حرية v حيث تعتمد c على v وتحدد تكون المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .



لإيجاد المساحات تحت منحنى كاي تربيع أر ايجاد القيم التي تقع الى يسارها او الى يمينها مساحة معينة ، سنستخدم جدول كاي تربيع حيث يسجل عدد درجات الحرية في العمود الأيسر ، وتسجل المساحات التي تقع تاى يسار قيمة x^2 على الخط الافقي وتسجل قيم x^2 داخل جسم الجدول .

مثال : اذا كان المتغير العشوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية 10 ، اوجد :-

أ) قيمة x^2 التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة .

$$x^2\ [0.99\ ; 10] \qquad\qquad = ??$$

من الجدول مباشرة : $x^2 = 23.209$

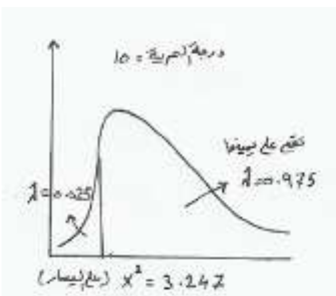
ب) قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة .

قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة

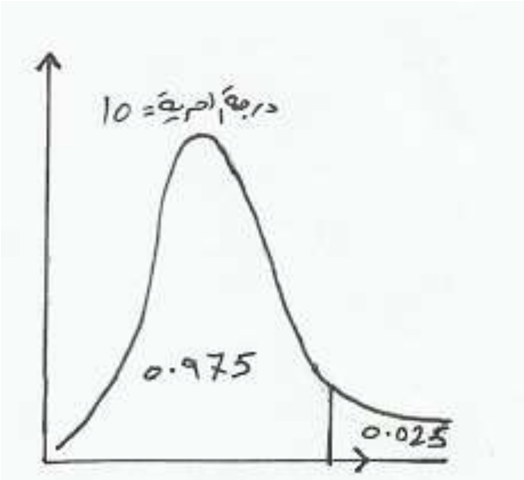
لاحظوا ان المساحة التي تقع على يمين $0.01 = \surd$ هي المساحة التي تقع على يسار $0.99 = \surd$ ، وبذالك فان قيمة $x^2 = 23.209$

ت) قيمة x^2 التي يكون الى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون الى يسارها 0.025 من المساحة ؟

المساحة اليمين $x^2[0.975\ ; 10] = x^2[0.025\ ; 10]$ المساحة من اليسار



$$x^2[0.025\ ; 10] = \ x^2[0.975\ ; 10] = 3.247$$



ملاحظة : نعبر عن قيمة المتغير العشوائي x^2 التي يقع على يسارها المساحة √ بدرجة حرية v تحت منحنى توزيع x^2 بالرمز

$$\mathbf{x^2}\ [\surd; \mathbf{v}]$$

تمرين : اذا كان المتغير العشوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي بدرجة حرية 15 = v اوجد :

١) قيمة x^2 التي تقع 0.99 من المساحة على يسارها ؟

٢) قيمة x^2 التي تقع 0.01 من المساحة على يمينها ؟

المحاضرة الحادية عشر

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

٤- توزيع F: (The F-Distribution)

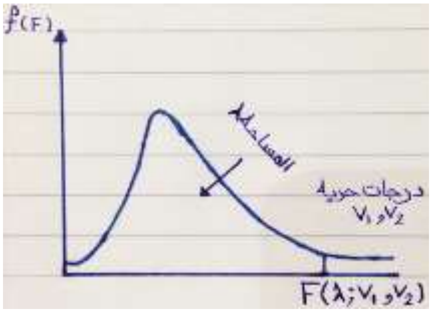
يعتبر توزيع F من التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي تستعمل في اختبار الفرضيات (موضوع الباب السادس).

تعريف: إذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي F

$$f(F) = \frac{cF\ (v_1-2)/2}{(v_2+v_1F)^{(v_1+v_2)/2}},\ F > 0$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع F ويعبر عنه بالرمز $F(V_1, V_2)$ حيث أن V_1 , V_2 هي درجات الحرية و C هي ثابت يعتمد على V_1 , V_2 ويعين بحيث تصبح المساحة أسفل منحنى التوزيع تساوي ١.

يوجد لدينا في هذا التوزيع عدوان من الدرجة الحرية، وبما أن V_2 يظهر في المقام فقط فإنه يعتبر درجات الحرية، ويعتبر V_1 درجات حرية البسط ويظهر V_1 قبل V_2 في الرموز $F(V_1, V_2)$.



خواص منحنى توزيع F: منحنى توزيع F أحادي المنوال ملتوٍ قليلاً إلى اليمين، وكلما زادت درجات الحرية V_1 , V_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.

مثال: أوجدي ما يلي:

١- ←**F(0.95 ; 9.7)** معدل (٣,٦٤ ، ٣,٧٣)

←F = 3.68

٢- ←**F(0.99 ; 9.7)** معدل (٦,٦٢ ، ٦,٨٤)

←F = 6.73

وفي حال إيجاد قيم F إذا كانت المساحة على يسارها وقيم غير موجودة في الجدول (بمعنى قيم صغيرة) مثل $F(0.05 ; V_1 , V_2)$ أو $F(0.01 ; V_1 , V_2)$ ، ففي هذه الحالة تستخدم الصيغة التالية: $F(\lambda; V_1 ,V_2) = \frac{1}{F(1-\lambda; V_2 ,V_1)}$

مثال: أوجدي قيمة ما يلي:

1- $F(0.05 ; 10 , 7) = \frac{1}{F(1-0.05;7,10)} = \frac{1}{F(0.95;7,10)} = \frac{1}{3.14}$

2- $F(0.01 ; 1 , 15) = \frac{1}{F(0.99 ;15 ,1)} = \frac{1}{\frac{6056+6209}{2}}$

تمرين: أوجد المساحة إلى يسار F=3 إذا كانت $V_1 = 7$ ، $V_2 = 20$ ؟

أوجد المساحة λ بحيث $F(\lambda ; 5 , 5)$

الباب الرابع: توزيعات المعانية

إحصاءات العينة: "Sample Statistics"

مقدمة: يخضع المجتمع الذي تؤخذ منه العينة لتوزيع معين وهو توزيع المجتمع حيث تسعى بالتوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي يمثل كأنة أفراد ذلك المجتمع.

أما إحصاء العينة فهو أي اقتران تتعين قيمة من العينة.

فمثلاً الوسط الحسابي للعينة هو $\frac{\sum_{i=0}^{n} x}{n} = \frac{1}{x}$

هو إحصاء عينة . حيث نلاحظ أن قيمة تتغير من عينه لأخرى. فمثلاً أذا أخذت عينة حجمهاn بحيث كان لدينا $X_1 ,X_2,......,X_n$ فإن هذه العينة تحدد قيمة ما للوسط الحسابي ،وإذا أخذت عينة عشوائية أخرى بتقسيم الحجم n فإن الوسط الحساب لهذا العينة ربما يتغير عن الوسط الحسابي للعينة الأولى وهكذا. وهذا يعني أن X فتتغير عشوائي تتغير قيمته بتغير العينة .

تعريف (١): المعلمة (parameter) هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالوسط الحسابي للتوزيع أو الانحراف المعياري له.

تعريف (٢): إحصاء العينة (Sample Statistic)هو أي متغير تتعين قيمته من جميع العينات ذا حجم معين مأخوذة من مجتمع ما. وباختصار هو اقتران تتعين قيمته من العينة.

ومثال عليه: الوسط الحسابي للعينة X.

تعريف (٣): يسمى التوزيع الاحتمالي لإحصاء العينة توزيع المعاينة لذلك الإحصاء.

المحاضرة الثانية عشر
الفصل الرابع: توزيعات المعاينة

❖ **توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$:**

نظرية (١): إذا كان X يخضع للتوزيع وسطه (معدله) M وتباينه س٢ وكان $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمحسوبة من هذا المجتمع فإن:

١- توزيع$\overline{X}$ هو: $M_{\overline{X}} = M$

٢- تباين $\overline{X}$ هو: $\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$

شرطه أن السحب مع الارجاع.

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي معدله ٧٠ وتباينه ٤٠. إذا كان حجم العينة ١٠، فأوجد:

١- الوسط الحسابي للعينة.

$M_{\overline{X}} = M = 70$

٢- تباين العينة.

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

٣- الانحراف المعياري للعينة.

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \sqrt{4} = 2$$

❖ **توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\bar{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي:**

نظرية (٢): إذا كان $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه M (معدله) وتباينه س٢ فإن توزيع $\bar{X}$ يكون التوزيع الطبيعي ذا الوسط M والتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ حيث أن المتغير العشوائي $Z = \frac{\bar{X}-M}{\sigma/\sqrt{n}}$ يخضع لتوزيع طبيعي معياري.

مثال: تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي وسطه ٦٥ وانحراف معياري ١٨. اخذت عينة عشوائية حجمها ٣٦ طالب، احسب:

١- احتمال أن يزيد وسط علامات العينة على ٧٤؟

$$P(\bar{X} > 74) = P(Z > \frac{\bar{X}-M}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(Z > \frac{74-65}{18/\sqrt{36}})$$
$$= P(Z > 3)$$
$$= 1 - P(Z < 3)$$
$$= 1 - 0.9987$$
$$= 0.0013$$

٢- احتمال أن يقل وسط علامات العينة على ٦٠؟

$$P(\bar{X} < 60) = O(Z < \frac{\bar{X}-M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$
$$= P(Z < \frac{60-65}{18/\sqrt{36}})$$
$$= P(Z < -1.67)$$

نظرية (٣): المعاينة من مجتمع طبيعي وسطه M وتباينه س٢ غير معلوم.

إذا اخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه M وتباينه س٢ غير وعلوم بحيث كان $\bar{M}$ (الوسط الحسابي للعينة) لعينة حجمها n وانحرافها المعياري s فإن المتغير: $T = \frac{\bar{X}-M}{s/\sqrt{n}}$

يخضع لتوزيع t بدرجات حرية v = n – 1

مثال: إذا كانت أطوال الطلاب في أحد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي المتوسط يساوي ١٦٠سم، إذا سحبت عينة عشوائية من ٤ طلاب فما احتمال أن يقل متوسطها الحسابي عن ١٦٦سم، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي ١٠سم؟

الحل: $P(\bar{X} < 166)$?

$$T = \frac{\bar{X}-M}{s/\sqrt{n}} = \frac{166-160}{10/\sqrt{4}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

P(t[λ,3]=1.2) = 0.90

نظرية (٤): توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينين $(\bar{X} - \bar{Y})$:

إذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي معدله M_1 وتباينه س٢، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي معدله M_2 وتباينه س٢ بحيث كان مستقل عن المجتمع الأول، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\bar{X}$ والوسط الحسابي للعينة الثانية $\bar{Y}$ فإن توزيع الفرق وسطي العينة بين $(\bar{X} - \bar{Y})$ يكون التوزيع الطبيعي ذا معدل $(M_1 - M_2)$ والتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$ بحيث:

$$Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري

مثال: تخضع علامات الناجحين من امتحان الدراسة الثانوية العامة في احدى المدارس (أ) لتوزيع طبيعي معدله ٧٠ وانحرافه المعياري ١٢، وفي مدرسة ثانية (ب) تخضه العلامات للتوزيع الطبيعي معدله ٧٤ وانحرافه المعياري ١٦، اخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ من المدرسة (أ) وعينة عشوائية اخرى حجمها ٩ من المدرسة (ب)، على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\overline{X}$، وللعينة الثانية $\overline{Y}$، أوجد:

أ- $P(\overline{Y}-\overline{X}) > 8$ ؟>احتمال الفرق بين وسطين عينين

ب- $P(\overline{X}-\overline{Y}) < 3$ ؟

الحل: أ-

$$P[\frac{Z=(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{8-(74-70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}]$$

$$P(Z > \frac{8-4}{\sqrt{9-26.4}}) = P(Z > 0.65)$$

$$= 1 - P(z < 0.65)$$

$$= 1 - 0.7422$$

$$= 0.2578$$

ب- $P[\frac{Z=(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \frac{3-(70-74)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}$

$$P\left(Z < \frac{3-(-4)}{\sqrt{9+28.4}}\right) = P(Z < \frac{7}{\sqrt{37.4}})$$

$$= P(Z < 1.14)$$

$$= 0.8729$$

تمرين ومسائل:

سؤال (١): إذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ذا المعدل ٢٥ والتباين ٣٦، أجب عن الاسئلة التالية:

a. أوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد X=10 ؟
b. اذا تم سحب عينه حجمها ١٦ من ذلك التوزيع ، اوجد القيمة المعياريه المقابله للعدد $\overline{X} = 10$ ؟
c. أوجد الانحراف المعياري للعينة إذا علمت أن n=16 ؟

سؤال (٢) : اذا كان لدينا (25 , 15) x : n ، سحبت منه عينة حجمها 10 ، اوجد $p(\overline{X} < 10$ ؟

سؤال (٣): إذا كان لدينا التوزيع الطبيعي X;N (10,25) والتوزيع الآخر Y;N (15,36)، ومستقل عن الاول ، سحبت عينة من المجتمع الأول حجمها ١٦، وسحبت عينة من المجتمع الآخر حجمها ٢٥، أوجد احتمال الفرق بين $(\overline{Y}-\overline{X})$ يقل عن العدد ٣ ؟

المطلوب: [P $(\overline{Y}-\overline{X}) < 3$]

المحاضرة الثالثة عشر
الفصل الخامس: التقدير Estimation

مقدمة: الاستنتاجات الاحصائية هي التعميمات والتوازن التي يمكن اتخاذها بناءً على معلومات او بيانات قمت بجمعها أو كانت متوفرة لديك.
فمثلاً إذا ارادت شركة أدوية أن تسوق دواء ما ، فإنه يجب عليها أن تحصل على تصريح أولاً ويتم ذلك من خلال اثبات أن الدواء المنتج قد جُرب واثبت جدوى استعماله، وهذا يعني ان عينة من المرضى قد استعملوا ذلك الدواء وحصلوا على نتائج ايجابية، وبذلك فإن الشركة بنت قرارها من خلال دراسة تلك العينة.
المثال السابق يوضح أنه من أهم فروح الاحصاء الاستنتاجي هو عمليتي التق\اير واختبار الفرضيات. حيث حيث نقوم في الفصل الخامس بدراسة مفهوم التقدير على أن يتم دراسة اختبار الفرضيات في الفصل السادس لاحقاً إن شاء الله.

