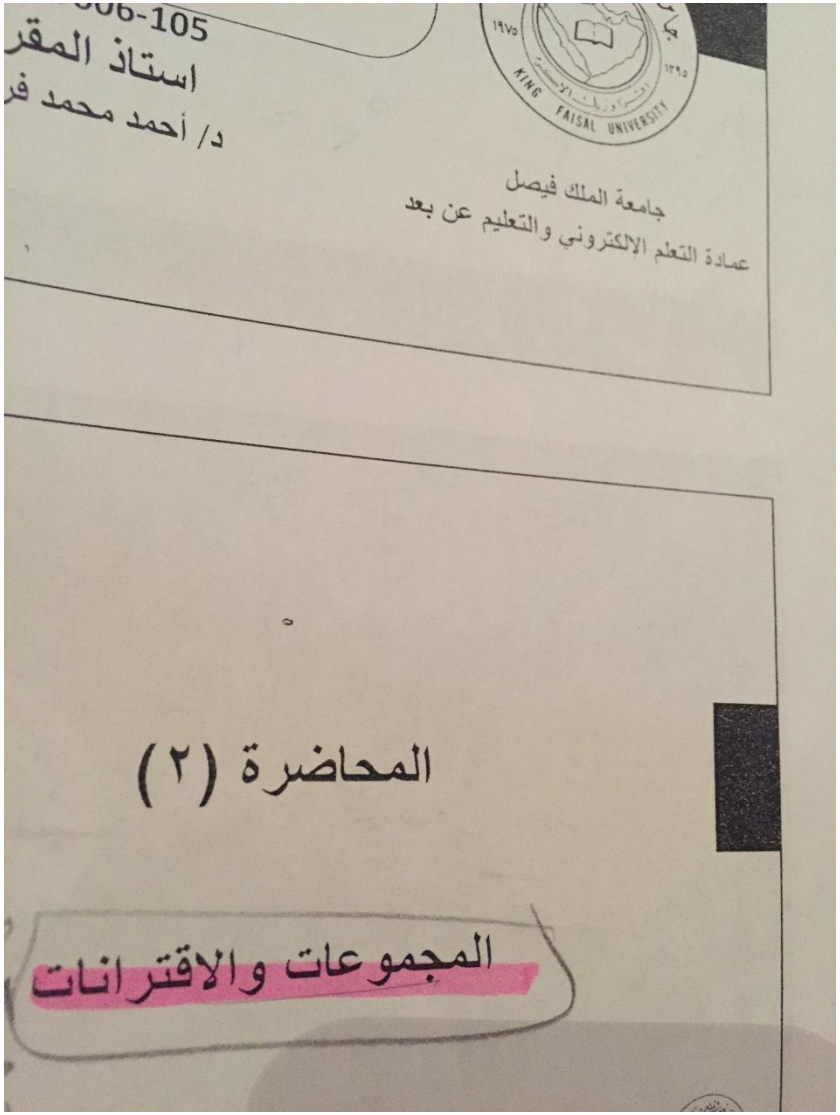
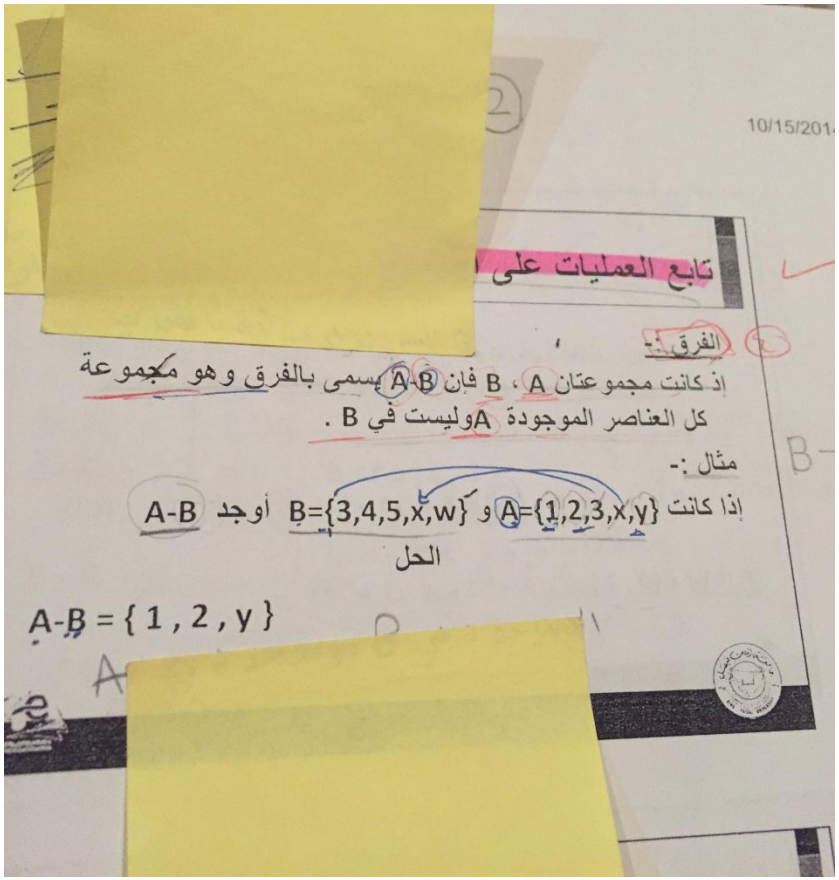

105-
استاذ المقر
د/ أحمد محمد فر
KING FAISAL UNIVERSITY
جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الالكتروني والتعليم عن بعد
المحاضرة (٢)
المجموعات والاقترانات


10/15/201
تابع العمليات على
الفرق :-
إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .
مثال :-
إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B
الحل
A-B = { 1 , 2 , y }

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

١- الجمع والطرح :-

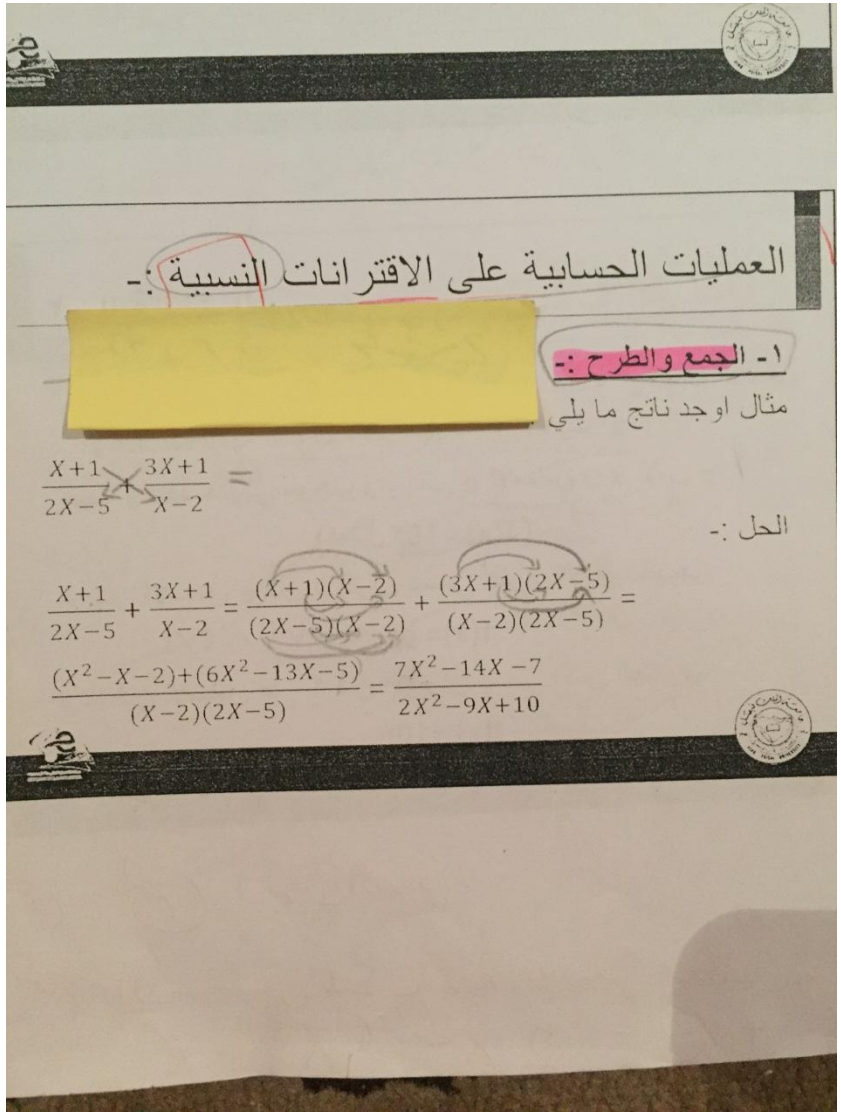
مثال اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}=$$

$$\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}=\frac{15x^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$$



العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

١- الجمع والطرح :-

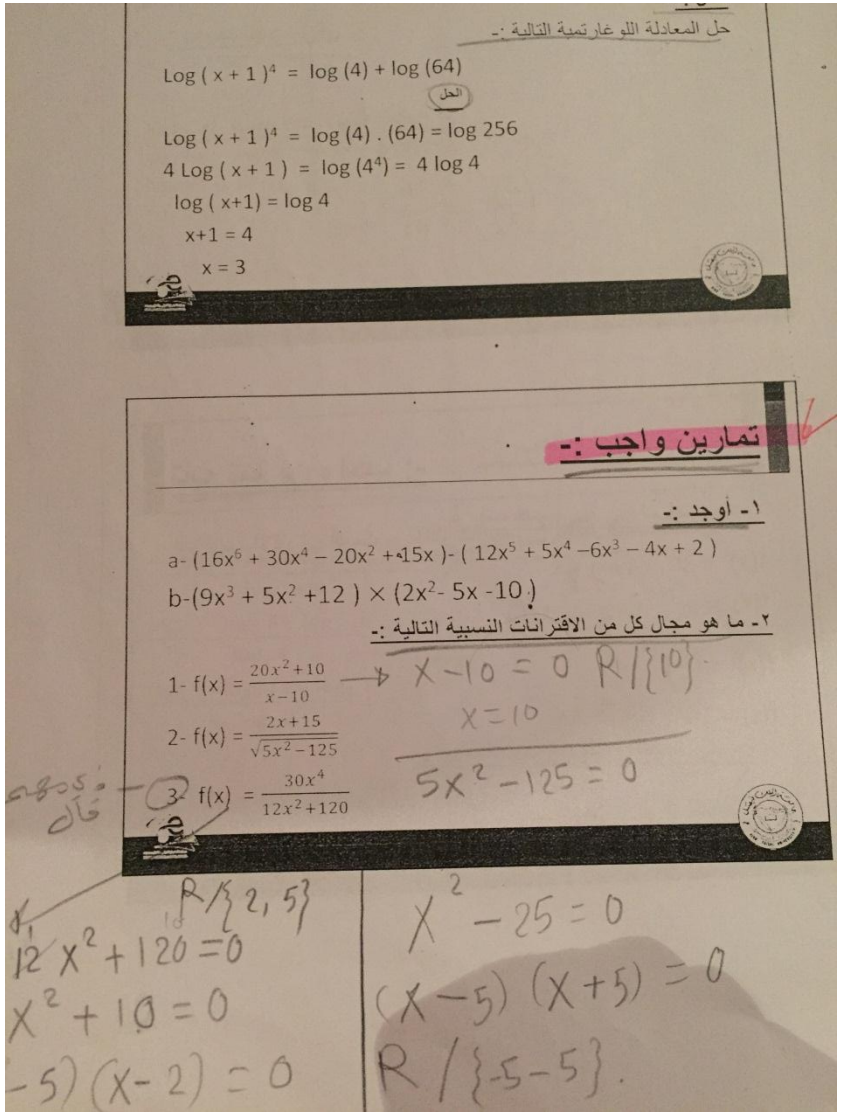
مثال اوجد ناتج ما يلي

$$\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}=$$

الحل :-

$$\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}=\frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)}+\frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}=$$

$$\frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}=\frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$$



حل المعادلة اللو غارتمية التالية :-

$\text{Log}\,(x+1)^4 = \log(4) + \log(64)$

الحل

$\text{Log}\,(x+1)^4 = \log(4).(64) = \log 256$

$4\,\text{Log}\,(x+1) = \log(4^4) = 4\log 4$

$\log(x+1) = \log 4$

$x+1 = 4$

$x = 3$

تمارين واجب :-

١- أوجد :-

a- $(16x^6 + 30x^4 - 20x^2 + 15x) - (12x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 4x + 2)$

b- $(9x^3 + 5x^2 + 12) \times (2x^2 - 5x - 10)$

٢- ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{20x^2+10}{x-10}$ → $x-10=0$ $R/\{10\}$ $x=10$

2- $f(x) = \frac{2x+15}{\sqrt{5x^2-125}}$ → $5x^2-125=0$

3- $f(x) = \frac{30x^4}{12x^2+120}$

$R/\{2,5\}$

$12x^2+120=0$

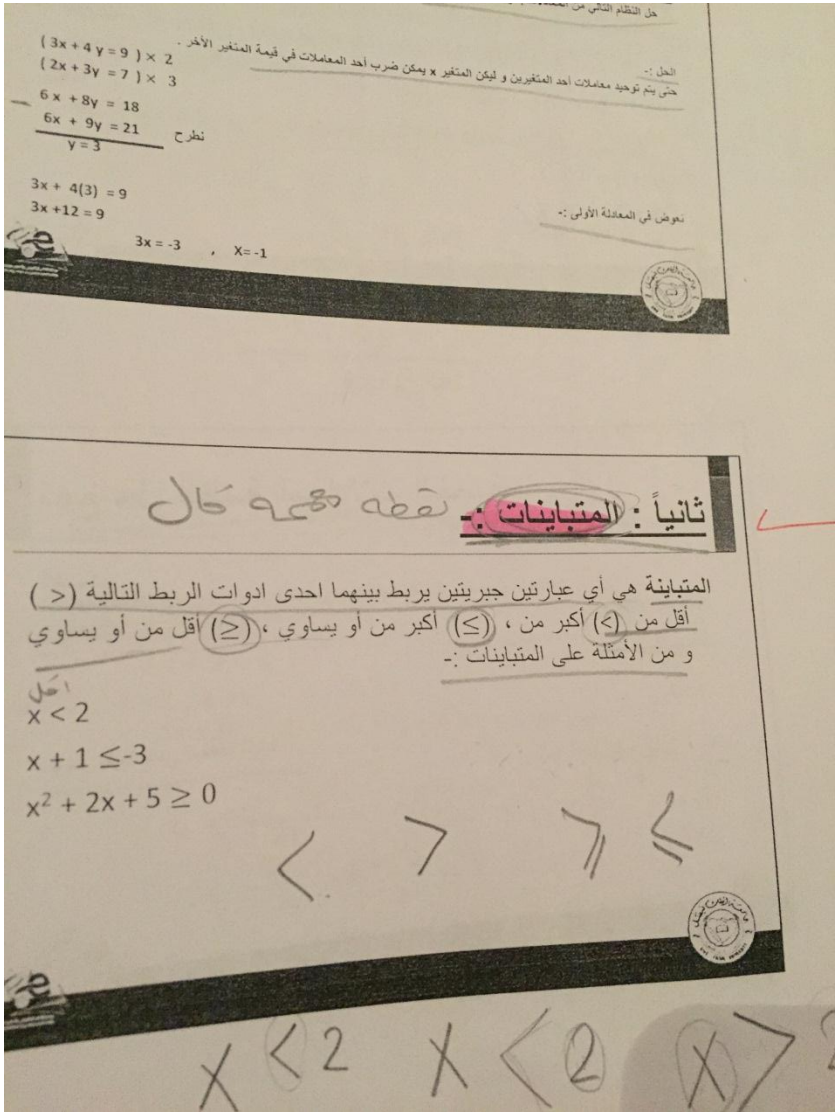
$x^2+10=0$

$(x-5)(x-2)=0$

$x^2-25=0$

$(x-5)(x+5)=0$

$R/\{-5-5\}$



حل النظام التالي من المعادلات .

الحل :-
حتى يتم توحيد معاملات أحد المتغيرين و ليكن المتغير x يمكن ضرب أحد المعاملات في قيمة المتغير الأخر .

$(3x + 4y = 9) \times 2$

$(2x + 3y = 7) \times 3$

$6x + 8y = 18$

$6x + 9y = 21$

نطرح

$y = 3$

نعوض في المعادلة الأولى :-

$3x + 4(3) = 9$

$3x + 12 = 9$

$3x = -3$ ، $X = -1$

ثانياً : المتباينات :-

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية ($<$) أقل من ($<$) أكبر من ، ($\leq$) أكبر من أو يساوي ، ($\geq$) اقل من أو يساوي
و من الأمثلة على المتباينات :-

$x < 2$

$x + 1 \leq -3$

$x^2 + 2x + 5 \geq 0$

الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية "R" .

تعريف : تسمى مجموعة قيم X التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) مجموعة الحل للمتباينة .

مجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

تابع المتباينات :-

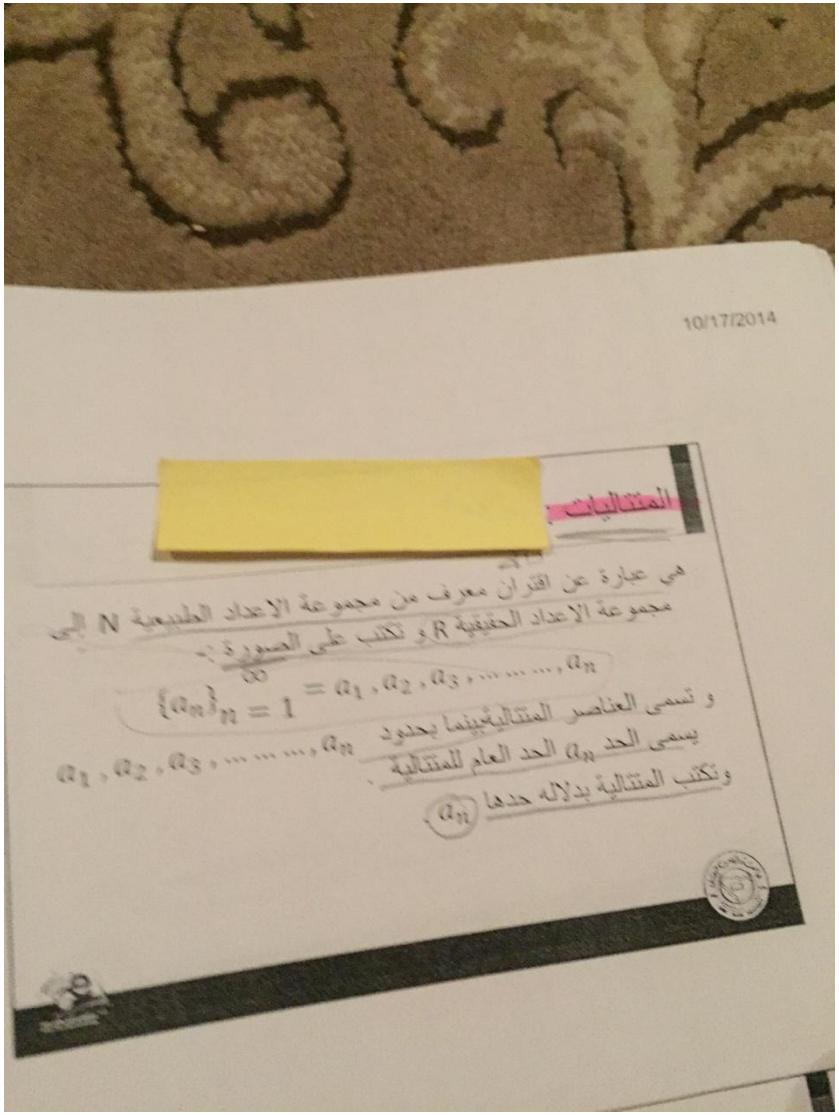
مثال :-

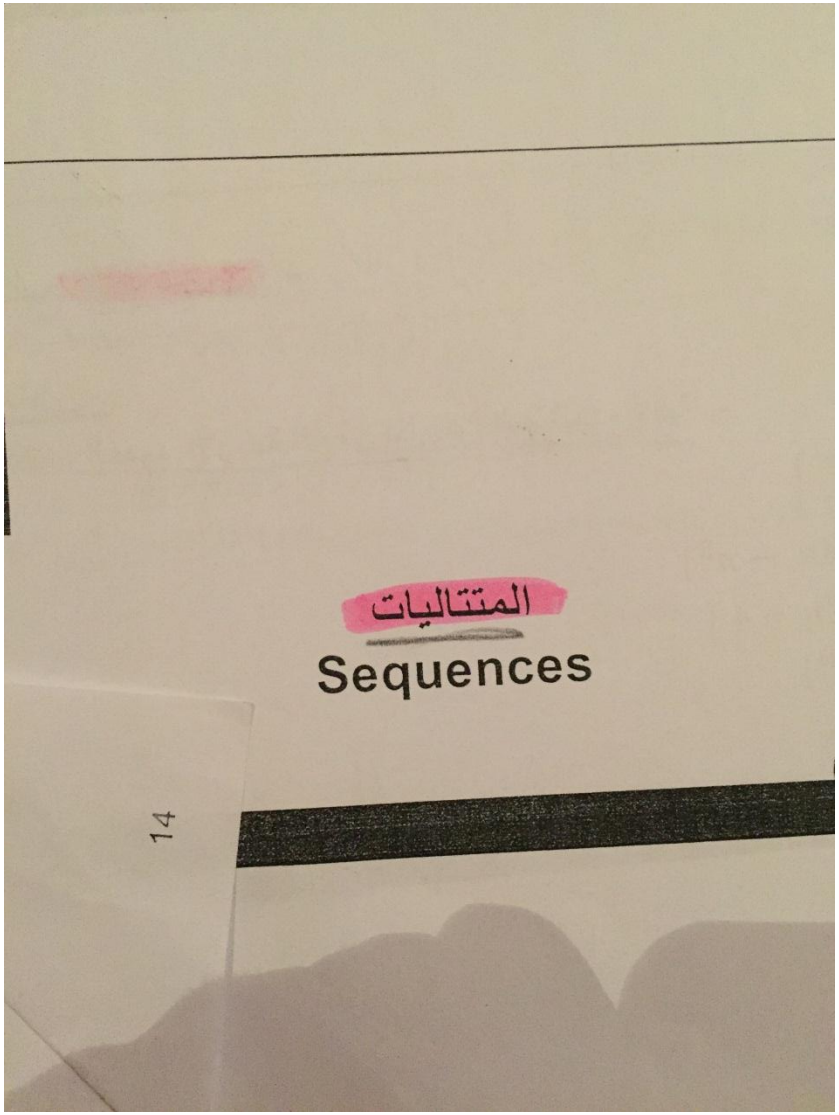
أوجد مجموعة الحل للمتباينة التالية :-

$3X - 2 > X + 1$

$3X - 2 > X + 1$

$3X -$


10/17/2014
المتتاليات
هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى
مجموعة الاعداد الحقيقية R و تكتب على الصورة :-
$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$
و تسمى العناصر المتتالية بينما يحدود
$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots, a_n$
يسمى الحد a_n الحد العام للمتتالية
وتكتب المتتالية بدلالة حدها (a_n)


المتتاليات
Sequences
14

المتتاليات :-

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R و تكتب على الصورة :-

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1 , a_2 , a_3 , \dots\dots\dots , a_n$$

و تسمى العناصر $a_1 , a_2 , a_3 , \dots\dots\dots , a_n$ المتتالية بينما يحدود يسمى الحد a_n الحد العام للمتتالية .

وتكتب المتتالية بدلاله حدها (a_n).

تابع المتتاليات :-

مثال :-

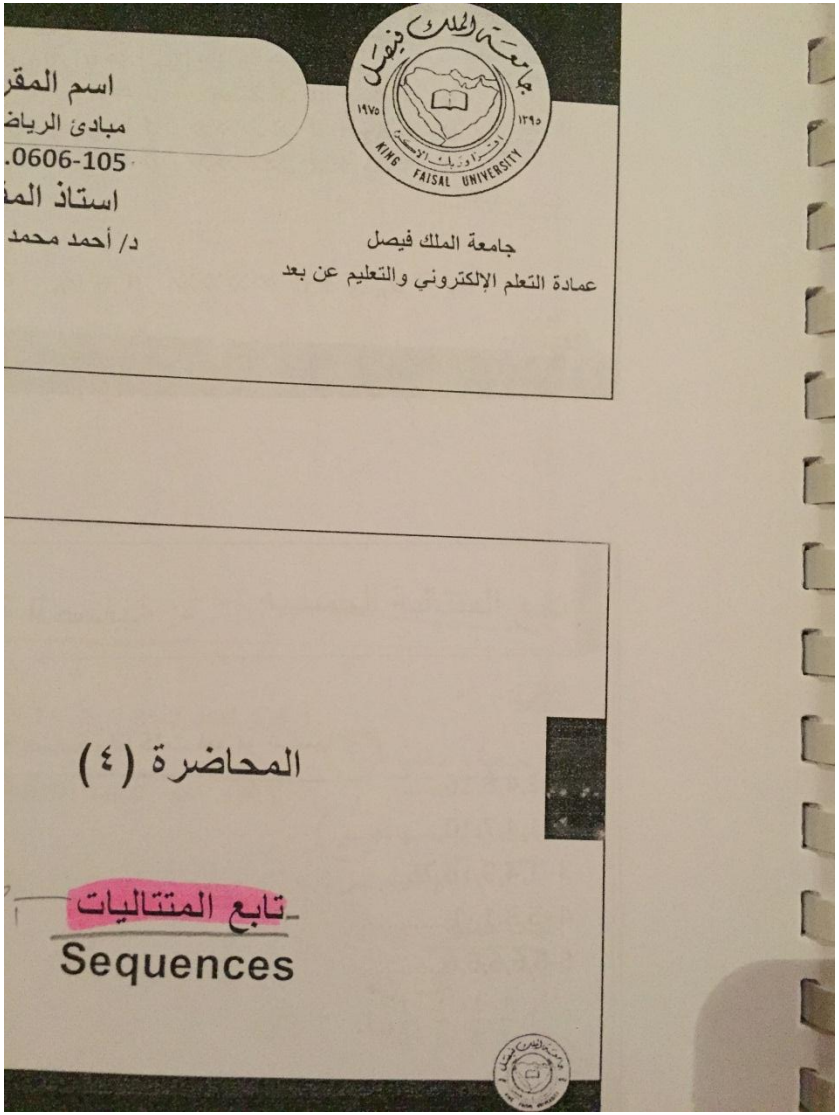
اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية :-

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{3n - n^3\}$

3- $\{2n + 4\}$

4- $\{2^n\}$


اسم المقر
مبادئ الرياض
0606-105.
استاذ المـ
د/ أحمد محمد
جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
المحاضرة (٤)
تابع المتتاليات
Sequences

جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر
مبادئ الرياضيات
QM.0606-105
استاذ المقرر
د/ أحمد محمد فرحان

المحاضرة (٥)

تابع المتتاليات
Sequences

اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r

أي : اذا كانت $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ متتالية هندسية فإن :-

$a_2 = a_1 r \quad \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \quad r = \frac{a_2}{a_1}$

$a_3 = a_2 r \quad \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \quad r = \frac{a_3}{a_2}$

$a_4 = a_3 r \quad \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \quad r = \frac{a_4}{a_3}$

$a_n = a_{n-1} r \quad \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \quad r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

تابع المتتالية الهندسية :-

مثال :

أي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها .

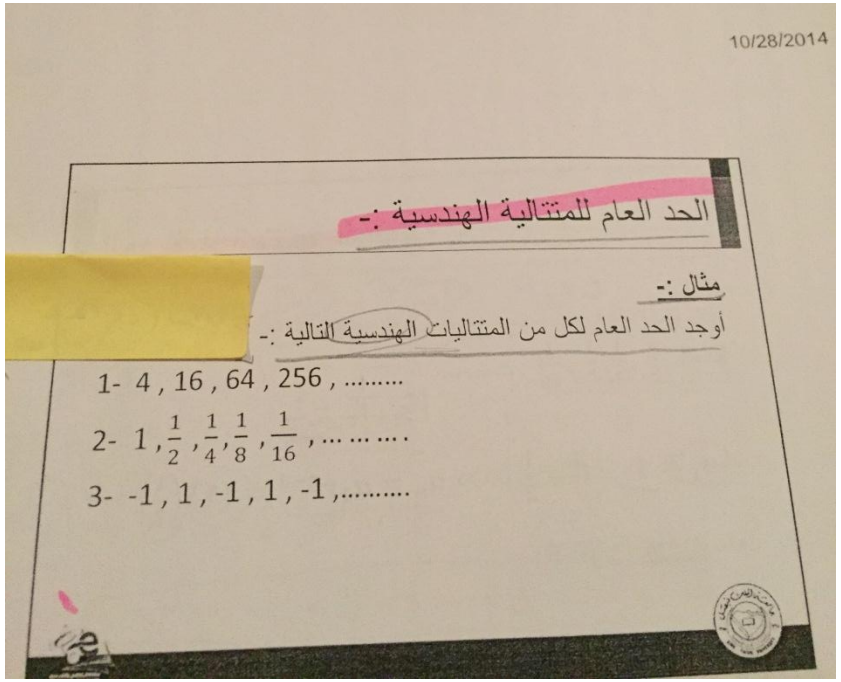
1- 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

2- 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

3- 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

4- $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \ldots\ldots$

5- 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...