- **مفهوم التقدير :** تتم عملية التقدير من خلال اختبار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مقررات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد اجراءها وتعميم ذلك على المجتمع.

إن أي توزيع احتمالي يحتوى على معالم تحدد شكله على P ⟵ نسبة النجاح ، n ⟵ عدد مرات اجراء التجربة
أما في توزيع بواسون فيعتمد شكله على معلمة λ ⟵ معدل النجاحات في فترة زمنية معينة
وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة بالنسبة لهذه التوزيعات وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم.
هناك طريقتان اساسيتان لتقدير معالم المجتمع المجهولة هما:
١- التقدير بنقطة. ٢- التقدير بفترة.

أولاً: التقدير بنقطة: يمكن ايجاد تقديرات للمعالم الخاصة بالمجتمع من خلال البيانات المأخوذة من عينة عشوائية وذلك بحساب ما يسمى بالإحصاءات، فمثلاً في المجتمع الطبيعي يستخدم متوسط العينة العشوائية $\overline{X}$ كتقدير لمتوسط المجتمع M وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع σ
في توزيع بواسون يستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ كتقدير لمعدل عدد النجاحات في تجربة بواسون λ، ($\lambda = \overline{X}$)
أما في توزيع ذات الحدين فيستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ كتقدير لنسبة النجاح P ($P = \overline{X}$) ... وهكذا
وتسمى هذه التقديرات بالتقدير النقطي حيث أنها تأخذ قيمة واحدة فقط محسوبة من دراسة عناصر العينة.
مثال ١ : اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي ($N(\mu , \sigma$ فكانت قيمتها ٥،٥، ٣، ٧، ٤، ٦، أوجد تقديراً معدل المجتمع μ وتقديراً تباين المجتمع σ ؟
الحل : أولاً : سنقوم بإيجاد الوسط الحسابي لعناصر العينة لدينا

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} 6+4+7+3+5+5}{6} = \frac{30}{6} = 5$$

وبناءاً عليه ، نقول ان الوسط الحسابي للمجتمع يساوي ٥
بمعنى ان : $\mu = \overline{X} = 5$
الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً μ=5
ثانياً : ولحساب تباين املجتمع ، لابد من حساب تباين العينة ومن ثم يمكن تقدير تبين المجتمع

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_1 - \overline{X})^2}{n-1}$$

$$= \frac{(6-5)^2+(4-5)^2+(7-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(5-5)^2}{6-1}$$

$$= \frac{1+1+4+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

وبذلك نستنتج ان تباين المجتمع σ^2 يساوي تقديراً تباين العينة بمعنى $\sigma^2 = 2$
وكذلك يمكن تقدير الانحراف المعياري للمجتمع من خلال ايجاد الانحراف المعياري للعينة بمعنى : $\sigma = S = \sqrt{2}$
$\sigma = \sqrt{2.5}$ (الانحراف المعياري للمجتمع تقديراً يساوي ٢،٥)
مثال: في توزيع بواسون، قدِّر عدد النجاحات في فترة زمنية معينة بناءً على عينة عشوائية اعطت القيم التالية 7,7,7,7,2 ؟
الحل: لابد من ايجاد الوسط الحسابي للعينة ، ومن ثم استطيع ان اقدر عدد النجاحات λ

$$\overline{X} = \frac{7+7+7+7+2}{5} = \frac{30}{5} = 6$$
$$\lambda = 6$$

تمرين: إذا اخذت عينة عشوائية حجمها 5 ، بحيث كان $\sum_{i=1}^{5} xi = 30$ مجتمع برنولي (ذات الحدين)، أوجد التقدير النقطي للمعلمة P ؟

ثانياً: التقدير بفترة (Interred Estimation):
من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة مجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كان هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة نتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها. إن مثل هذا النوع من التقديرات يسمى تقدير بفترة أو فترة ثقة لمعلمة من معالم مجتمع ما ، علماً بأن دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة ، فإنه ليس هنالك سبب يبرر امكانية الحصول على تقدير مجتمع دون الوقع في نسبة معينة من الخطأ
وسنتعرف في هذا البند على ايجاد فترات الثقة للوسط الحسابي (M) لمجتمع ما ، وكذلك فترات الثقة للنسبة P واخيراً ايجاد فترات الثقة للتباين σ^2

١. **إيجاد فترات الوسط الحسابي μ:**

نظرية (١): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي N(μ , σ^2) بحيث كانت σ^2 معلومة فإن فترة ١٠٠% (X-١) للمعلمة μ هي: $\overline{X} - Z_{1-x/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-x/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

حيث $\overline{X}$: الوسط الحسابي للعينة
$Z_{1-x/2}$: هي القيمة على محور Z والتي تقع على يسارها مساحة 1-x/2 ونجد قيمتها من خلال جداول التوزيع الطبيعي المعياري
σ : الانحراف المعياري للمجتمع
n : حجم العينة

تفسير فترات الثقة:
تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة مثل (μ) باستعمال أسلوب العينة. وسيكون لدينا عدة أنواع دقة فترات الثقة منها ٩٠% ، ٩٥% ، ٩٨% وهذا ما نقصده بالرمز 100(1-x)100% و سنأخذ توضيحاً حول شرح مفهوم فترة ٩٥% حيث أن البقية لها نفس السلوك.
مثل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن
$$(\overline{X} - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\overline{X} + Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$
هي فترة نهايتها متغيران عشوائيان تحاول احتواء المجهولة μ.

٢- أن تفسير الاحتمال
$$(\overline{X} - Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\overline{X} + Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 95\%$$
أن التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن ٩٥% من فترات الثقة ستحتوي المعلمة μ وأن ٥% منها لا تحويها.
(بمعنى إذا أخذنا ١٠٠ عينة عشوائية ذات الحجم وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ ومن خلاله نحسب فترة الثقة للوسط الحسابي للمجتمع μ الصحيح وفقط 5% ، سيكون الوسط الحسابي للمجتمع خارج هذه الفترات

المحاضرة الرابعة عشر
تابع الفصل الخامس : التقدير

مثال: عينة عشوائية حجمها n=25 ، أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري س = ٤ فأعطت المعدل $\overline{X} = 60$. أوجد فترة ٩٨% ثقة الوسط المجتمع μ ؟

الحل: قبل البدء بتطبيق نص النظرية يجب أن نقوم بعملية التحويل

$1- \propto = 98\% \rightarrow 1- \propto/2 = ??$
$1 - \propto = 2\%$
$\propto/2 = 1\%$
$1 - \propto/2 = 99\%$

وبتعويض القيم المعطاه في السؤال نحصل على

$$(\overline{X} - Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}} , \overline{X} + Z_{1-\propto/2}\frac{س}{\sqrt{n}})$$

$$(60 - Z_{0.99}\frac{4}{\sqrt{25}} , 60 + Z_{0.99}\frac{4}{\sqrt{25}})$$

$$60 - 2.33 \times \frac{4}{5} , 60 + 2.33 \times \frac{4}{5}$$

$$(58.14 , 61.86)$$

ملاحظة: يمكن تطبيق النظرية السابقة من حال كان السحب من مجتمع غير طبيعي وذلك من خلال استخدام نظرية التقارب بشرط ان حجم العينة (n) سيكون كبيراً ($n \geq 30$) وبذلك سنتعرف على النظرية رقم (٢).

نظرية (٢): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباين غير معلوم فإن فترة 100(1-x)% ثقة للوسط الحسابي μ هي:

$$(\overline{X} - t\left[1 - \frac{\propto}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}} , \overline{X} + t\left[a - \frac{\propto}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}$$

حيث S: الانحراف المعياري للعينة.

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها ١٥ من مجتمع طبيعي فأعطت $\overline{X} = 17.4$, S = 2.1 . أوجد فترة ٩٥% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

الحل: نقوم بعملية التحويل $1 - \propto = 95\%$

$\propto = 5\%$

$\propto/2 = 2.5\%$

$1 - \propto/2 = 1 - 2.5\% = 97.5\% = 0.975$

$$(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} , 17.4 + 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}})$$

←(16.24 , 18.56) فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع ٩٥%

نظرية (٣): (فترات الثقة للفرق بين وسطين)

إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots X_n$ **عينة عشوائية مسحوبة من مجتمع طبيعي ($N(\mu_1 , س_1^2$ ، وكانت $Y_1 , Y_2 , \dots Y_n$ عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي ($N(\mu_2 , س_2^2$** مستقل عن الأول ، بحيث كانت $س_1^2$ ، $س_2^2$ معلومتين فإن هذه الثقة 100(1 – ∝)% للفرق بين الوسطين (M_1 , M_2) هي:

$$[(\overline{X} - \overline{Y})\, Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1} + \frac{س_1^2}{n_2}} , (\overline{X} - \overline{Y})\, Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{س_1^2}{n_1} + \frac{س_1^2}{n_2}}$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها ٩ من مجتمع طبيعي ($N(M_1 , 25$ ثم أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠ من مجتمع طبيعي ($N(M_2 , 40$ مستقل عن الأول، فإذا أعطيت العينة الأولى وسطاً حسابياً = ٣٢ ، بينما أعطيت العينة الثانية وسطاً حسابياً = ٤٧ أوجد:

أ- فترة ثقة ٩٥% للفرق بين الوسطين ($M_1 - M_2$) ؟

ب- فترة ثقة ٩٠% للفرق بين الوسطين ($M_2 - M_1$)؟

الحل: المعطيات:

المجتمع الأول	المجتمع الثاني
$س_1^2 = 25$	$س_2^2 = 40$
$n_1 = 9$	$n_2 = 10$
$\overline{X} = 32$	$\overline{Y} = 74$

المطلوب: أ- فترة ٩٥% ثقة للفرق $M_1 - M_2$؟

$1 - \propto = 95\% \rightarrow 1 - \propto/2 = 97\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(32-47) - Z_{0.975}\times\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}, (32-47) + Z_{0.975}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}]$$

$$(-15 - 1.96\times\sqrt{\frac{25}{9}+4}, -15 - 1.96\times\sqrt{\frac{25}{9}+4})$$

$$(-20.1, -9.9)$$

$$\overline{X} - \overline{Y} = 32 - 47 = -15$$

ب- فترة ثقة 90% للفرق بين $M_2 - M_1$؟

$1 - \propto = 90\% \rightarrow 1 - \propto/2 = 95\%$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(47-32) - Z_{0.95}\times\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}, (47-32) + Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{40}{10}}]$$

$$(15 - 1.64\times\sqrt{\frac{25}{9}+4}, 15 + 1.64\times\sqrt{\frac{25}{9}+4})$$

$$(10.73, 19.27)$$

$$\overline{X} - \overline{Y} = 15$$

تمرين : عينة عشوائيه حجمها n=16 سحبة من مجتمع طبيعي($N(\mu_1, س_1^2)$ اذا علمت ان الوسط الحسابي للعينة يساوي ٢٠ اوجد

1) **الوسط الحسابي للمجتمع اذا علمت ان تباين المجتمع ٩ ..؟**
2) **الوسط الحسابي للمجتمع اذا علمت ان تباين العينة يساوي ٩ علماً بان فترة الثقه المطلوبه هي ٩٠% ..؟**

المحاضرة السادسة والسابعة عشر
تابع الفصل الخامس : التقدير

٢) تقدير النسبة:

إن تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع ما ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معينة تحصر نسبة النجاح P بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية (٤): إذا كان $\overline{P} = X/n$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكان n كبيراً ، فإن فترة $100(1-\propto)\%$ ثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي:

$$(\overline{P} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}, (\overline{P} - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}})$$

مثال: لإيجاد فترة ٩٥% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان ١٥ طالب. أوجد فترة الثقة المطلوبة ؟

الحل: $1 - X = 95\% \rightarrow 1 - X/2 = 975\%$

وأيضاً يجب إيجاد $\overline{P}$: (التقطير النقطي لنسبة النجاح)

$$\overline{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$(0.15 - Z_{0.975}\times\sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}, 0.15 + Z_{0.975}\times\sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}})$$

$$(0.15 - 1.96\times\sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}, 0.15 + 1.96\times\sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}})$$

$$(0.08, 0.22)$$

نظرية (٥): إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots X_n$ عينة عشوائية من مجتمع برنولي $b(1 . P_2)$ وكانت $Y_1 , Y_2 , \dots Y_n$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b(1 . P_2)$ ، فإن فترة $100(1 – X)\%$ ثقة للفرق بين النسبتين $(P_1 – P_2)$ هي:

$$[(\overline{P}_1 - \overline{P}_2) - Z_{1-\propto/2}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1}+\frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}} , \overline{P}_1 - \overline{P}_2) + Z_{1-X/2}\sqrt{\frac{\overline{P}_1(1-\overline{P}_1)}{n_1}+\frac{\overline{P}_2(1-\overline{P}_2)}{n_2}}]$$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ طالبة من المدرسة (أ) ، ووجد أن ٢٧ طالبة لديهم تسوس في الأسنان ، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى حجمها ٨٠ من المدرسة (ب) ووجد أن ٢١ طالباً لديهم تسوس في الأسنان. أجد فترة ٩٥% ثقة للفرق بين (P_2 , P_1) ؟

الحل:

(P_1 , P_2) $1- X = 95\% \rightarrow 1 – X/2 = 97.5\%$

$\overline{P}_2 = \frac{12}{80} = 0.15$	$\overline{P}_1 = \frac{27}{100} = 0.27$

حسب النظرية السابقة نجد أن:

$$[(0.27 – 0.15) – Z_{0.975}\times \sqrt{\frac{0.27(1-0.27)}{100}+\frac{0.15(1-0.15)}{80}} , (0.27 – 0.15) + Z_{0.975}\times \sqrt{\frac{0.27(1-0.27)}{100}+\frac{0.15(1-0.15)}{80}}]$$

$$[(0.27 – 0.15) – 1.96\times \sqrt{\frac{0.27(0.73)}{100}+\frac{0.15(0.85)}{80}} , (0.27 – 0.15) + 1.96\times \sqrt{\frac{0.27(0.73)}{100}+\frac{0.15(0.85)}{80}}]$$

$$[(0.12) – 1.96 * 0.0597 , (0.27 – 0.15) + 1.96\times 0.0597]$$

$$[(0.12) – 0.1170 , (0.12) + 0.1170]$$

$$(0.003 , 0.237)$$

$$\overline{P}_1 - \overline{P}_2 = 0.27 – 0.15 = 0.12$$

نظرية (٦): إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي (س ٢ , N(M فإن فترة **$100(1 - \propto)\%$** ثقة للتباين س ٢ هي:

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{X^2\,[1-\frac{\propto}{2}\ ,\ n-1}\ ,\ \frac{(n-1)S^2}{X^2\,[\frac{\propto}{2}\ ,\ n-1}\right)$$

حيث S^2: هو تباين العينة .. **n**: حجم العينة

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري ، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي فترة الثقة للتباين.

مثال: عينة عشوائية حجمها ٢٠ أخذت من مجتمع طبيعي (س ٢ , N(M فأعطت التباين $S^2 = 15$ ، أوجد فترة ٩٠% ثقة للتباين س ٢ ؟

الحل $1 - \propto = 90\%$

$$\propto = 10\%$$

$$\propto/ 2 = 5\% = 0.05$$

$$1 - \propto/ 2= 1 – 0.05 = 0.95$$

نعوض بالقانون :

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{X^2\,[1-\frac{\propto}{2}\ ,\ n-1}\ ,\ \frac{(n-1)S^2}{X^2\,[\frac{\propto}{2}\ ,\ n-1}\right)$$

$$\left(\frac{(20-1)15}{X^2\,[1-\frac{10}{2}\%\ ,\ 20-1}\ ,\ \frac{(20-1)15}{X^2\,[\frac{10}{2}\%\ ,\ 20-1}\right)$$

$$\left(\frac{285}{X^2\,[0.95\ ,\ 19]}\ ,\ \frac{285}{X^2\,[0.05\ ,19]}\right)$$

من جدول توزيع كاي تربيع نجد أن:

$x^2\ [\mathbf{0.95}\ ,\ 19] = \mathbf{30.144}$

$x^2\ [\ 0.05\ ,\ 19] = \mathbf{10.117}$

وحسب النظرية السابقة ، فإن فترة الثقة هي:

$[\ \frac{19\times15}{30.144}\ ,\ \frac{19\times15}{10.117}]$

[9.45 , 28.17]

أما فترة ٩٠% ثقة الانحراف المعياري فهي .. ناخذ الجذر التربيعي :

$[\ \sqrt{9.45}\ ,\sqrt{28.17}\ ]$

= [3.07 , 5.31]

نظرية (٧): إذا كانت $X_1 , X_2 , \ldots , X_n$ عينة عشوائية من المجتمع الطبيعي (س ٢ ١ , N(M وكانت $Y_1 , Y_2 , \ldots ,$ Y_nعينة عشوائية من مجتمع طبيعي (س ٢ ٢, N(M مستقل عن المجتمع الأول ، فإن فترة **%(** ∝ - 1)100 فان نسبة الثقه بين تبايين مجتمعين $\frac{س^2_1}{س^2_2}$ هي:

$(\frac{S_1^2}{S_2^2}\ F\ [\propto/2\ ;\ n_1 - 1\ ,\ n_2 - 1]\ ,\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\ F\ [1 - \propto/2\ ;\ n_1 - 1\ ,\ n_2 - 1]$

مثال: أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 9$ **من مجتمع** $N(\ M_1\ ,\ س^2_1)$ **فأعطت التباين** $S_1^2 = 65.4$ **وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها** $n_2 = 11$ **من مجتمع طبيعي** $N(M_1\ ,\ س^2_1)$ **مستقل عن الأول فأعطت التباين** $S_2^2 = 127.3$ **. أوجد قيمة الفترة ٩٠% ثقة للنسبة** $\frac{س^2_2}{س^2_1}$ **؟**

الحل:

$1 - \propto = 90\%$

$\propto = 10\%$

$\propto/ 2 = 5\% = 0.05$

$1 - \propto/ 2= 1 – 0.05 = 0.95$

نستخرج المعطيات قبل التطبيق بالقانون :

$N_1=9\ ,\ s_1^2=65.4\ ,\ n_2 = 11\ ,\ s_2^2= 127.3\ ,\ \propto/ 2 = 0.05\ ,\ 1 - \propto/2 = 0.95$

الان نعوض مباشره في القانون :

$(\frac{S_2^2}{S_1^2}\ F\ [\propto/2\ ;\ n_1 - 1\ ,\ n_2 - 1]\ ,\ \frac{S_2^2}{S_1^2}\ F\ [1 - \propto/2\ ;\ n_1 - 1\ ,\ n_2 - 1]$

$(\frac{127.3}{65.4}\ F\ [0.05;\ 9 - 1\ ,\ 11 - 1]\ ,\ \frac{127.3}{65.4}\ F\ [0.95\ ;\ 9 - 1\ ,\ 11 - 1]$

$(\frac{127.3}{65.4}\ F\ [0.05;\ 8\ ,\ 10\ ]\ ,\ \frac{127.3}{65.4}\ F\ [0.95\ ;\ 8\ ,\ 10\ ]$

من جدول توزيع **F** نجد أن:

~.. لابد اننا نحولها لان القيمة صغيره > $F[\ 0.05\ ;\ 8\ ,\ 10\ ] = \frac{1}{F\ [\ 0.95\ ;10\ ,8]}$

$= \frac{1}{3.35} = 0.3$

$F\ [\ 0.95\ ;\ 8\ ,\ 10\ ] = 3.07$

ومن صيغة القانون للنظرية السابقة نجد أن:

$[\ \frac{127.3}{65.4} \times 0.3\ ,\ \frac{127.3}{65.4} \times 3.07\ ]$

[0.583 , 5.98]

المحاضرة الثامنة عشر
الفصل السادس : أختبار الفرضيات

مقدمة :
تصادفنا العديد من المشاكل في حياتنا اليومية و يجب اخذ قرار ملائم بشأن تلك المشاكل ، وبما ان اغلب الدراسات هي مستمدة من العينة المسحوبة من المجتمع ، نبعد التقدير للمعالم المختلفة لذالك المجتمع فانه علينا ان نعطيها المزيد من الثقة ، لذا لابد من اتخاذ قرار حول صحة فرضية معينة او عدم صحتها . وتسمى هذه الطريقة باختبار الفرضيات ولاتخاذ القرار الاحصائي يجب النظر الى الفروض الاحصائية اولاً وبناءً عليه لابد من توضيح بعض المفاهيم المتعلقة بها كالأتي :

❖ **الفرضية الاحصائية :**
تعريف : الفرضية الاحصائية هي كل عبارة عن احدى معالم المجتمع او عدة معالم تكون قابلة للاختبار و بالتالي تكون صحتها او عدم صحتها بحاجة الى قرار . وبصورة عامة تتعلق الفرضيات الاحصائية بعبارة عن احدى معالم المجتمع مثل الوسط الحسابي او نسبة النجاح او التباين او غيرها ، او عدة معالم مثل المقارنة بين معلمين او اكثر .
في الغالب هناك عنوان من الفرضيات الاحصائية في المسألة الواحدة :
١- **الفرضية الصفرية (الابتدائية) :** وهي الفرضية التي تبنى على امل ان يتخذ قرار بعدم صحتها ، ونصطلح من الآن على اعتبار أي فرضية نود اختبارها بالفرضية الصفرية ويتم التعبير عنها بالرمز H_0 .
٢- **الفرضية البدليه :** وهي الفرضية البدليه للفرضية الصفرية في حال عملية الرفض للفرضية الصفرية يتم قبول الفرضية البدليه و يرمز لها بالرمز H_1 .
مثال : يدعي احد المصانع في فترة المواصفات للمصابيح الكهربائية التي ينتجها ان معدل عمر المصابيح هو 500 ساعة للمصباح الواحد . اردت اختبار هذا الادعاء ، اكتب الفرضية الصفرية و الفرضية البدليه ؟
الحل : نفرض ان معدل عمر المصابيح التي ينتجها ذالك المصنع بالرمز μ
اذن تصبح الفرضية الصفرية على الصورة :

$$H_0: M = 500$$

اما الفرضية البدليه فتعتمد على الحالة المتوقعة التي تريد اجراء الاختبار من اجلها . فمثلاً اذا كنت تريد اختبار H0 بغرض الشراء من ذلك المصنع فأننا نصوغ الفرضية البدليه على الشكل :

$$H_1: M > 500$$

(لاحظ ان الفرضية البدليه لم يعين قيمة محددة للوسط الحسابي M ، بل سمحت بفترة من القيم جميعها اكبر من العدد500**) .**
الاخطاء الناتجة عن عملية صياغة الفرضيات :
كل قرار يبني على ناتج عينة ما يكون معرضاً للخطأ ، نعتمد صياغة الفرضية فان طريقة اتخاذ القرار قد تؤدي الى الوقوع في نوعين من الأخطاء هي :
١- **الخطأ من النوع الاول :** حيث يحدث هذا النوع في حال تم رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع صحيحة ، ويعبر عنه بالرمز ∝
٢- **الخطأ من النوع الثاني :** ويحدث هذا النوع في حال عدم رفض الفرضية الصفرية وهي في الواقع خاطئة ، ويعبر عن هذا الخطأ بالرمز β
و الجدول التالي يوضح ذالك :

	الحالة الحقيقية	
	H_0 صحيحة	**H_1 صحيحة**
عدم رفض ₀	قرار صائب	خطأ من النوع الثاني β
رفض H_0	خطأ من النوع الاول ∝	قرار صائب

وفي هذا الباب ، سيتم التعامل مع النوع الأول فقط من الاخطاء (∝) حيث سيتم تسميته **بمستوى الدلاله** .

❖ **خطوات اختبار الفرضيات :**

الخطوى الأولى : تحديد توزيع المجتمع .
يجب اولاً معرفة فيما اذا كان المتغير العشوائي يتوزع توزيعاً طبيعياً ، او يتبع توزيع ذو الحدين او غيره من التوزيعات الاخرى حيث تعتبر هذه نقطة مهمة في عملية اتخاذ القرار الملائم . وبما ان معظم التوزيعات تقترب من التوزيع الطبيعي و خاصة اذا كانت العينات كبيرة فلذالك سنستند في اختبار الفرضيات على التوزيعات الطبيعية في الغالب .

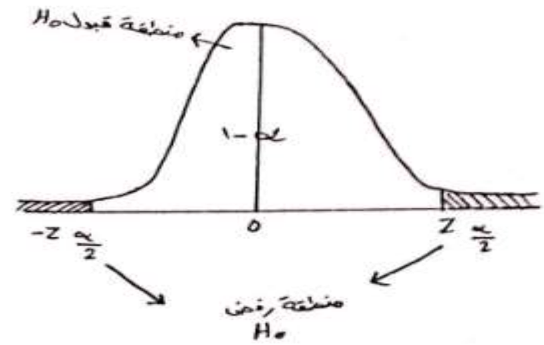
الخطوة الثانية : صياغة الفرضيات .
يتم صياغة الفرضيات الصفرية H0 و المراد اختبارها والتي تعتمد على تحديد قيمة المعلمة للمجتمع بحيث تكون على الشكل التالي :

$$\mathrm{H_0: M = M_0}$$

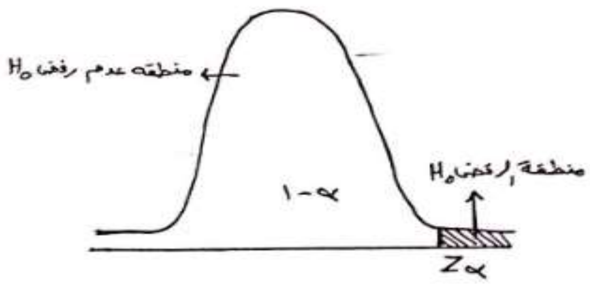
حيث $\mathrm{M_0}$ تمثل قيمة معينه لهذا المتوسط
اما الفرضية البدليه ، فتأتي على احد الاشكال التالية :
أ) $\mathrm{H_1: M \neq M_0}$
حيث يسمى هذا الاختبار بالاختبار من طرفين .
ب) $\mathrm{H_1: M > M_0}$
ويسمى اختبار من جهة اليمين .
ت) $\mathrm{H_1: M < M_0}$
ويسمى اختبار من جهة اليسار .

الخطوة الثالثة : اختبار مستوى الدلاله $\propto$.
يتم من خلال هذه الخطوة تحديد قيمة $\propto$ والتي من خلال سيتم تحديد منطقة القبول ومنطقة الرفض للحالات الثلاث التي تم ذكرها (الفرضية البدليه) والإشكال التالية توضح ذالك :

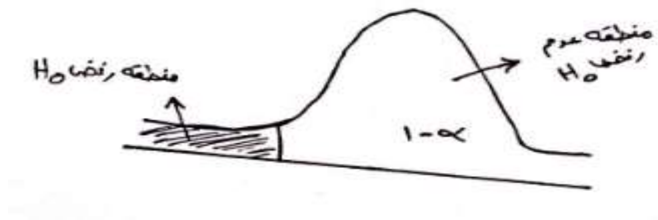
اولاً : اختبار الفرضيات من جهتين .