10/28/2014

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

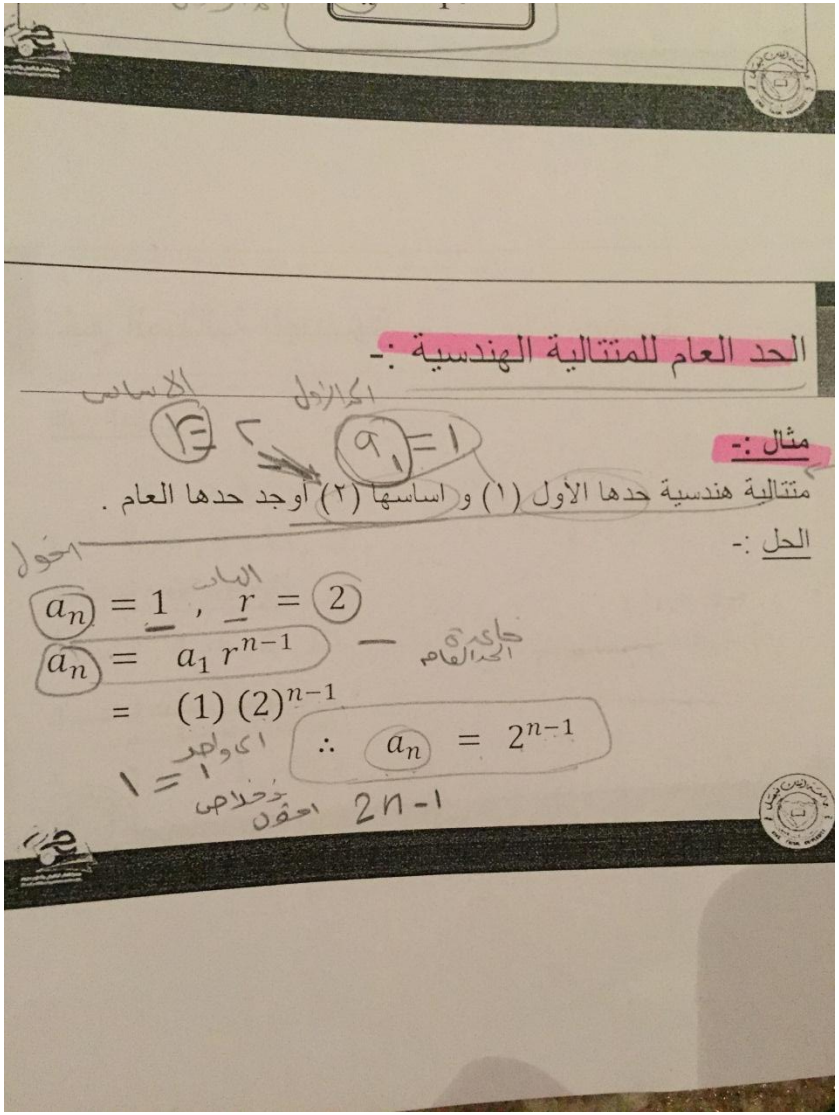
مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية :-

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

2- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots$

3- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,.....



الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (١) و اساسها (٢) أوجد حدها العام .

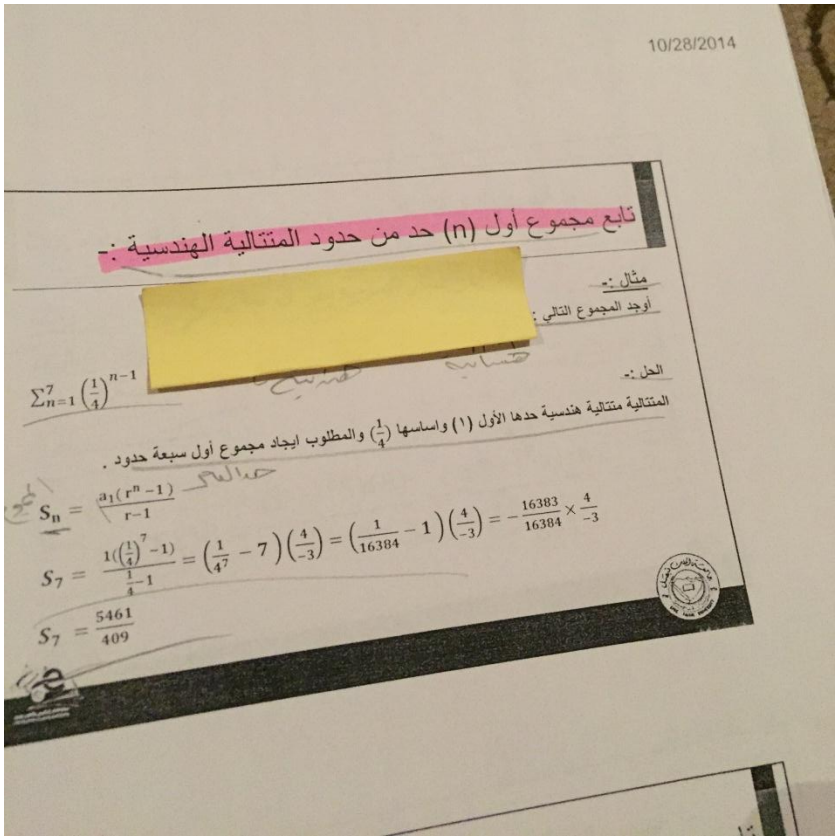
الحل :-

$a_n = 1 \ , \ r = 2$

$a_n = a_1 \, r^{n-1}$

$= (1)\,(2)^{n-1}$

$\therefore \ a_n = 2^{n-1}$



10/28/2014

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (١) واساسها $\left(\frac{1}{4}\right)$ والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7-1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{4^7}-7\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = \left(\frac{1}{16384}-1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = -\frac{16383}{16384}\times\frac{4}{-3}$$

$$S_7 = \frac{5461}{409}$$

العنصر a_{32} : العنصر في الصف الثالث العمود الثاني

العنصر a_{24} : العنصر في الصف الثاني العمود الرابع

أنواع المصفوفات :

١- المصفوفة الصفرية :-

المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مصفوفة صفرية رتبتها 2×3

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة و الفائدة المركبة :-

مثال :-

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ ريال لمدة ما بفائدة بسيطة ١٠% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بل
١٢٥٠ ريال أحسب مدة الاستثمار

الحل :-

$a_1 = 1000$

n = ?

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

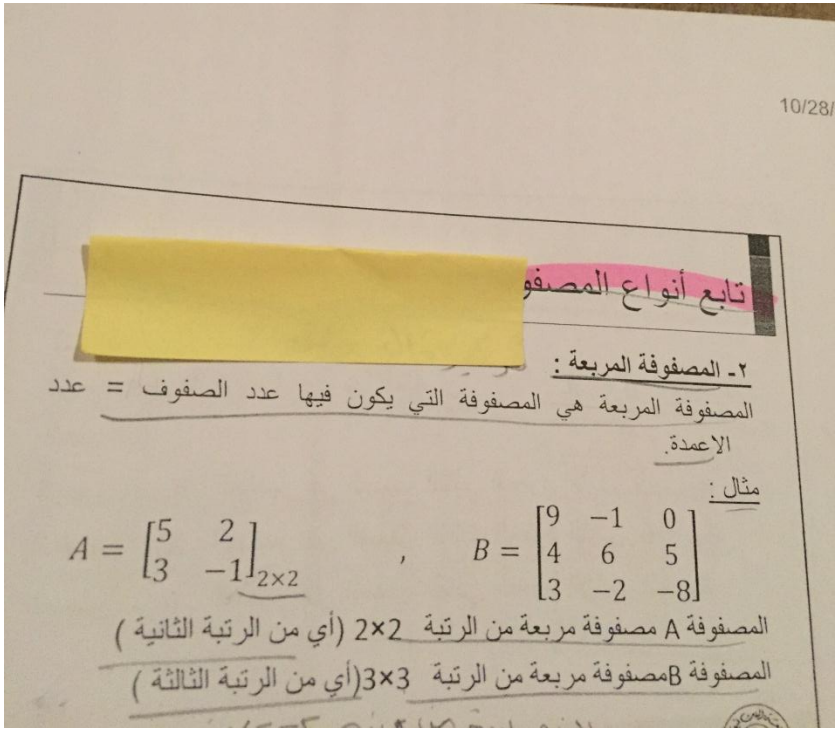
$a_? =$ المبلغ في نهاية المدة

$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$

$1250 - 1000 = n.100$

$250 = n.100$

$n = \frac{250}{100} = 2.5$ سنة



تابع أنواع المصفو

٢- المصفوفة المربعة :

المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة.

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 (أي من الرتبة الثانية)

المصفوفة Bمصفوفة مربعة من الرتبة 3×3(أي من الرتبة الثالثة)

تابع أنواع المصفوفا

٤- المصفوفة المحايدة :

المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد و يرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها)

مثال :-

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تابع أنواع المصفوفات

$1-A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad 2-B^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة المتماثلة

تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت $A = A^T$

مثال :-

اي من المصفوفات التالية متماثلة :

$1-A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad 2-B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

الحل

$1-A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $A \neq A^T$ ∴A ليست متماثلة

$2-B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$, $B = B^T$ ∴B متماثلة

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

تابع أنواع المص

٥- المصفوفة المثلثية :-

وتقسم إلى قسمين :

أ – المصفوفة المثلثية العليا :-

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار .

مثال :-

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

ب – المصفوفة المثلثية السفلى :-

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار .

مثال :-

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$

10/28/2014

العمليات على المصفوفات :

١- الجمع والطرح :

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة .

مثال :

أوجد ناتج ما يلي :-

1- $A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}+B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}$

2- $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix}_{3\times3}-B=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}$

الحل

1- $A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}+B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}=\begin{bmatrix}2 & 11 & 11\\ 8 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$

2- $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix}_{3\times3}-B=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$

العمليات على المصفوفات :

١- الجمع والطرح :

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة .

مثال :

اوجد ناتج ما يلي :-

1- $A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times3} + B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3}$

2- $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix}_{3\times3} - B=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times3}$

الحل

1- $A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}_{2\times3} + B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix}2 & 11 & 11\\ 8 & 5 & 2\end{bmatrix}_{2\times3}$

2- $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix}_{3\times3} - B=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 6\end{bmatrix}_{3\times3}$

تابع العمليات على المصفوفات :

٢- الضرب بعدد ثابت :-

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فاننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد .

مثال :-

اذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}4 & 9\\ 6 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\times1+1\times4) \\ 6\times1+2\times4) \\ 1\times1+7\times4) \\ 0\times1+4\times4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4\times2}$$

لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة الأولى لا تساوي

تابع العمليات على المصفوفات :

ملاحظة :-

١- اذا كانت A_{mn} وكانت B_{nk} فإن $(AB)_{mk}$.

مثال :-

اذا كانت $A_{3\times5}, B_{5\times6}$ فأوجد رتبة AB.