ثانياً : اختبار الفرضيات من الطرف الأيمن :



ثالثاً : اختبار الفرضيات من الطرف الايسر :



الخطوة الرابعة : احصاء الاختبار (دالة الاختبار) .
وهي الاحصاء المحسوب قيمته من العينة حيث يتم مقارنة هذا الاحصاء الذي تم جمعه من عينه مسحوب من مجتمع ما مع القيمة الجدوليه على مستوى دلالة α معين لتحديد منطقة القبول او منطقة الرفض .
الخطوة الخامسة : اتخاذ القرار .
وهي عملية رفض الفرضية الصفرية او قبولها بناءً على عملية مقارنة بين احصاء الاختبار مع منقطة الرفض ، فإذا وقعت دالة الاختبار في منطقة الرفض فأننا نرفض H0 وندعم H1 اما في حال وقوع دالة الاختبار في منطقة القبول فأننا ندعم H0 ونهمل H1

المحاضرة التاسعة عشر
الفصل السادس : تابع لـ أختبار الفرضيات

❖ **اختبار الفرضيات المنطقة بالوسط الحسابي :**
نظرية (١) : اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي ($س^2$ ، H) N بحيث كان التباين ($س^2$) معلوم ، فان احصاء الاختبار (دالة الاختبار) للفرضية المبدئية $H_0: M = M_0$ هو $Z = \frac{\overline{X}-M_0}{س\backslash\sqrt{h}}$ يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري حيث $\overline{X}$ هو الوسط الحسابي للعينة ، بحيث تتم خطوات الاختبار على النحو الآتي :
١) اختبر الفرضية $H_0: M = M_0$
٢) مقابل الفرضية البدليه
أ) $H_0: M \neq M_0$ وَر
ب) $H_0: M > M_0$
ت) $H_0: M < M_0$
٣) مستوى الدلالة α
٤) دالة الاختبار : تحت فرض ان H_0 صحيحة فان احصاء الاختبار هو $Z = \frac{\overline{X}-M_0}{\sigma\backslash\sqrt{h}}$ يخضع لتوزيع طبيعي معياري

٥) القيم الحرجة ومنطقة الرفض :

أ) ارفض الفرضية المبدئية H_0 اذا كان

$$Z < Z_{\frac{\alpha}{2}} \quad \text{أو} \quad Z > Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

ب) ارفض H_0 اذا كان

$Z < Z_{1-\alpha}$ دالة الاختبار من رقم ٤ الجداول من الاحصائية

ت) ارفض H_0 اذا كان

$Z > Z_{\alpha}$ دالة الاختبار من رقم ٤ الجداول من الاحصائية

مثال : تخضع اوزان عبوات احد مساحيق الغسيل لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 7 غم و معدلة M غم ، على مستوى الدلاله $\alpha = 0.05$ اختبر الفرضية :

$$\mathbf{H_0: M = 50}$$

مقابل الفرضية البدليه

$$\mathbf{H_1: M \neq 50}$$

اذا علمت ان الوسط الحسابي لعينه حجمها ١٢ علبة هو $\overline{X}$=56 غم .

الحل : اولاً يجب ايجاد قيمة دالة الاختبار

$$Z = \frac{\overline{X} - M_0}{\sigma \backslash \sqrt{h}} = \frac{56 - 50}{7 \backslash \sqrt{12}} = 2.97$$

عملية المقارنة وتحديد المنطقة الحرجة :

$Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, Z_{α}؟؟

$Z_{1-\alpha} = Z_{1-0.05} = Z_{0.95}$ لن يتم الاستفادة منها في هذا المثال

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-\frac{0.05}{2}} = Z_{0.975}$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{0.025}$$

من الجداول الاحصائية نجد ان :

$$Z_{0.975} = 1.96 \quad , \quad Z_{0.025} = -1.96$$

ارفض H_0 اذا كان :

$$\underbrace{Z = 2.97 > Z_{0.975} = 1.96}_{\text{متباينة صحيحة}}$$

القرار : نرفض H_0 وندعم H_1

نظرية (٢) : (اختبار الفرضيات المتعقلة بالوسط الحسابي لمجتمع طبيعي تباينه غير معلوم وحجم العينه صغير)

اذا اخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي ($N(M$, س^2) بحيث كان التباين غير معلوم ، فان حالة الاختبار هي $T = \frac{\overline{X} - M_0}{S \backslash \sqrt{n}}$.

تخضع توزيع t بدرجات حرية n-1 ، وتتم خطوات الاختبار على النحو الآتي :

١. $H_0: M = M_0$

٢. مقابل البدليه

أ) $H_1: M \neq M_0$

ب) $H_1: M > M_0$

ت) $H_1: M < M_0$

٣. مستوى الدلالة $\propto$
٤. احصاء الاختبار
$. T = \frac{\overline{X}-M_0}{S/\sqrt{n}}$

- **اتخاذ القرار ومناطق الرفض :**

أ) ارفض H_0 اذا كان

$$T < -t\left[1-\frac{\propto}{2}, n-1\right] \text{ او } T > t\left[1-\frac{\propto}{2}, n-1\right]$$

ب) ارفض H_0 اذا كان
$T > t[1-\propto, n-1]$
ت) ارفض H_0 اذا كان
$T < -t[1-\propto, n-1]$

مثال : اظهرت سجلات احدى المدارس ان معدل تحصيل الطلبة في امتحان الغة الانجليزية الذي يتقدمون له عند الالتحاق بالجامعات الامريكية هو 410 . بدأت المدرسة بإعطاء دورات تقوية للطلبة . اختبر فرضية ان هذا المعدل قد تحسن اذا اعطت نتائج 14 طالباً وسطاً حسابياً مقداره $\overline{X} = 418$ بانحراف معياري S= 21 ؟
(اعتبر مستوى الدلاله $\propto = 1\%$) .
الحل :
١) $H_0: M = 410$
٢) $H_1: M > 410$
٣) $. T = \frac{\overline{X}-M_0}{S/\sqrt{n}}$

$$= \frac{418-410}{2/\sqrt{14}} = 1.42$$

٤) عملية المقارنة واتخاذ القرار :

$$T < -t[1-\propto, n-1]$$
$$1.42 > t[0.99,13]$$
$$1.42 > 2.65$$

نلاحظ ان المتباينة غير صحيحة (بمعنى ان دالة الاختبار لم تقع في منطقة الرفض)
وبذلك فأننا ندعم H_0 ونهمل H_1 (لانستطيع ان نستنتج ان معدل تحصيل الطلبة قد تحسن بعد اعطاء الدورات)

المحاضرة العشرو ن
الفصل السادس : اختبار الفرضيات

- **اختبار الفرضيات المتعلق بالفرق بين وسطين:**

نظرية (٣): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع $N(M_1$ ، $س_1^2)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي
$N(M_2$ ، $س_2^2)$ بحيث كانت مستقلة عن الأولى ، وكان $س_1^2$ ، $س_2^2$ معلومتين ، فإن احصاء الاختبار للفرضية $M_1 = M_2$: H_0 هي :

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري ، حيث $\overline{X}$ ، $\overline{Y}$ هما وسطا العينتين على التوالي.
(نلاحظ أن خطوات الاختبار في هذه الحالة هي نفس خطوات الاختبار التي تم عرضها في نظرية (١).

❖ **خطوات الاختبار:**

١- $H0 : M1 = M2$
٢- أ- $H1 : M1 \neq M2$
ب- $H1 : M1 > M2$
ج- $H1 : M1 < M2$
٣- دالة الاختبار: $Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$
٤- على مستوى الدلالة $\propto$
٥- أرفض H0 إذا كان:
أ- $Z > Z1\text{-}\propto/2$
$Z < Z\propto/2$
ب- $Z > Z1\text{-}\propto$
ج- $Z < Z\propto$

مثال: أخذت عينتان مستقلتان حجمهما ٧٢ ، ٢٧ على التوالي من المجتمعين $N(M_1, 144)$ ، $N(M_2, 81)$ فاعطتا الوسطين $\bar{X} = 73$ ، $\bar{Y} = 69$ ، اختبر الفرضية $H_0 : M_1 = M_2$ مقابل الفرضية $H_1 : M_1 > M_2$ **على مستوى الدلالة** $\propto = 0.05$

الحل :

$$Z = \frac{73-69}{\sqrt{\frac{144}{72} + \frac{81}{27}}} = \frac{4}{2.236} = 1.79$$

قيمة اختبار الدلالة
$Z1\text{-}\propto = Z1\text{-}0.05 = Z0.95$
من جدول التوزيع الطبيعي ، نجد أن:
$Z0.95 = 1.645$
$Z > Z0.95$
$1.79 > 1.645$
نرفض H0 وندعم H1

❖ **اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة:**

إن اختبار الفرضيات المتعلقة بالنسبة يشبه اختبار الفرضيات المتعلق بالوسط الحسابي لمجتمع حيث يتغير فقط طريقة إيجاد دالة الاختبار في هذه الحالة

نظرية (٤): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من توزيع ذات الحدين (مجتمع برنولي) b: (I , P) بحيث كان $\bar{P}$ هي نسبة النحاج في العينة فإن دالة الاختبار:

$$Z = \frac{\bar{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$$

تخضع لتوزيع طبيعي معياري بشرط أن تكون n كبيرة $(n \geq 30)$ ، حيث p0 : هي نسبة النجاح للمجتمع، $\bar{P}$: هي نسبة النجاح للعينة.
أما خطوات الاختبار هي كالآتي:
الفرضية الصغيرة $H0 : P = P0$
الفرضية البديلة :
أ- $H1 : P \neq P0$
ب- $H1 : P > P0$
ج- $H1 : P < P0$
١- مستوى الدالة $\propto$

٢- إحصاء الاختبار: $Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

٣- نرفض H0 إذا كان:

أ- $Z > Z_{1-\propto/2}$

او $Z < Z_{\propto/2}$

ب- $Z > Z_{1-\propto}$

ج- $Z < Z_{\propto}$

مثال: من المعلوم أن نسبة مستخدمي حزام الأمان في السيارات (قبل تشريع التزام الاستعمال) هي ٠,٨ درست عينة عشوائية حجمها ٢٠٠ سائق بعد صدور التشريع الإلزامي، فوجد أن ١٧٠ سائق يستعملون الحزام. اختبر الفرضية ما إذا كان التشريع قد زاد نسبة المستخدمين لحزام الأمان على مستوى الدلالة $\propto = 0.10$ ؟

الحل: $H_0 : P = 0.8$

$H_1 : P > 0.8$

على مستوى الدلالة $\propto = 0.10$ ؟

نلاحظ أن $\overline{P} = \frac{170}{200} = \frac{17}{20} = 0.85$

ثم نجد دالة الاختبار: $Z = \frac{\overline{P} - P_0}{\sqrt{\frac{P_0(1-P_0)}{n}}}$

$$= \frac{0.85 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{200}}} = 1.8$$

$Z > Z_{1-\propto}$

$1.8 > Z_{0.90} \ --\gg 1.8 > 1.28$

النتيجة: المتباينة صحيحة ، نرفض H_0 وندعم H_1 (القرار التزام السائقين باستخدام حزام الأمان قد رفع من نسبة السائقين الذين يلتزمون باستخدامه).

المحاضرة الواحد والعشرون
الفصل السادس : اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات حول الفرق بين نسبتين :

نظرية (٥): إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع برنولي $b: (I , P)$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها n_2 مستقلة عن الأولى من مجتمع برنولي $b: (I , P_2)$ فإن إحصاء الفرضية $H_0 : P_1 = P_2$

هو: $Z = \frac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_1} + \frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_2}}}$

تخضع للتوزيع الطبيعي المعياري تقريباً بشرط أن تكون n_1 , n_2 كبيرتين.

حيث... $\overline{P}_1$: نسبة النجاح للعينة الأولى.

$\overline{P}_2$: نسبة النجاح للعينة الثانية.

ولحساب $\overline{P}$ (النسبة المشتركة بين العينتين) ، يمكن استخدام الصيغة: $\overline{P} = \frac{n_1\overline{P}_1 + n_2\overline{P}_2}{n_1 + n_2}$

ولإجراء الاختبار للفرضية المبدئية، فإننا نتبع الخطوات السابقة من النظرية (٤) مع أخذ بعين الاعتبار إحصاء الاختبار من نظرية (٥).

مثال: للمقارنة بين نسبة المدخنين في الفئة العمرية (٢٥ – ١٨) سنة مع الفئة العمرية (٣٠ – ٢٦) سنة، أخذت عينة عشوائية حجمها ٢٠٠ شخص من الفئة الأولى ووجد أن ٨٠ شخص منهم يدخنون، أخذت عينة عشوائية حجمها ١٠٠ شخص ووجد أن ٥٢ شخص منهم يدخنون. أختبر الفرضية $H_0 : P_1 = P_2$ مقابل $H_1 : P_1 < P_2$ على مستوى الدلالة $\propto = 0.05$

الحل:

١- $H_0 : P_1 = P_2$

٢- $H_1 : P_1 < P_2$

٣- مستوى الدلالة $\propto = 0.05$

٤- إحصاء الاختبار: $Z = \dfrac{\overline{P}_1 - \overline{P}_2}{\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_1} + \frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n_2}}}$

$Z < Z\propto$

-١ $\overline{P} = \dfrac{n_1\overline{P}_1 + n_2\overline{P}_2}{n_1+n_2}$ ..

$= \dfrac{200(\frac{80}{200})+100(\frac{52}{100})}{200+100} = \dfrac{132}{300} = 0.44$

$Z = \dfrac{\frac{80}{200} - \frac{52}{100}}{\sqrt{\frac{0.44(1-0.44)}{200} + \frac{0.44(1-0.44}{100}}} = -1967$

ولإيجاد قيمة $Z\propto \ll -- \quad -1.645 = Z_{0.05}$

$-1.967 < -1.645$

صحيحة وبذلك نهمل H_0 وندعم H_1

مراجعة للفصل الخامس : التقدير

التقدير للوسط الحسابي

- **نظرية (١) و (٢) .. مجتمع طبيعي تباينه معلوم + مجتمع تباين معلوم $n \geq 30$ ..–≫ كلاهما يتبعان توزيع Z**
- **نظرية (٣) .. مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم –≫ يتبع توزيع t بدرجات حرية $n - 1$**
- **نظرية (٤) .. اكثر من مجتمع طبيعي تباينهم معلوم –≫ يتبع توزيع الطبيعي المعياري Z**

التقدير بالنسبة

- **نظرية (٥) .. مجتمع واحد .. يتبع توزيع Z (الطبيعي المعياري)**
- **نظرية (٦) .. مجتمعين .. يتبع توزيع Z (الطبيعي المعياري)**

التقدير للتباين ..