الحل :-

$$A_{mn} \times B_{nk} = AB_{mk}$$
$$A_{3\times5} \times B_{5\times6} = AB_{3\times6}$$

و نستنتج من هذا المثال أن :-

$$AB \neq BA$$

تابع العمليات على المصفوفات :

الحل :-

1) $3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$

2) $2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

3) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$

تابع العمليات على المصفو

٣- ضرب المصفوفات :-

عند ضرب مصفوفتين يجب أن تكون عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية وعند الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر a_{ij} في المصفوفة الناتجة .

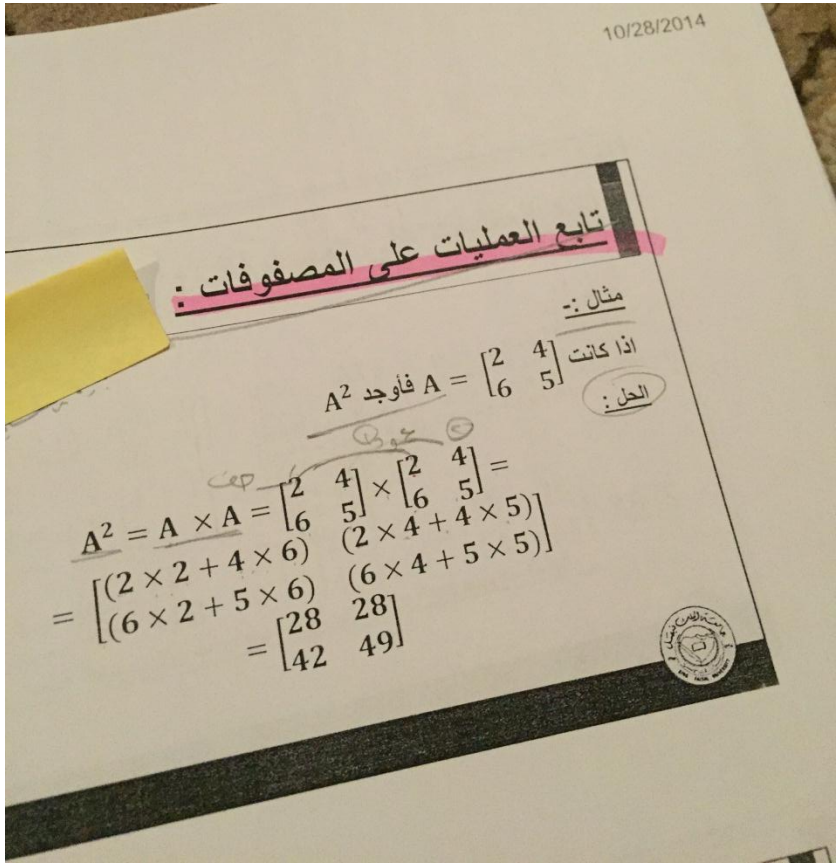
ويتم الضرب : صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية)

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4,3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3,2}$$

احسب


10/28/2014
تابع العمليات على المصفوفات :
مثال :-
اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ فاوجد A^2
الحل :
$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix}(2\times 2+4\times 6) & (2\times 4+4\times 5)\\ (6\times 2+5\times 6) & (6\times 4+5\times 5)\end{bmatrix}$
$= \begin{bmatrix}28 & 28\\ 42 & 49\end{bmatrix}$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في إيجاد معكوس المصفوفة

نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1}

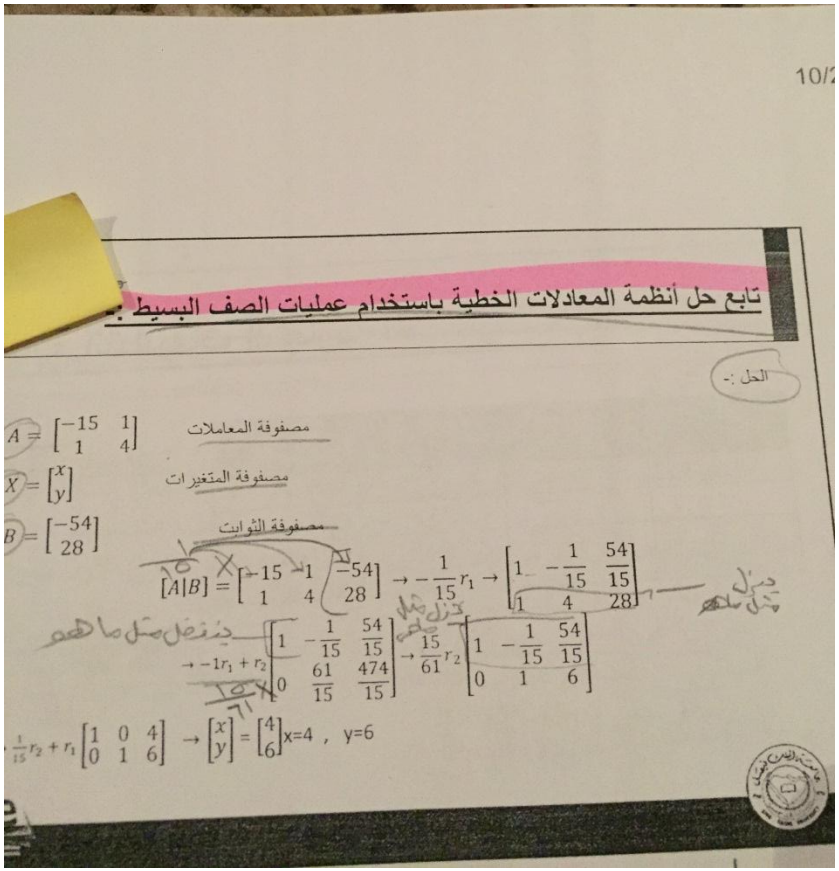
خطوات إيجاد معكوس المصفوفة :-

تأخذ المصفوفة الشكل التالي :-

$$\begin{bmatrix} \text{العنصر الأول} & \text{العنصر الرابع} \\ \text{العنصر الثاني} & \text{العنصر الثالث} \end{bmatrix}$$

يتم وضع مصفوفة الوحدة بجانب المصفوفة الأصلية كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} \text{العنصر الأول} & \text{العنصر الرابع} \\ \text{العنصر الثاني} & \text{العنصر الثالث} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$



تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

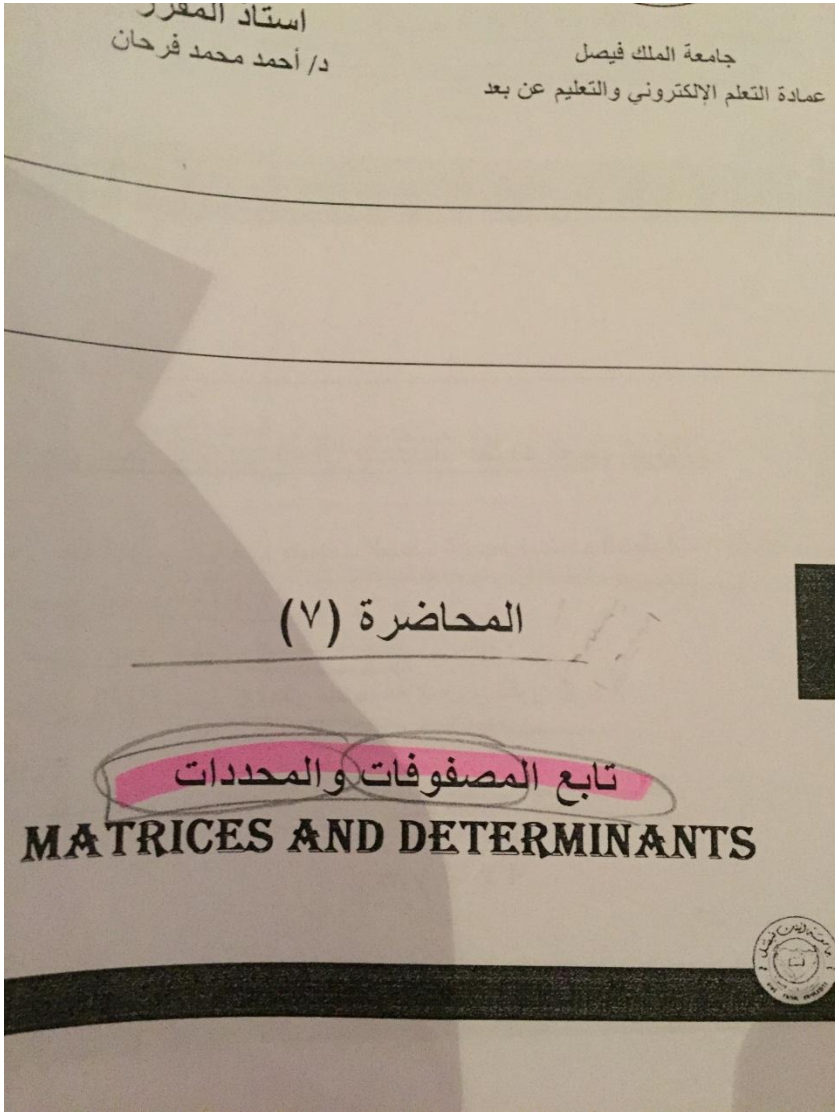
$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} -54 \\ 28 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -54 \\ 1 & 4 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{1}{15}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 1 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -1r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 0 & \frac{61}{15} & \frac{474}{15} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{15}{61}r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{15}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \quad x=4 \ , \ y=6$$



استاذ المقرر

د/ أحمد محمد فرحان

جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

المحاضرة (٧)