- **نظرية (٧) .. مجتمع واحد .. يتبع توزيع كاي تربيع بدرجات حريه $n - 1$.**
- **نظرية (٨) .. مجتمعين .. يتبع توزيع F بدرجات حريه $n_1 - 1$ ، $n_2 - 1$.**

مراجعة للفصل السادس : اختبار الفرضيات

اختبار الفرضيات للوسط الحسابي M

- **نظرية (١) .. مجتمع تباينه معلوم (طبيعي) ، (حجم العينة صغير) .. يتبع توزيع Z .**
- **نظرية (٢) .. مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم ، (حجم العينة صغير) .. يتبع توزيع t بدرجات حريه n – 1 .**
- **نظرية (٣) .. الفرق بين وسطين مجتمعين ، (تباينهما معلوم) .. يتبع توزيع Z .**

اختبار الفرضيات المتعلق بالنسبة

- **نظرية (٤) .. مجتمع واحد .. يتبع توزيع Z .**
- **نظرية (٥) .. الفرق بين نسبتي مجتمعين .. يتبع توزيع Z .**

الواجب الاول

السؤال ١ : ان احتمال ظهور عددين مجموعهما يساوي ١ في تجرة القاء حجر نرد مرتين يساوي

٦/٥

٦/١

١

٠

طريقة الحل : هو ٠ ولكن لماذا ؟ لان قطعة النرد الواحدة وهي الزهرة لمن لايعرفها والتي تستخدم في لعبة الطاولة لها ٦ اوجه كل وجه وله رقم من العدد ١ الى العدد ٦ فلو رمينا حجر نرد مرتين فان اصغر عدد سيكون ١ في كل مره ومجموع عددين يكون مجموعهما واحد مستحيل اي فاي وفاي تساوي صفر لان اصغر عدد ١ +١ = ٢

وهذه صورة حجر النرد لمن لايعرفه

السؤال ٢ : إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاحصاء هو ٠,٨ واحتمال نجاحه في مقرر المحاسبة هو ٠,٧ واحتمال نجاحة في كلا المقررين هو ٠,٦ فإن احتمال نجاحه في المحاسبة ورسوبه في مقرر الاحصاء هو

٠,١

٠,٣

٠,٢

٠,٤

الجواب لابد ان نرمز للاحصاء بالرمز A ويساوي ٠,٨ ونرمز للمحاسبة بالرمز B وتساوي ٠,٧ وكلمة كلا او كليهما او معا تعني تقاطع اذا كلا المقررين هو التقاطع وقيمته هنا ٠,٦ ، ونجد ايضا ان الاحصاء والمحاسبة يكملنا بعضهما البعض في نجاح او رسوب الطالب اي مقرونتين ببعض فالاحصاء متممة المحاسبة ومكمالها والمحاسبة متممة الاحصاء ومكملته في نجاح الطالب او فشله بمعنى اخر متممة A هي Bومتممة B هيA

الان نلاحظ انه قال فان احتمال نجاحة في المحاسبةB ورسوبه في الاحصاء A فقدم المحاسبة على الاحصاء اي اننا هنا نبحث عن B تقاطع متممةA

والقانون هو

$$(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) =$$

$$0.7 - 0.6 = 0.1$$

ولو قال فان احتمال نجاحة في الاحصاء ورسوبة بالمحاسبة لاصبحت المعادلة A تقاطع متممة B ويكون الناتج ٠,٢

السؤال ٣ : إن عدد عناصر الفضاء العيني في تجربة القاء قطعتي نقد وحجر نرد هو

٣٦

١٠

١٢

٢٤

المعطيات هي : قطعتي نقد وحجر نرد واحد.
وحتى نجاوب على السؤال بشكل صحيح فاننا نعرف ان قطعة النقد الواحدة لها وجهين صورة وكتابة ويرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T ولدينا بالمقابل حجر نرد به ٦ اوجه وهي ١-٢-٣-٤-٥-٦ وحتى نتوصل للحل نبدء بقطعة نقد واحده مع حجر نرد حتى نحصي عناصر الفضاء العيني ثم نكرره مع قطعة النقد الثانية
فنبدء مع وجه الصورة واوجه حجر النرد اولا ونقول H1,H2,H3,H4,H5,H6 هذه ٦ اوجه صورة مع حجر نرد الان نبدء نحصي الاحداث الاخرى مع وجه الكتابة لقطعة النقد مع حجر النرد ونقول T1,T2,T3,T4,T5,T6وهذه ٦ اوجه اخرى ٦+٦ = ١٢ اذا قطعة نقد واحده مع حجر نرد واحد ينتج عنه ١٢ وجه او ١٢ حادث بسيط لان كل وجه هو حادث بسيط ومجموعهم هو الفضاء العيني لهما وبماان السوال يقول قطعتي نقد لاواحده اذا ١٢ لكل قطعة + ١٢ للقطعة الاخرى = ٢٤ وهو الفضاء العيني للتجربة اذا الجواب الصحيح هو ٢٤ من الخيارات السابقة.

السؤال ٤ : إذا كان p(a)=p(b) وكان a و b حادثين منفصلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي

٠

غير ذلك

١

٠,٥

طبعا الجواب صفر لكن لماذا ؟
لان القاعدة بكل بساطة تقول في حالة ان الحادثين منفصلين فان تقاطعهما = فاي اي صفر
احفظوا هذه القاعدة البسيطة المكونه من ٤ كلمات لانها مهمه .

السؤال ٥ : إذا كان p(a)= 0.5, p(b)=0.4 وكان a,b حادثين منفصلين فإن احتمال p(aub)=

٠,٥

٠,٧

٠,٤

٠,٩

المطلوب aub اي A اتحاد B ويرمز حرف U للاتحاد لمن لم يدرسها من قبل ومعادلة الاتحاد هي

$$\underbrace{P(A \cup B)}_{\text{اتحاد}} = P(A) + P(B) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{تقاطع}}$$

الحادث الاول + الحادث الثاني - التقاطع
فالحادث الاول ٠,٥ + الحادث الثاني ٠,٤ - التقاطع وحيث ان الحادثين منفصلين فبتالي يكون صفر ويهمش التقاطع ونكتفي فقط بجمع الحادث الاول والثاني فقط وناتجهما ٠,٩

السؤال ٦ : إذا كان p(a)=0.1, p(b)= 0.2، وكان a, b حادثين مستقلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي

٠,٠٢
٠,١
١
٠

هنا نلاحظ ان الحادثين مستقلين وليس منفصلين هناك قاعدة بسيطة لايجاد التقاطع اكرر التقاطع وليس الاتحاد وهو ان نضربهما ببعض الاول ضرب الثاني ٠,١*٠,٢ = ٠,٠٢

السؤال ٧ : إن تباديل احرف كلمة "success" هو

٨٤٠
٤٢٠
غير ذلك
٢١٠

الجواب تباديل يرمز لها بالحرف P الان نجي نحسب عدد حروف كلمة success نجدها ٧ احرف اي مضروب العدد ٧ وهو !٧ ثم نجي نشوف كم حرف متماثل اي متكرر في الكلمة ونجد ان الحرف S تكرر ٣ مرات اي مضروب العدد !٣ وكذلك الحرف C تكرر مرتين اي مضروب العدد !٢ الان نحط عدد حروف الكلمة وهو مضروب العدد ٧ بالبسط وبالمقام مضروب العد ٣ ضرب مضروب العدد ٢ اللي هو تكرار الاحرف المتشابهه
وهنا طريقة حلها بالالة الحاسبه بعد ان عرفنا ان الكلمة تتكون من ٧ احرف وبها حرف مكرر ٣ مرات والاخر مكرر مرتين .

السؤال ٨ : إذا كان p(a)=0.5, p(b)=0.8, p(a/b)=0.5، فإن احتمال حدوث p(b/a) يساوي

٠,٨
٠,٥
٠,٣
غيرذلك

الحل : هذا النوع من الحوادث هو حادث مستقل ، أي أن حدوث الحادث A لايتأثر بحدوث الحادث B
كما هو موضح من المعطيات : **,قيمة p(a/b) وهي نفسها قيمة p(a)=0.5** بالتالي فإن **قيمة : p(b/a) هي نفسها قيمة p(b)=0.8**

السؤال ٩ : إذا كان a, b حادثين منفصلين بحيث كان p(b) = 0.5,p(a)=0.1 فإن قيمة p(a∩b) يساوي

٠
٠,٥
٠,١
٠,٦

الحل : الحادثين منفصلين بالتالي لاتوجد قيمة للتقاطع بينهما .

السؤال ١٠ : ان توافيق العدد " ١٢٣٤ " هو :

١
غير ذلك
٠
٢٤

الحل: توافيق يرمز لها بالحرف الاتيني C وهنا نجد ان العد ١٢٣٤ مكون من ٤ اعداد اذا الحل هو٤ توافيق ٤
طيب لو جانا السؤال بالاختبار بالصيغة:

ان تباديل العدد " ١٢٣٤ " هو :
1
غير ذلك
0
24
فقط تغيرت الكلمة من توافيق الى تباديل وتغير الناتج لان ٤ تباديل ٤ = ٢٤

الواجب الثاني

السؤال ١ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان P=0.8, n= 3 فإن احتمال X=0 يساوي
٠,٨
٠,٠٨
٠,٠٠٨
٠,٥١٢

الحل : هذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p) . ونظريتة هي :

$$\mathbf{P\ (X = x) = nCx \times p^{x} \times (1 - p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

الان نعوض فقط قيم (x;n;p) اللي اعطيت لنا بالسؤال في النظرية بالالة الحاسبة ويطلع لنا الناتج
ملاحظة حفظ النظرية باللون الاحمر مهم لحل سؤال عن توزيع ذات الحدين ومتوقع سؤال منها بالاختبار النهائي
نعوض معطيات السؤال في المعادلة على النحو التالي 0.008 = $\mathbf{3C0 \times 0.8^{0} \times (1 - 0.8)^{3-0}} =$

السؤال ٢ : في تجربة ذات الحدين، إذا كان p=0.5, n=10 فإن تباين المتغير العشوائي الذي يتبع هذا التوزيع يساوي
٢,٥
٠,٢٥
٠,٥
٥

الحل : المعطيات n=10 عدد مرات اجراء التجربة ، P =0.5 عدد مرات النجاح

وبالتالي يكون عدد مرات الفشل 0.5 ويرمز له بالحرف q حيث أن عدد مرات النجاح + عدد مرات الفشل = ١

المعادلة : $\sigma^{2} = \mathbf{npq}$

σ^{2} **=١٠ *٠,٥*٠,٥ =٢,٥**

ملاحظة : في السؤال الأول كان عن تجربة ذات الحدين في السؤال الثاني هذا ايضا في تجربة ذات الحدين الا ان القانوين اختلفا لان المطلوب في السؤال الأول كان الاحتمال وهنا في السؤال الثاني المطلوب التباين لذا يجب أن نركز في المطلوب .

السؤال ٣ : إذا كان معدل المواليد في احد المستشفيات هو ٥ اطفال في اليوم الواحد، فإن احتمال ولادة ٣ اطفال في احد الأيام هو
٠,١٤
٠,٢٨
٠,٨٤
٠

الحل : من نظرية بواسون يمثل معدل المواليد في اليوم الواحد او فترة زمنية معينة مايعرف باللمدا λ **ويكون الاحتمال هو المتغير العشوائي X عليه نقوم بتعويض القيم المعطاة بالسؤال في معادلة بواسون التالية :**

$$P(x;\lambda) = P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; x = 0, 1, 2, \ldots$$

$$P(3;5) = P(X=3) = \frac{e^{-5}5^{3}}{3!} = 0,14$$

مطلوب حفظ نظرية بواسون وهي باللون الاحمر اعلاه ويتم تعويض قيم المعطيات التي بالسؤال في الالة الحاسبة .

السؤال ٤ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان P=0.5, n= 10 فإن احتمال الفشل يساوي

٠,٤
٠,٥
٠,٠٤
٠،٢٤

P ترمز للنجاح ، q ترمز للفشل ومجموعهما = ١ ، فإذا كان النجاح = ٠,٥ اذا يكون الفشل = ٠,٥

السؤال ٥ : في التوزيع الاحتمالي المنفصل، إن مجموع الاحتمالات لجميع المتغيرات العشوائية التي تنتمي لذلك التوزيع تساوي

اكبر من صفر
١
اقل من واحد
جميع ما ذكر صحيح

الحل : في التوزيع الاحتمالي المنفصل يكون مجموع الاحتمالات بجميع المتغيرات العشوائية التي تنتمي لذلك التوزيع تساوي ١ .

ولمزيد من التوضيح تجدوه بالصورة أدناه حيث لو جمعنا المتغيرات يكون الناتج = ١

X		$f(x)$	$xf(x)$
3		0.3	0.9
4		0.2	0.8
5		0.2	1.0
6		0.1	0.6
7		0.2	1.4

= 1

الواجب الثالث

السؤال ١ : إذا علمت ان عينة حجمها ١٠ مسحوبة من مجتمع لانهائي معدله ١٠٠ وتباينها ٤٠ ، فإن الوسط الحسابي للعينة (التوقع الرياضي) يساوي :

٤
١٠
<u>١٠٠</u>
٢

الحل : من السؤال نلاحظ أن المجتمع <u>لانهائي</u> وليس طبيعي معياري في هذه الحالة يكون المعدل هو نفسه الوسط الحسابي للعينة ، والمطلوب بالسؤال هو الوسط الحسابي =١٠٠ .

السؤال ٢ : عينة عشوائية حجمها ١٦ اخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري ١٢ بحيث اعطت معدل ٣٠ فإن فترة ٩٠% ثقة للوسط الحسابي للمجتمع هي :

(٣١,٩٢ ، ٢٤,٠٨)
(٣٥,٧٦ ، ٢٤,٢٤)
<u>(٣٤,٩٢ ، ٢٥,٠٨)</u>
(٣٠,٧٦ ، ٢٥,٢٤)

الحل : نلاحظ من السؤال بأن المجتمع طبيعي من الانحراف المعياري σ ويرمز له بالحرف S بدلا من التباين σ^2

قبل ان نبدأ بالحل والتعويض بالمعادلة يجب ان نعالج فترة الثقة والمقدرة بـ ٩٠% لذا نقوم بإيجاد الفرق بين ٩٠% المعطاه بالسؤال و ١٠٠% ويكون الفرق ١٠ ، نقوم بقسمة هذا الناتج على ٢ ويصبح ٥ نقوم باضافتها على نسبة الثقة المعطاة بالسؤال وهي ٩٠% وتصبح نسبة الثقة الان ٩٥% ، والان نقوم بالتعويض بالمعادلة التالية :

$$(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

نلاحظ بأن المعادلة تتكون من جزئين :

الجزء الأول : $\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

الجزء الثاني : $\overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

نفس المقدار باختلاف الاشارة فقط من سالب الى موجب، والان نقوم في التعويض بالمعادلة ادناه :

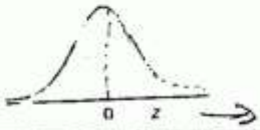
$$(\overline{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$(30 - Z(0.950) * \frac{12}{\sqrt{16}}\ ,\ 30 + Z(0.950) * \ 12/\sqrt{16})$$

نلاحظ بأن فترة الثقة التي حولناها الى ٩٥% اصبحت ٠,٩٥٠ وهي التي تاتي بعد المتغير العشوائي الطبيعي Z ،عليه وحتى يكتمل الحل نقوم بإيجاد قيمتها من الجدول [جدول التوزيع الطبيعي Z] :

كما هو موضح بالصورة ادناه بايجاد قيمة ٠,٩٥٠ في جسم الجدول حيث أن العامود الرأسي الأيسر يمثل درجات الحرية وفي قيمتنا هذه تعادل ١,٦ نضيف عليها القيمة المقابلة للرقم ٠,٩٥٠ في العامود الأفقي العلوي الذي يمثل المساحات (لمدا)

ويتضح أن القيمة ٠,٠٥ نضيفها على ١,٦ وتصبح ١,٦٥ وهي قيمة الـ ٠,٩٥٠ وسوف نعوض بالقيمة الجديدة ١,٦٥محل Z ٠,٩٥٠ .