تابع المصفوفات والمحددات

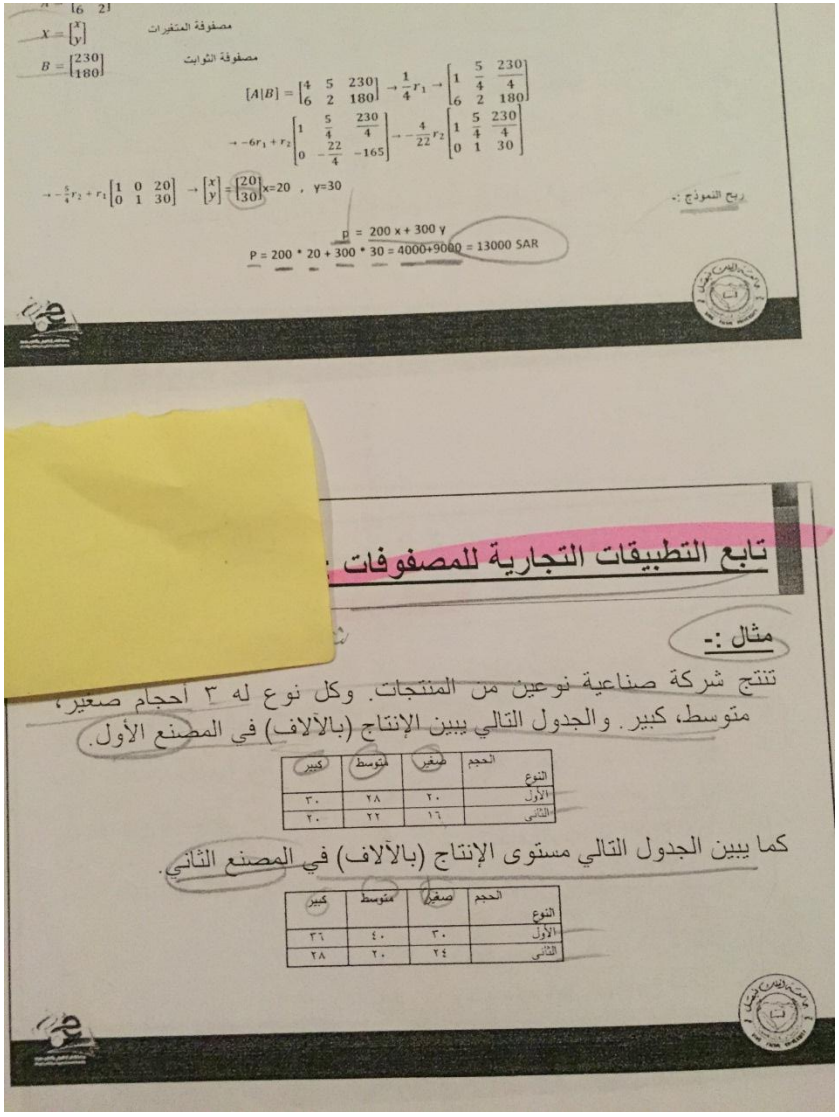
MATRICES AND DETERMINANTS

$\rightarrow \frac{1}{15}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ x=4 , y=6

التطبيقات التجارية للمصفوفات

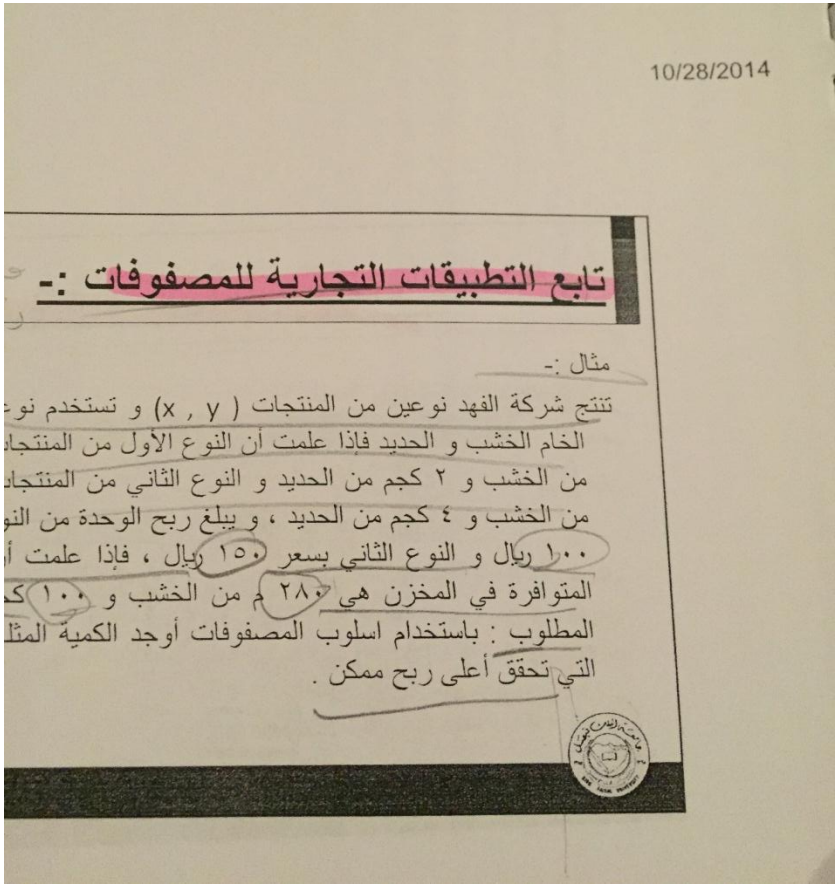
مثال :-

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر ٦٠ ورقة) و يباع بسعر ٢ ريال و يحتاج إلى ٣ ساعات عمل في قسم القص و ٢ ساعة عمل في قسم التجميع ، و النوع الثاني (دفتر ١٢٠ ورقة) يباع بسعر ٣ ريال و يحتاج الى ٢ ساعة عمل في قسم القص و ٤ ساعات عمل في قسم التجميع ، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي ٣٥ ساعة ، و ٥٠ ساعة في قسم التجميع ، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن.



النوع / الحجم	صغير	متوسط	كبير
الأول	٢٠	٢٨	٣٠
الثاني	١٦	٢٢	٢٠

النوع / الحجم	صغير	متوسط	كبير
الأول	٣٠	٤٠	٣٦
الثاني	٢٤	٢٠	٢٨



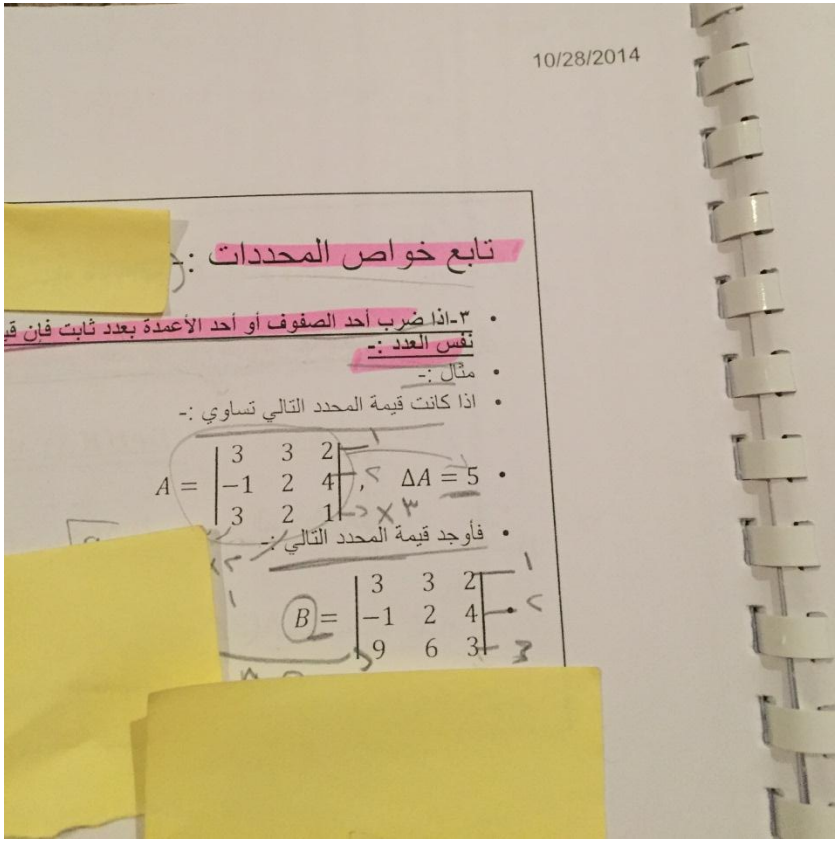
مبادئ الرياضيات
QM.0606-105
استاذ المقرر
د/ أحمد محمد فرحان

جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

المحاضرة (٨)

تابع المصفوفات والمحددات

TRICES AND DETERMINANTS


10/28/2014

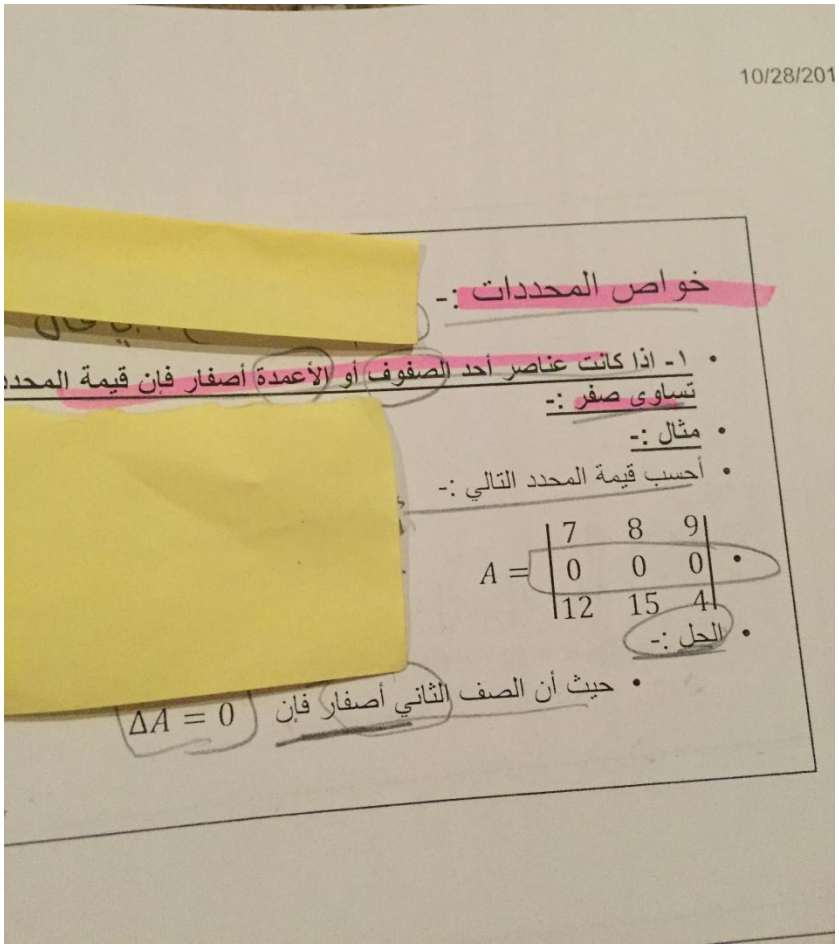
تابع خواص المحددات :-

- ٣-اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الأعمدة بعدد ثابت فإن قيمة المحدد الجديد تساوي حاصل ضرب العدد في المحدد الأصلي
- مثال :-
- اذا كانت قيمة المحدد التالي تساوي :-

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta A = 5$$

- فأوجد قيمة المحدد التالي :-

$$B = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$


10/28/201

خواص المحددات :-

- ١- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الأعمدة أصفار فإن قيمة المحدد تساوي صفر :-
- مثال :-
- أحسب قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{vmatrix}$$

- الحل :-
- حيث أن الصف الثاني أصفار فإن $\Delta A = 0$

• الحل :-

• لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\Delta A = 0$

تابع خواص المحددات :-

• $\Delta(AB) = (\Delta A)(\Delta B)$ 7 –

• مثال :

• اذا كانت A ، B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت :-

• $(\Delta A) = 2$, $(\Delta B) = 5$, فأوجد $\Delta(AB)$

• الحل :-

• $\Delta(AB) = (\Delta A)(\Delta B) = (2) \times (5) = 10$

10/28/2014

تابع خواص المحددات :-

• ٤-اذا كانت فإن حقيقي عدد أي k وكان مربعة مصفوفة $n \times n$

:.