الجدول (IV) : المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
	Second decimal place in z									
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	$\boxed{0.9505}$	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

=1.65

$$(30 - Z(0.950) * \frac{12}{\sqrt{16}} \ , \ 30 + Z(0.950) * \ 12/\sqrt{16})$$

$$(30 - 1.65 * 12/4 \ ,30 + 1.65 * \ 12/4)$$

$$(30 - 1.65 * 3 \ ,30 + 1.65 * \ 3 \ )$$

$$(25.05 \ , 34.95 \ )$$

السؤال ٣ : سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي معدله ١٠٠ وتباينه ٤٠ ، إذا كان حجم العينة يساوي ١٠ فإن الانحراف المعياري للعينة يساوي :

١٠
٢
٤

المعطيات هي : n=10 ، $\bar{X} = 100$ ، و التباين $\sigma^2 = 40$

المطلوب : الانحراف المعياري للعينة ؟

الحل : لمعرفة الانحراف المعياري σ لابد من ايجاد قيمة التباين σ^2

لذا نقوم بقسمة تباين العينة على حجم العينة = σ^2/n

σ^2= ٤٠/١٠ =٤ اذا التباين ٤ والانحراف المعياري هو جذر التباين وجذر ٤ =٢ وهو قيمة الانحراف المعياري المطلوب

السؤال ٤ : اخذت عينة عشوائية قيمها ٦ ، ١٠ ، ٣ ، ٥ ، ٥ ، ٧ من مجتمع طبيعي فإن معدل المجتمع تقديراً يساوي

٧
٦
٥

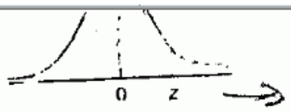
٤
الحل : لدينا بالسؤال قيم مختلفة لعدة عناصر وعددها وليس مجموعها هو ٦
الخطوة التالية نقوم بجمع قيم العناصر الستة التالية ٦،١٠،٣،٥،٥،٧ = ٣٦
نقسم الناتج على عدد العناصر ٦/٣٦ =٦ ، اذا الجواب ٦ .

السؤال ٥ : عينة عشوائية حجمها ٢٥ تخضع لتوزيع طبيعي وسطه ١٥ وانحراف معياري يساوي ٥ فإن احتمال ان يقل الوسط الحسابي للعينه عن ١٧ هو

٠,٩٨١٧
٠,٠٢٢٥
٠,٩٧٧٢
٠,٠١٨٣

المعطيات : n=25 ، $\mu = 15$ ، $\sigma = 5$
المطلوب : ان يقل وسطه الحسابي للعينة $\overline{X}$ عن ١٧ اي P($\overline{X} < 17$)
المعادلة : $Z = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$
الحل : نعوض بالمعادلة $Z = \frac{17-15}{5/\sqrt{25}} = Z = 2$
من الجدول الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي Z نجد قيمة ٢ وتصبح ٠،٩٧٧٢

الجدول (IV) : المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.



z	Second decimal place in z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916

الاختبار الفصلي

السؤال ١ : إذا كان P(A)=0.1, P(B)= 0.4, وكان A, B حادثين مستقلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي
0.4
0.1
0
0.04

الحل : اذا كانوا حادثين مستقلين وطلب التقاطع فانا نجري عملية الضرب فيما بينهما .

السؤال ٢ : المتغير العشوائي المنفصل يأخذ دائما قيمة صحيحة وغير صحيحة
صواب – خطأ

الحل : المتغير العشوائي ينقسم الى نوعان : ١) منفصل وياخذ عدد صحيح مثل عدد افراد الاسرة . ٢) متصل وياخذ جميع القيم في فترة ما ، مثال على ذلك درجة الحرارة

السؤال ٣ : القيمة المعيارية المقابلة للمتغير العشوائي x=3 في التوزيع الطبيعي N(12, 9) تساوي ٣
صواب - خطأ

الحل : $N(\ \mu, \sigma^2)$ نلاحظ أن المعدل في السؤال μ = ١٢ والتباين σ^2=٩ ، نطرح المتغير العشوائي x وقيمته ٣ من المعدل ونقسم ناتجهما على الانحراف المعياري وليس التباين والانحراف المعياري هو جذر التباين ، والتباين معطى لنا بالسؤال ٩ ، وجذر الـ٩ = ٣ بالمقام حسب المعادلة : $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$$Z = \frac{3-12}{3} = -3$$

السؤال ٤ : دائما احتمال أي حادث اكبر من العدد صفر وأقل من العدد ١
صواب - خطأ

الحل : من قوانين الاحتمالات نظرية ١ :
احتمال أي حادث من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد . بالرموز $0 \le p(s) \le 1$

السؤال ٥ : إذا كان P(A)=0.5, P(B) =0.2 وكان A و B حادثين منفصلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي
صفر
1
0.5
0.2

الحل : اي حادثين منفصلين يكون تقاطعهما يساوي صفر .

السؤال ٦ : التوقع الرياضي دائما يساوي التباين في المتغير عشوائي الذي يتبع توزيع بواسون
صواب - خطأ

عبارة صحيحة لاتحتاج الى شرح .

السؤال ٧ : إن عدد طرق تباديل العدد ٩٩٩٩ يساوي ١
صواب – خطأ

الحل : في هذا المثال نجد أن لدينا الرقم ٩ مكرر ٤ مرات ، فيكون مجموع الارقام في البسط مع علامة مضروب العدد (!) ، ويكون في المقام عدد تكرار الارقام مع علامة المضروب (!) أي أن :

$$nPn = \frac{n!}{n!} = 4P4 = \frac{4!}{4!} = 1$$

السؤال ٨ : إذا كان p(a)=0.5 واحتمالp(a من اليمين إلى اليسار تقاطع b)=0.3, فإن احتمال حدوث a وعدم حدوث b يساوي

0.3
0.2
0
0.4

الحل : يعني ان احتمال حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B في نفس الوقت = احتمال حدوث A ناقص احتمال تقاطعهما معًا .

$p(A \cap \bar{B}) = p(A)$? $p(A \cap B)$

0.5 – 0.3 = 0.2

السؤال ٩ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان P=0.6, n= 10 فإن احتمال الفشل يساوي

0,24
0.4
0.5
0.04

الحل : عدد مرات النجاح + عدد مرات الفشل = ١ ، وعدد مرات النجاح في السؤال P=0.6 فيكون عدد مرات الفشل q=0.4

السؤال ١٠ : في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات، إن احتمال ظهور ظهور الأوجه متشابهة يساوي

1/8
1/4
1/3
1/2

الحل : دائما وابدا وقبل الحل يجب ان نعرف اولا الفضاء العيني للتجربة والتجربة قطعة نقد اي وجهين اثنين رميت ٣مرات اي وجهين في كل مرة ٢*٢*٢ = ٨ ، اذا الفضاء العيني =٨ واحتمال ظهور عددين متشابيهين هو مرتين لان فضاء العينة المكون من ٨ هم :

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

اذا العددين المتشابيهين هما ٢ فقط (HHH) (TTT)

فنقول ٢ على عدد عناصر العينة 8 اي 2/8 = 1/4

السؤال ١١ : إذا كان S هو الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فإن احتمال S يساوي

اكبر من ٠ واقل من واحد
صفر

1
0.5

الحل : دائمًا قيمة الفضاء العيني أي جميع عناصرها تساوي واحد : S=1

السؤال ١٢ : القيمة المعيارية Z المقابلة للمتغير العشوائي X=20 في التوزيع الطبيعي N(5,25) هي

3-
5
3
1

الحل : المعادلة : $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

$Z = \frac{20-5}{\sqrt{25}} = 3$

لمزيد من المعلومات يرجى الرجوع للسؤال الثالث (في الاختبار الفصلي) .

السؤال ١٣ : ان عدد طرق اختيار خمسة طلاب من بين خمسة طلاب للذهاب في رحلة مدرسية يساوي

1
2
5
10

الحل : بما انه لم يذكر بالسؤال مع الترتيب او بدون ترتيب عليه يكون اختيار الحل بطريقة التوافيق لعدم اشتراط او ذكر الترتيب : 5C5=1

السؤال ١٤ : إذا كان (P(A/B)=P(A ، فإن= P(B/A)

P(B)
0
غير ذلك
P(A)

الحل : أولا نقرأ السؤال من اليسار لليمين حسب اللغة الانجليزية وهو : ، P(A/B)=P(A) هذا الجزء الاول من السؤال من نظرية الاحتمال الشرطي انه اذا حدث العنصر الأول فلابد من حدوث العنصر الثاني اي أن حدوث العنصر الأول مشروط بحدوث العنصر الثاني (/) اداة شرط ، اي أن A مشروطة / بالحادث B = احتمال A فإن P(B/A) تعني B مشروطة / بالحادث A = احتمال B . (P) تعني احتمال .

السؤال ١٥ : مجموع الاحتمالات في التوزيع الاحتمالي المنفصل دائما يساوي 1
صواب - خطأ

(قانون يجب حفظه) .

السؤال ١٦ : في توزيع F, هنالك نوعان من درجات الحرية v1 ويعتبر من درجات الحرية المقام v2, ويعتير من درجات حرية البسط
صواب - خطأ

الحل : في توزيع F تكون درجات حرية المقام ثابتة ، وهي V2 ، وحرية البسط هي V1 عكس ماجاء بالسؤال_ .

السؤال ١٧ : إذا كان a, b حادثين منفصلين فإن احتمال تقاطعهما يساوي احتمال ألاول مضروباً في احتمال الثاني
صواب - خطأ

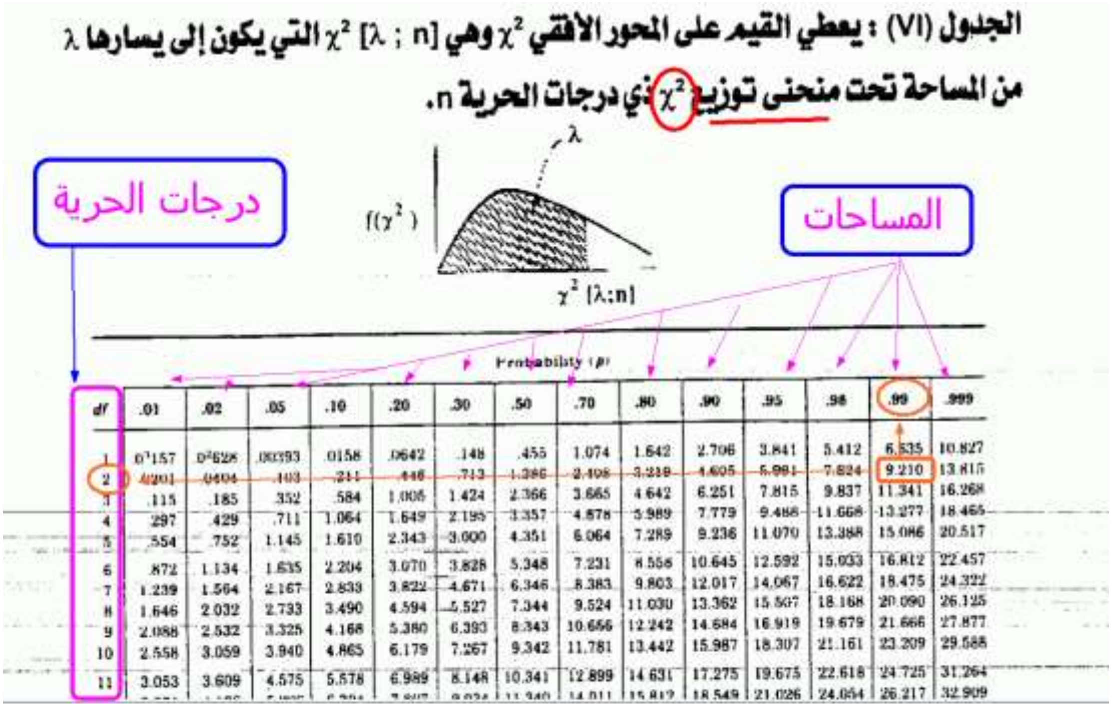
الحل : لأن الحادثين منفصلين بالتالي لايتقاطعان واحتمالهما = صفر .

السؤال ١٨ : المساحات التي تقع على يمين قيمة معيارية معينة يمكن ايجادها من خلال ايجاد قيمتها من جداول التوزيع الطبيعي المعياري ثم طرحها من العدد ١
صواب - خطأ

السؤال ١٩ : إن قيمة كاي تربيع التي تقع على يسارها المساحة ٠،٩٩ بدرجات حرية ٢ تساوي

6.635
13.815
9.210
7.824

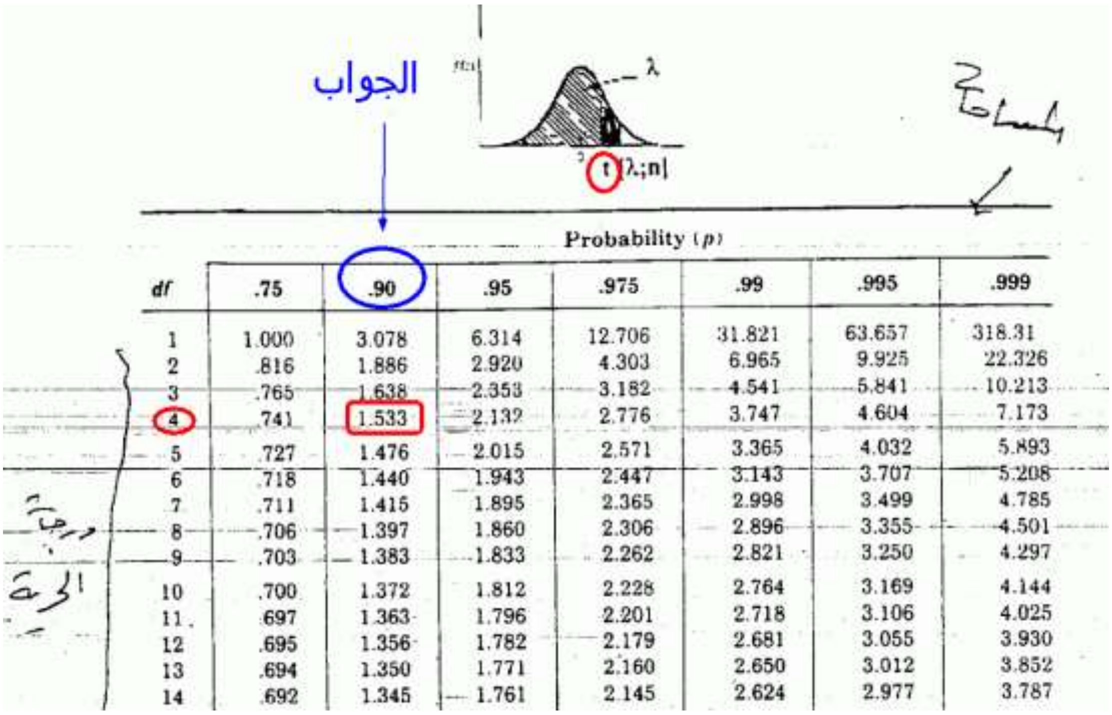
الشرح موضح على الجدول :



df	.01	.02	.05	.10	.20	.30	.50	.70	.80	.90	.95	.98	.99	.999
1	$.0^3157$	$.0^3628$	.00393	.0158	.0642	.148	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341	16.268
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.465
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264

السؤال ٢٠ : إن قيمة المتغير العشوائي t بحيث المساحة على يساره = ١,٥٣٣ بدرجات حرية ٤ هي:
0.05
0.95
0.10
0.90

من صورة الجدول ادناه يتضح لنا ان درجة الحرية = ٤ يقابلها على نفس الخط الافقي القيمة ١,٥٣٣ وهو المعطى بالسؤال عليه تكون المساحة على المحور الافقي العلوي = ٠,٩٠



	Probability (p)						
df	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787

السؤال ٢١ : إذا كان المتغير العشوائي x برمز لظهور عددين مختلفين في تجربة القاء جحري نرد، فإن احتمال x يساوي

1/3

5\6

1/4

1/6

الحل : تجربة القاء حجري نرد تعني ان الفضاء العيني ٣٦ واحتمال ظهور عددين مختلفي يعني كل حوادث الفضاء العيني الـ ٣٦ ماعدا الحوادث الستة المتشابهة وهي (١،١ - ٢،٢،، لغاية ٦،٦

علية فإن احتمال x يرمز لظهور عددين مخلفين يساوي ٣٦/ 30وبالتقريب بقسمة البسط والمقام على ٦ يصبح الجواب 5/6

السؤال ٢٢ : إن قيمة التباين في التوزيع الطبيعي المعياري تساوي

0
1-
غير ذلك
1

الحل : القاعدة : في التوزيع الطبيعي المعياري يكون تباينه العدد ١ وانحرافه المعياري صفر

قاعدة لابد ان تحفظ

السؤال ٢٣ : في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين، الحادث a={(h,h)} يمثل حادث

حادث مستحيل
حادث اكيد
حادث مركب
حادث بسيط

الحل : القاء قطعة نقد يعني لها وجهان ومرتين يعني الفضاء العيني راح يتكون من ٤ حوادث بسيطة وهي (HH,HT,TH,TT) اذا الحادث a={(h,h)} يمثل حادث بسيط

السؤال ٢٤ : إذا كان p(a)= 0.5, p(b)=0.4 وكان a,b حادثين مستقلين فإن احتمال P(AUB)
0.4
0.7
0.5
0.9

الحل : في حال كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فإن تقاطعهما = Ø وبذلك تصبح النظرية)على النحو التالي :
p(A U B) = p(A) + P(B)
p(A U B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7

السؤال ٢٥ : مجموع احتمال أي حادث واحتمال عدم حدوثه يساوي ١ دائما

صواب - خطأ

(صواب نظرية يجب حفظها)

السؤال ٢٦ : في الحوادث الشرطية، فإن احتمال احد الحادثين ليس شرطا أن يؤثر على حدوث الآخر
صواب – خطأ

الحل : يجب ان يكون الحادث الأول مشروطاً بحدوث لاخر لذا سميت بالحوادث الشرطية .

السؤال ٢٧ : إذا كان P=0.2, n=5, في توزيع ذات الحدين، فإن تباين X الذي يتبع هذا التوزيع يساوي
5
0.5
0.8

الحل: في توزيع ذات الحدين فان نجاح التجربة + فشل التجربة = ١
فاحتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P وبذلك فان احتمال الفشل هو q = 1-p
1 - 0.2 = 0.8

السؤال ٢٨ : إذا كان P(A)=0.5 واحتمال P(A B)=0.3, فإن احتمال حدوث A وعدم حدوث B يساوي

0.4
0
0.2
0.3

تم شرح هذا المثال باستفاضة في السؤال رقم ٨ و السؤال رقم ٦١ .

السؤال ٢٩ : إن تباديل حرفين من كلمة "نجاح" هو

<u>12</u>
6
24
1

الحل : المطلوب تباديل (حرفين) من كلمة نجاح والتي تتكون من اربعة احرف اي 12 =4P2 .

السؤال ٣٠ : إن عدد عناصر الفضاء العيني في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات يساوي

6
<u>8</u>
4
9

الحل : عناصر الفضاء العيني لقطعة نقد واحدة هو ٢ ويمثل الوجهان صورة وكتابة وعندما تلقاء ثلاث مرات فهذا يعني ان ٢*٢*٢ =٨ وهو الفضاء العيني للتجربة .

السؤال ٣١ : إذا كان معدل النجاحات في تجارب بواسون هو ١٠، فإن التوقع الرياضي للمتغير العشوائي x الذي يتبع هذا التوزيع يساوي :
<u>10</u>
1
0
5

الحل : التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X = المعدل (لمدا) وهو موجود بالسؤال .
المعدل = التوقع الرياضي = التباين .

السؤال ٣٢ : من مسلمات الاحتمال :

احتمال أي حادث اكبر من صفر
احتمال أي حادث اقل من ١
<u>احتمال اي حادث اكبر من أو يساوي صفر واقل من أو يساوي ١</u>
احتمال أي حادث = ١

(لاتحتاج لشرح بقدر ماتحتاج لحفظ) .

السؤال ٣٣ : دائما الانحراف المعياري يساوي التباين في التوزيع الطبيعي المعياري .
<u>صواب</u> - خطأ

السؤال ٣٤ : إذا كان التوقع الرياضي للمتغير العشوائي x يساوي ٣، وكان لدينا التحويل الخطي y=2x-8, فإن قيمة التوقع الرياضي للمتغير العشوائي y تساوي :

6
6-
2
<u>2-</u>

الحل : قيمة X = ٣ ، نعوض مباشرة بالمعادلة الخطية : y=2x-8
y=2(3) – 8 = -2

السؤال ٣٥ : إذا كان معدل المواليد في احد المستشفيات هو ٥ اطفال في اليوم الواحد، فإن احتمال ولادة ٣ اطفال في احد الأيام هو

<u>0.14</u>
0.84
0
0.28

الحل : (انظر حل السؤال الثالث بالواجب الثاني)

السؤال ٣٦ : إذا كان المتغير العشوائي المتصل x ينتمي إلى التوزيع الطبيعي ,x:n(9, 25) فإن القيمة المعيارية المقابلة للمتغير العشوائي x = 4 هي

1/5-
1/5
1
<u>1-</u>

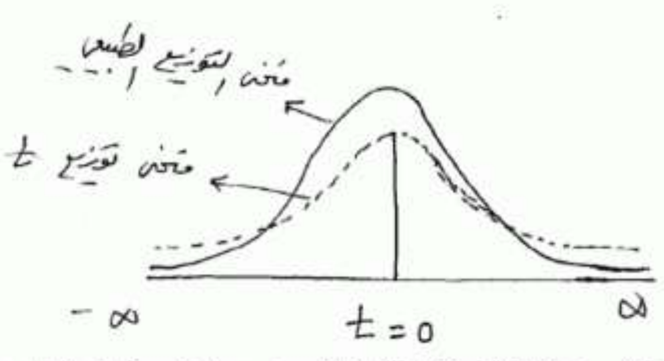
الحل: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = = \frac{4-9}{\sqrt{25}} = -1$

السؤال ٣٧ : إذا كان التباين للمتغير العشوائي X يساوي ٤ وكان لدينا الخطي Y= -x +5 فإن الانحراف المعياري للمتغير العشوائي Y يساوي

4-
2-
4
<u>2</u>

الحل : من المعطيات بالسؤال هوالتباين ويساوي ٤ والمطلوب بالسؤال الانحراف المعياري
وبجذر التباين نحصل على الانحراف المعياري اذا جذر ٤ = ٢

السؤال ٣٨ : منحنى توزيع t يشبه منحنى التوزيع الطبيعي إلا أنه اكثر انخفاضا منه
<u>صواب</u> - خطأ



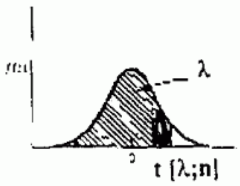
ملاحظة : يعتمد منحنى توزيع t على معلمة هامة تحدد شكل ذلك المنحنى وهي درجات الحرية فعندما تزداد درجات الحرية يقترب منحنى توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري .

السؤال ٣٩ : إن قيمة المساحة λ في التوزيع t[λ; 5] = - 2.015 يساوي

<u>0.05</u>
0.95
0.10
0.90

الحل : معطيات السؤال درجة الحرية = ٥ والقيمة من جدول توزيع t = 2.015 -
والمطلوب ايجاد المساحة (لمدا) ، عليه نجد القيمة المعطاه مع درجة الحرية في جدول t ونتجاهل السالب في القيمة ٢,٠١٥مؤقتًا ، يتضح أن قيمة المساحة لمدا التي تقع عليها قيمة ٢,٠١٥ = ٠,٩٥ ، وبسبب اشارة السالب نوجد متممة ٠,٩٥ وهي : 1 – 0.95 = 0.05

من المساحة تحت توزيع t ذي درجات الحرية n.



Probability (p)

df	.75	.90	.95	.975	.99	.995	.999
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646

درجة الحرية

السؤال ٤٠ : إن تباديل احرف كلمة " محمد " يساوي

3
<u>12</u>
24
6

الحل : كلمة محمد تتكون من ٤ حروف ولكن تكرر بها حرف الميم وفي التباديل
في حالة تكرر حروف فاننا نجعل البسط هو مضروب عدد احرف الكلمات والمقام مضروب عدد الحروف المتكرره وفي هذه الحالة لايوجد الا حرف الميم تكرر مرتين فتقول 4P4= 4!/2!= 12

السؤال ٤١ : إذا كان z ينتمي الى التوزيع الطبيعي المعياري فإن p(z>2) يساوي

0.9772

0.0183

0.9817

<u>0.0228</u>

الحل : بما أن Z أكبر من ٢ بالتالي نوجد قيمة 2 اولا من جدول Z وتساوي 0.9772 ثم نقوم بايجاد متممة العدد ٠,٩٧٧٢ بطرحه من العدد ١ : 1 – 0.9772 = 0.0228

السؤال ٤٢ : في الوزيع الاحتمالي المنفصل، إن مجموع الاحتمالات لجميع المتغيرات العشوائية التي تنتمي لذلك التوزيع تساوي

<u>1</u>
اكبر من صفر
اقل من واحد
0

تم حله مسبقًا في الواجب الثاني السؤال الخامس .

السؤال ٤٣ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمعدل يساوي ٩، فإن تباين X يساوي

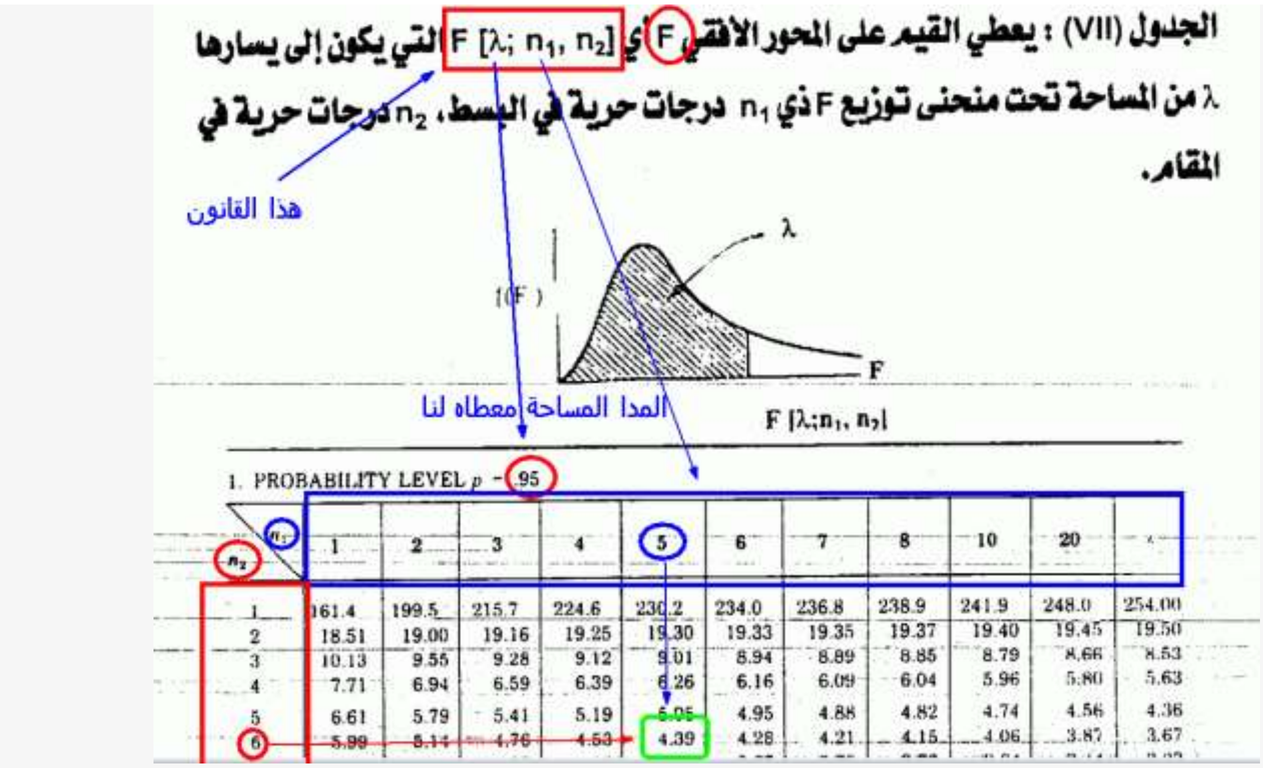
<u>9</u>
غير ذلك
1
3

الحل : المعدل = التوقع الرياضي = التباين

السؤال ٤٤ : إن قيمة f في المقدار f[0.95;5,6 تساوي

4.95
<u>4.39</u>
0.23
0.20

الحل : نلاحظ بانه اعطانا بالسؤال قيمة لمدا والتي تمثل المساحة 0.95 وكذلك V1=5 ,V2= 6 من جدول f نوجد القيمة مباشرة كما هو موضح على الصورة
ملاحظة : في الجدول n تعني v وهي درجات الحرية .



الجدول (VII) : يعطي القيم على المحور الأفقي F أي F [λ; n_1, n_2] التي يكون إلى يسارها λ من المساحة تحت منحنى توزيع F ذي n_1 درجات حرية في البسط، n_2 درجات حرية في المقام.

1. PROBABILITY LEVEL p - .95

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	20	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	241.9	248.0	254.00
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.40	19.45	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.79	8.66	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	5.96	5.80	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.74	4.56	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.06	3.87	3.67

السؤال ٤٥ : إن القيمة المعيارية المقابلة للمتغير العشوائي X=5 والذي ينتمي للتوزيع الطبيعي (X:N(5;100تساوي

10

1

<u>0</u>

الحل : معادلة المتغير العشوائي اكس في التوزيع الطبيعي

$$\mathcal{Z} = \frac{X-\mu}{\sigma} = \mathcal{Z} = \frac{5-5}{10}$$

= $\color{red}{0}$

السؤال ٤٦ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كان P=0.8, n= 3 فإن احتمال X=0 يساوي

0.512

0.8

0.08

<u>0.008</u>

الحل : من المعادلة التالية :

$$\mathbf{P\ (X = x) = nCx \times p^x \times (1 - p)^{n-x}; x = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

نعوض معطيات السؤال في المعادلة على النحو التالي $= \mathbf{3C0 \times 0.8^0 \times (1 - 0.8)^{3-0}}$ **= 0.008**

السؤال ٤٧ : صندوق يحتوي على خمس كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء، إن احتمال سحب كرة سوداء يساوي

<u>0</u>

3/8

5/8

1

الحل : لايوجد بالصندوق كرة سوداء ، بالتالي الاحتمال = صفر .

السؤال ٤٨ : إذا كان احتماال تقاطع أي حادثين يساوي صفر فإن احتمال اتحادهما يساوي حاصل جمع احتمال الأول والثاني

صواب - خطأ

السؤال ٤٩ : معدل عدد الحوادث على اشارة ضوئية يساوي ٤ ، فإن احتمال عدم حدوث أي حادث في أسبوع معين هو

1

0.018

0.0018

0.18

الحل : من التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X نستحضر معادلته حيث λ تمثل معدل الحوات = ٤ ، اما X فتمثل عدد حدوث الحوات وهو هنا = صفر

$$P(x;\lambda) = P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; x = 0, 1, 2, \ldots$$

نعوض معطيات السؤال بالمعادلة $= \frac{e^{-4}(4^{0})}{0!} = 0,018$

السؤال ٥٠ : إذا كان p(a)=p(a/b) فإنه ليس شرطا أن يكونp(b) = p(b/a)

صواب - خطأ

الحل : تم شرحها مسبقًا .

السؤال ٥١ : المساحة التي تقع على يمين القيمة المعيارية z= 0.56 هي

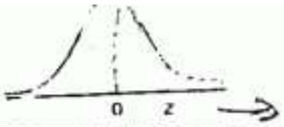
0.2877

0.2587

0.7422

0.7123

الحل : من جدول التوزيع المعياري Z نوجد قيمة ٠,٥٦ المعطاة بالسؤال وهي 0,7123 وحيث ان المطلوب المساحة التي تقع على يمينها نقوم بطرحها من العدد ١ فيصبح 1-0.7123=02877



الجدول (IV) : المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري.

0,56 = 0,7123

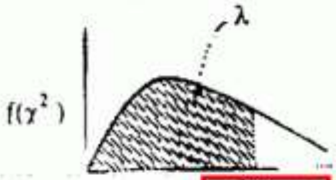
	Second decimal place in z									
z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

السؤال ٥٢ : تساوي X2[0.98;v]=5.412 إن قيمة درجات الحرية في المقدار

1
3
2
4

الحل : من السؤال نلاحظ أن يخص كاي تربيع X^2 والمعطى لنا بالسؤال المساحة لمدا = ٠,٩٨ وكذلك اعطيت لنا القيمة وهي ٥,٤١٢ والمطلوب هو قيمة درجة الحرية v وللعلم بالجداول يرمز لها بالحرف n لذا وجب التنويه الأن ماعلينا الا أن نبحث عن جدول كاي تربيع ثم نبحث عن المساحة ٠,٩٨ ومن اسفلها نبحث عن القيمة المعطاه بالسؤال ٥,٤١٢ ثم ننظر يسارها على العامود الايسر الرأسي لنحدد درجة الحرية المقابل لها كما هو موضح بالصورة :

الجدول (VI) : يعطي القيم على المحور الأفقي χ^2 وهي $\chi^2\ [\lambda\ ;\ n]$ التي يكون إلى يسارها λ من المساحة تحت منحنى توزيع χ^2 ذي درجات الحرية n.



$\chi^2\ [\lambda : n]$

Probability (p)

df	.01	.02	.05	.10	.20	.30	.50	.70	.80	.90	.95	.98	.99	.999
1	$.0^{3}157$	$.0^{2}628$	.00393	.0158	.0642	.148	.455	1.074	1.642	2.706	3.841	5.412	6.635	10.827
2	.0201	.0404	.103	.211	.446	.713	1.386	2.408	3.219	4.605	5.991	7.824	9.210	13.815
3	.115	.185	.352	.584	1.005	1.424	2.366	3.665	4.642	6.251	7.815	9.837	11.341	16.268
4	.297	.429	.711	1.064	1.649	2.195	3.357	4.878	5.989	7.779	9.488	11.668	13.277	18.465
5	.554	.752	1.145	1.610	2.343	3.000	4.351	6.064	7.289	9.236	11.070	13.388	15.086	20.517
6	.872	1.134	1.635	2.204	3.070	3.828	5.348	7.231	8.558	10.645	12.592	15.033	16.812	22.457
7	1.239	1.564	2.167	2.833	3.822	4.671	6.346	8.383	9.803	12.017	14.067	16.622	18.475	24.322
8	1.646	2.032	2.733	3.490	4.594	5.527	7.344	9.524	11.030	13.362	15.507	18.168	20.090	26.125
9	2.088	2.532	3.325	4.168	5.380	6.393	8.343	10.656	12.242	14.684	16.919	19.679	21.666	27.877
10	2.558	3.059	3.940	4.865	6.179	7.267	9.342	11.781	13.442	15.987	18.307	21.161	23.209	29.588
11	3.053	3.609	4.575	5.578	6.989	8.148	10.341	12.899	14.631	17.275	19.675	22.618	24.725	31.264

السؤال ٥٣ : في تجربة ذات الحدين، إذا كان نسبة النجاح p=0.75 وعدد مرات اجراء التجربة n=5, فإن(P(X=1 تساوي

0.015
0.15
0.29
0.029

الحل : القانون هذا يحفظ $P\ (X = x) = nCx \times p^{x} \times (1 - p)^{n-x}$;
الان نعوض بالقانون $P\ (X = x) = 5C1 \times 0.75^{1} \times (1 - 0.75)^{5-1} = 0.15$

السؤال ٥٤ : إن عدد المباريات التي تلعبها مجموعة مكونة من ثلاث فرق كل في أرض الثاني تساوي

12
9
6
3

الحل : من قاعدة الضرب = ٢*٣ = ٦

السؤال ٥٥ : إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الاحصاء هو ٠,٨ واحتمال نجاحه في مقرر المحاسبة هو ٠,٧ واحتمال نجاحة في كلا المقررين هو ٠,٦ فإن احتمال رسوبه في مقرر الاحصاء هو

0.1
0.4
0.2
0.3

المعطيات : P(A)=0.8 P(B)=0.7 $(P(A \cap B) = 0.6$
المطلوب: احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء (P(A
الحل: P(A) - $P(A \cap B)$**= 0.8 – 0.6 = 0.2**

السؤال ٥٦ : إذا كان X متغير عشوائي يتبع توزيع ذات الحدين بحيث كانت n=16, P=0.75, فإن تباين X يساوي
0.75
12
9
<u>3</u>

المعطيات : n=16 , P=0.75
المطلوب : ايجاد قيمة التباين ، علما بأن قيمة الفشل تساوي q=1 – 0.75 = 0.25
الحل : $\sigma^2 = npq$
16 * 0.75 * 0.25 = 3

السؤال ٥٧ : إن قيمة الوسط الحسابي في التوزريع الطبيعي المعياري يساوي
0.5

1

<u>0</u>
الحل : من القاعدة : " ويجب ان تحفظ "
التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution): هو التوزيع الطبيعي الذي معدله (وسطه الحسابي) يساوي صفر وتباينه يساوي ١

السؤال ٥٨: إذا كان p(a)=0.7, p(b)=0.6, p(aub)=0.8 فإن احتمال حدوث a وعدم حدوث b يساوي

0.4
0.3
<u>0.2</u>

0.5

المطلوب : حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B ؟
الحل : نطبق المعادلة التالية : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
وقبل الشروع بالحل لابد من ايجاد التقاطع $A \cap B$ حيث أنه غير معطى بالسؤال
ملاحظة مهمة : لايجاد التقاطع نضرب قيمة A في قيمة B ولكن في حالة اعطانا في السؤال قيمة الاتحاد (aUb) , فإن ناتج الضرب يكون خاطئ مثال على معطيات السؤال تقاطع p(a)=0.7, p(b)=0.6 يساوي 0.42 = 0.7 * 0.6 وهذا الناتج غير صحيح واسهل طريقة بايجاد التقاطع في حالة اعطانا قيمة الاتحاد بالسؤال هو ان نجمع قيمة A مع قيمة B والناتج نطرحه من قيمة الاتحاد ، كالتالي :
1.3 = 0.7 + 0.6 والناتج نطرحه من قيمة الاتحاد 0.8 يصبح الجواب

1.3 – 0.8 = 0.5

اذا اوجدنا التقاطع كخطوة أولى وهو ٠,٥ والان نعوض بالمعادلة التالية : $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
= 0.7 – 0.5 = 0.2

السؤال ٥٩ : من خصائص منحنى التوزيع الطبيعي:

شكله يشبه الجرس
المساحة اسفل المنحنى تساوي ١

يتقارب طرفيه من الصفر عندما تقترب x من موجب وسالب مالانهاية
جميع ما ذكر صحيح

السؤال ٦٠ : في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة مرتين، إن احتمال ظهور عددين متشابهين يساوي

1/6
1/3
5/6
1/2

الحل : دائما وابدا وقبل الحل يجب ان نعرف اولا الفضاء العيني للتجربة والتجربة قطعة نقد اي وجهين اثنين رميت مرتين اي وجهين في كل مرة ٢*٢ = ٤ ، اذا الفضاء العيني =٤ واحتمال ظهور عددين متشابيهين هو مرتين لان فضاء العينة المكون من ٤ هم : HH,HT,TH,TT اذا العددين المتشابيهين هما ٢ فقط HH , TT

فنقول ٢ على عدد عناصر العينة ٤ اي ٢/٤ = ١/٢

السؤال ٦١ : إذا كان احتمال حدوث الحادث a أو حدوث الحادث b يساوي ٠,٩ فإن احتمال عدم حدوث أحدهما على الأقل يساوي

لا شئ مما ذكر
0.1
0
1

الحل : اذا كان حدوث ايّ منهما = ٠،٩ فان الاخر هو متممة الاول حتي يصبح مجموعهم واحد صحيح
اي 0.1 = 0.9 – 1 ومجموعهما = ١

الواجب الرابع

السؤال ١ : إذا اخذت عينة عشوائية حجمها ٤٠ طالب من احد المدارس الابتدائية، ووجد أن ١٠ طلاب يلبسون نظارات طبية، فإن نسبة النجاح هي:
٠,٧٥
٠,٢٥
٠,٢
٠,٥

السؤال ٢ : عينة عشوائية حجمها ١٥ اخذت من مجتمع طبيعي بحيث اعطت تباين = ١٠، فإن فترة ٩٨% ثقة لتباين المجتمع هي:
(٤,٨٠، ٣٠,٠٤)
(٥,١٣، ٢١,٥٦)
(٣,٨٠، ٢٩,٠٤)
(٥,٨٠، ٣١,٠٤)

السؤال ٣ : إذا كان عدد الطلاب الذين يلبسون نظارات طبية من بين ٤٠ طالبا هو ١٠ ، فإن فترة ٩٠% ثقة لنسبة نجاح الطلاب الذين يلبسون نظارات هي:
(٠,١٤، ٠,٣٦)
(٠,٢٠، ٠,٣٠)
(٠,١٧، ٠,٢٨)

(٠,١١، ٠,٣٨)

السؤال ٤ : إذا اخذت عينة عشوائية حجمها ٩ من توزيع طبيعي بحيث اعطت وسط حسابي = ٨ وانحراف معياري =٢.
فإن فترة ٩٠% ثقة للوسط الحسابي للمجتمع هي

(٦,٥٧، ٩,٤٣)
(٦,٩١، ٩,٠٩)
(٦,٧٦، ٩,٢٤)
(٦,٧٥، ٩,٣٤)

السؤال ٥ : إذا كان لدينا عينة عشوائية حجمها ٩ من مجتمع طبيعي تباينها = ٥، وعينة عشوائية اخرى مستقلة عن الاولى ، حجمها = ١١ وتباينها = ٤. فإن فترة ٩٠% ثقة للنسبة (تباين المجتمع الثاني)/ (تباين المجتمع الاول) تساوي

(٠,٢٥، ٢,٧٥)
(٠,٢١، ٢,٥٥)
(٠,٢٤، ٢,٦١)
(٠,٢٤، ٢,٤٦)