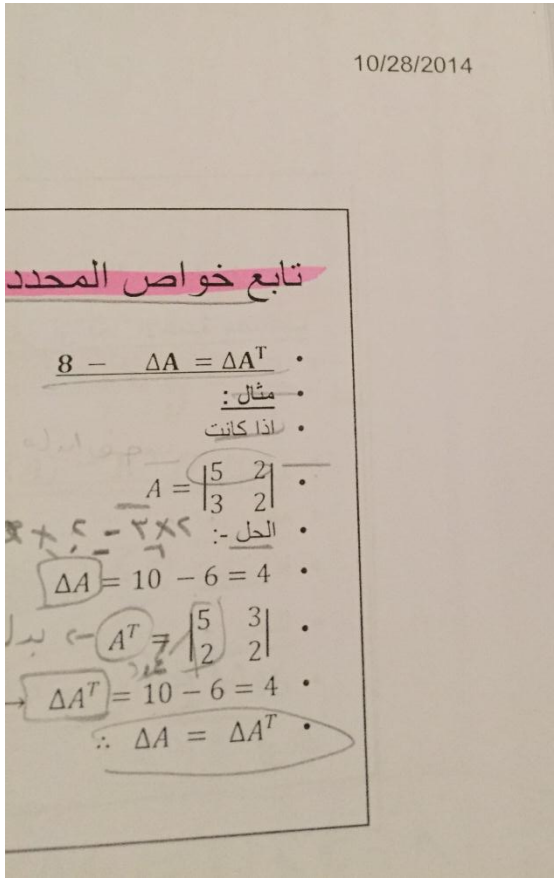
• $Det(KA) = K^N Det(A)$

• مثال :-

• اذا كانت $\Delta(A_{2\times2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد $(3A)$

• الحل :-

• $\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$



تابع خواص المحدد

- **8 –** $\Delta A = \Delta A^T$
- مثال :
- اذا كانت
- $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$
- الحل :-
- $\Delta A = 10 - 6 = 4$
- $A^T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
- $\Delta A^T = 10 - 6 = 4$
- $\therefore \Delta A = \Delta A^T$

- اذا كانت
- $A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$
- الحل :-
- $\Delta A = 10 - 6 = 4$
- $A^T = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$
- $\Delta A^T = 10 - 6 = 4$
- $\therefore \Delta A = \Delta A^T$

تابع خواص المحددات :-

- **٩- محدد المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القط**
- **مثال :-**
- أوجد قيمة المحدد التالي :-

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

- الحل :-
- $\Delta A = (2)(1)(-3)(-4) = 24$

تابع خواص المحددات :-

- **١٠- محدد المصفوفة المحايدة = 1**
- أي $\mathrm{Det}(I_n) = 1$
- مثال :-
- أوجد قيمة محدد المصفوفة I_5
- الحل :-
- $\Delta I_5 = 1$

تابع خواص المحددات :-

- **١١- قيمة محدد المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر :-**

مثال :

أوجد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$\Delta A = (2)(3)(4) = 24$

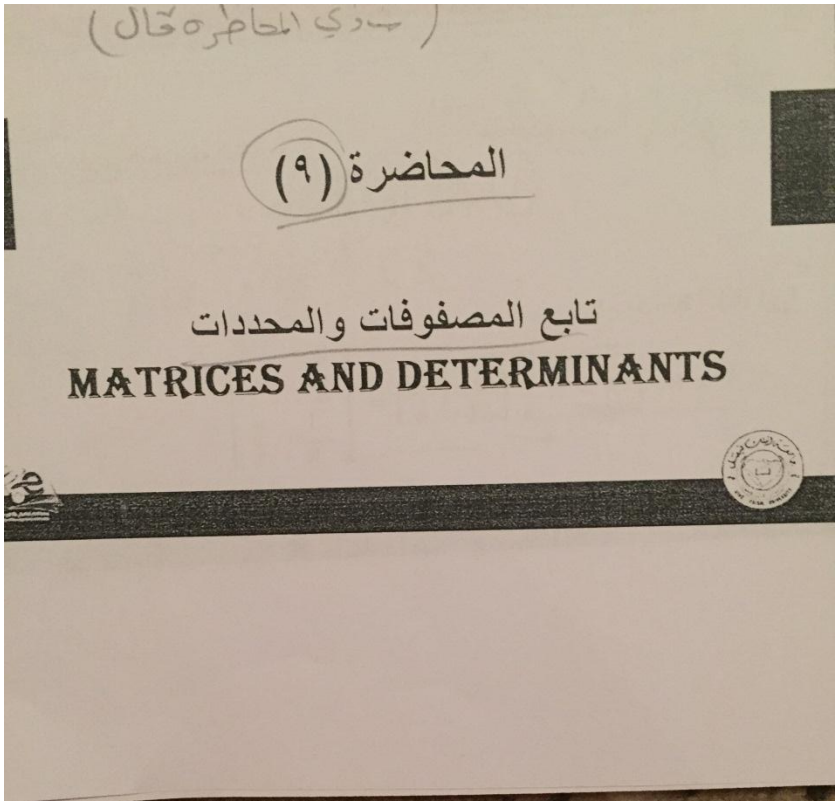
مثال :

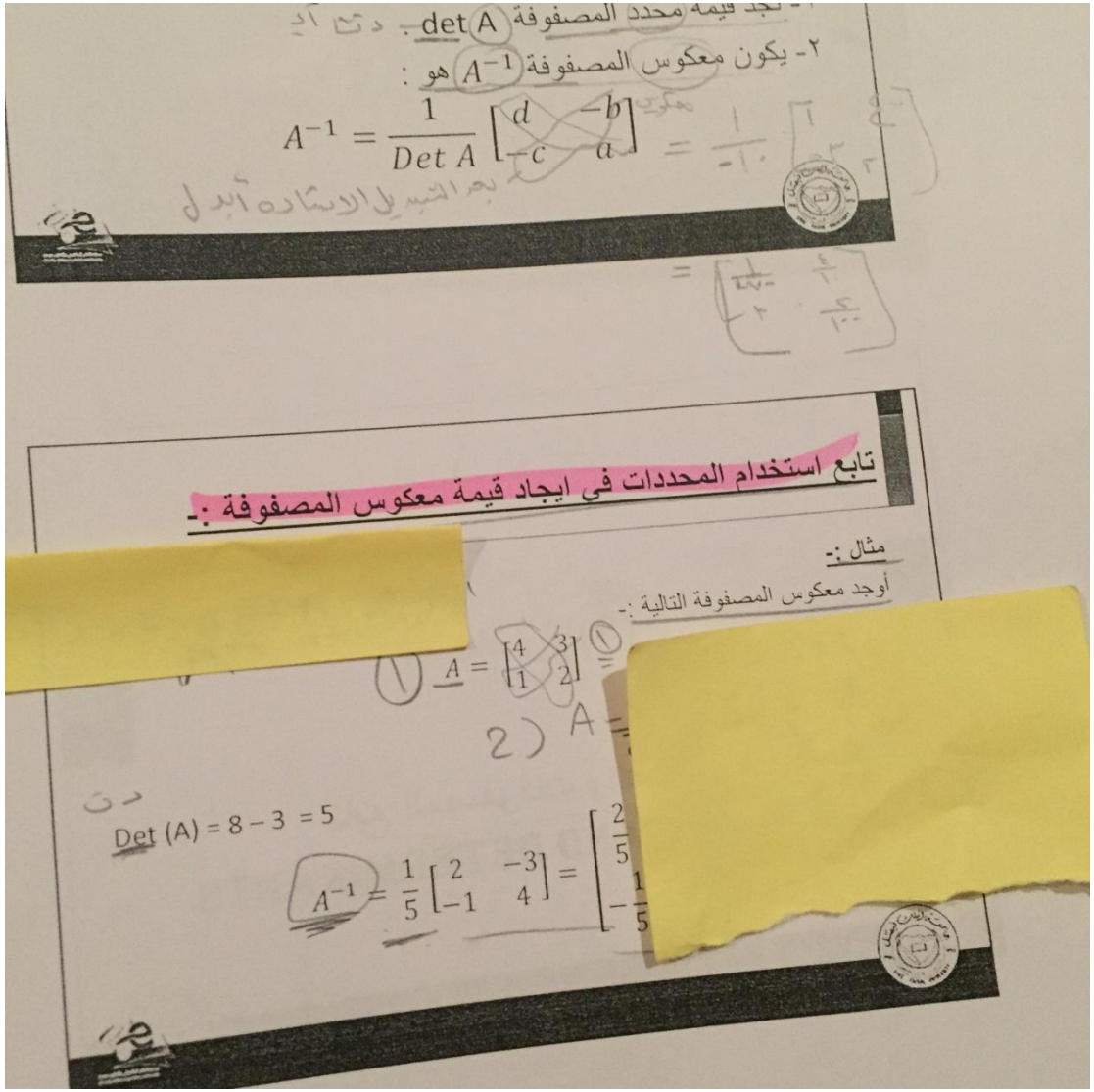
أوجد قيمة المحدد التالي

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

الحل :-

$\Delta A = (1)(1)(3) = 3$


المحاضرة (٩)
تابع المصفوفات والمحددات
MATRICES AND DETERMINANTS



٢- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{Det\ A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

تابع استخدام المحددات في ايجاد قيمة معكوس المصفوفة :-

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Det (A) = 8 − 3 = 5

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \\ -\frac{1}{5} & \end{bmatrix}$$

تابع استخدام المحددات فى ايجاد قيمة معكوس المصفوفة :-

ملاحظة ١ :

اذا كانت قيمة محدد المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس .

ملاحظة ٢ :

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة

أي اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

١- اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 بحيث $(DetA \neq 0)$

أي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{20}{28} \times 13 + & \frac{4}{28} \times 8 + & \frac{16}{28} \times 16 \\ \frac{8}{28} \times 13 + & \frac{4}{28} \times 8 + & -\frac{5}{28} \times 16 \\ \frac{20}{28} \times 13 + & -\frac{4}{28} \times 8 + & -\frac{9}{28} \times 16 \end{bmatrix} \therefore X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تابع استخدام المحددات فى حل أنظمة المعادلات الخطية :-

ب- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامر) :-

مثال :-

أوجد حل النظام التالي من المعادلات باستخدام المحددات :-

$x + y = 1$

$2x + 3y = 5$

الحل :-

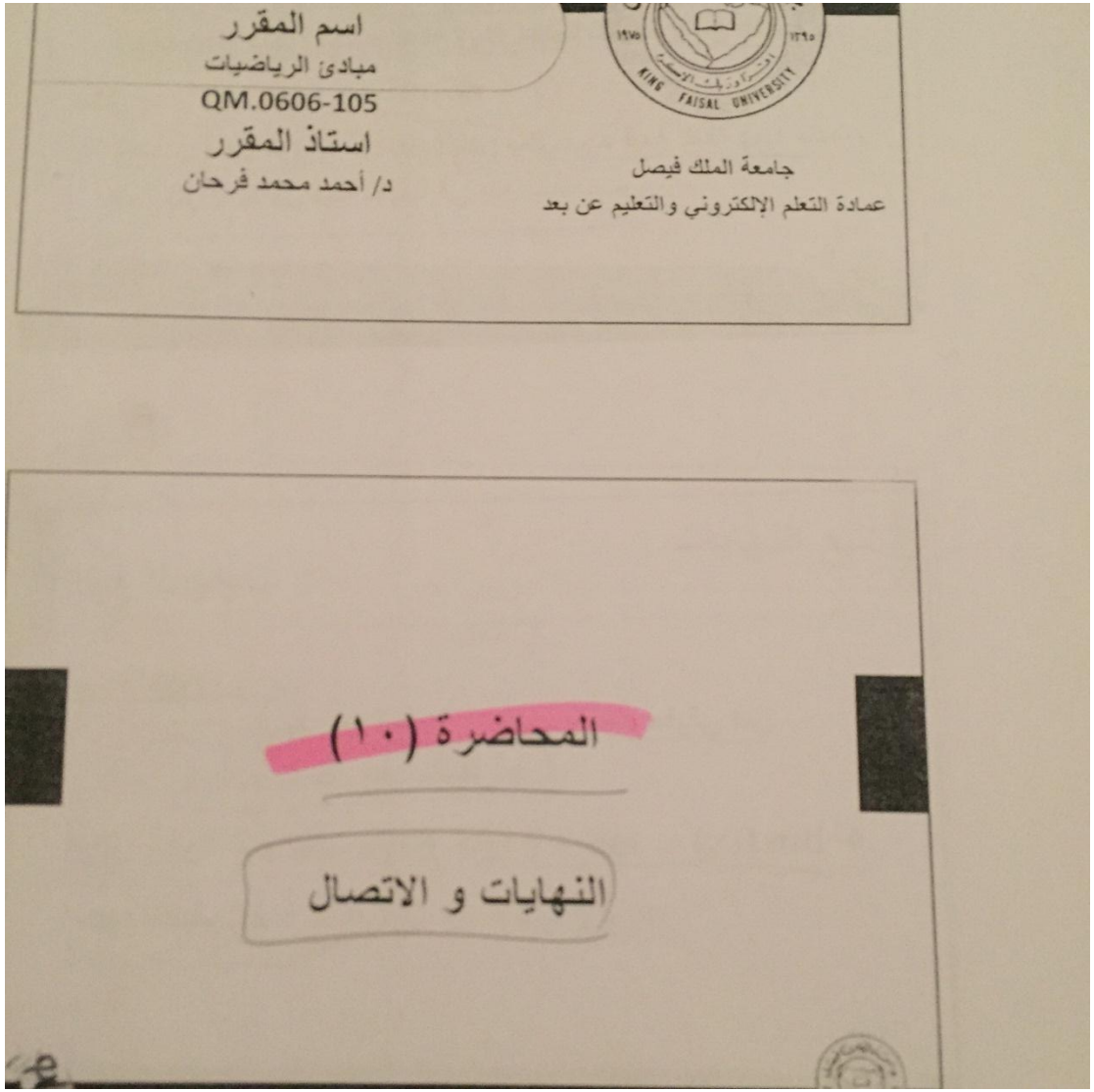
$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$

$\therefore x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2 , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3$

ملاحظة : اذا كانت محدد المصفوفة Δ تساوي صفر فإن النظام لا يوجد له حل .


اسم المقرر
مبادئ الرياضيات
QM.0606-105
استاذ المقرر
د/ أحمد محمد فرحان
جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
KING FAISAL UNIVERSITY
المحاضرة (١٠)
النهايات و الاتصال

$= (3+4-2)^3 = (5)^3 = 125$

9- $\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2+5} = \sqrt[3]{2^2+5} = \sqrt[3]{4+5} = \sqrt[3]{9} =$

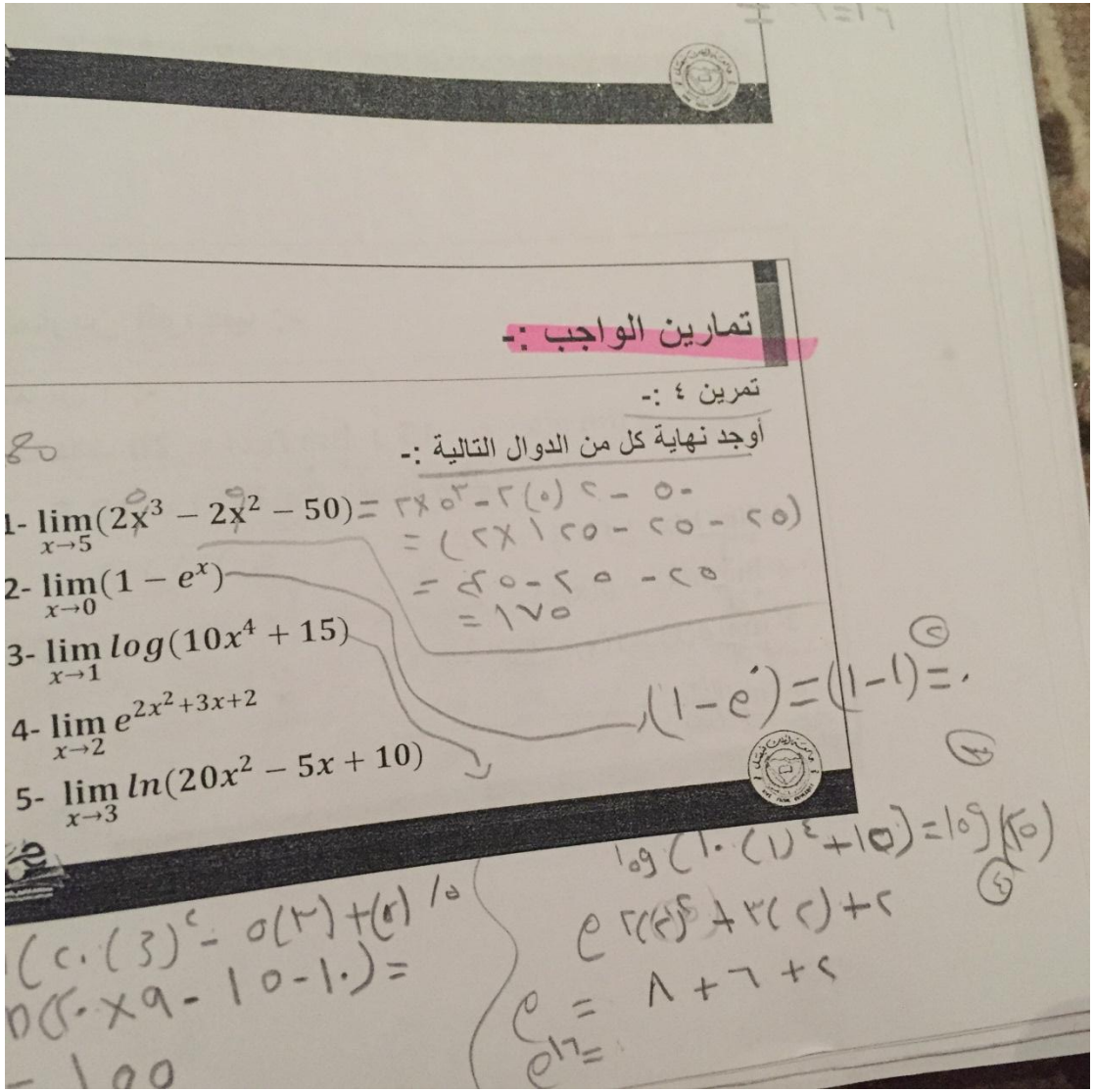
2.08

تابع النهايات :

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , \quad x < 5 \\ 15x - 2 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .



تمارين الواجب :-

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2x^3 - 2x^2 - 50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1 - e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4 + 15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2 - 5x + 10)$

٠٥/٠١/٣٦

تمارين الواجب :-

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x \to 3} f(x)$

2- $\lim_{x \to 1} f(x)$

تمارين الواجب :-

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين = البسط / المقام

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

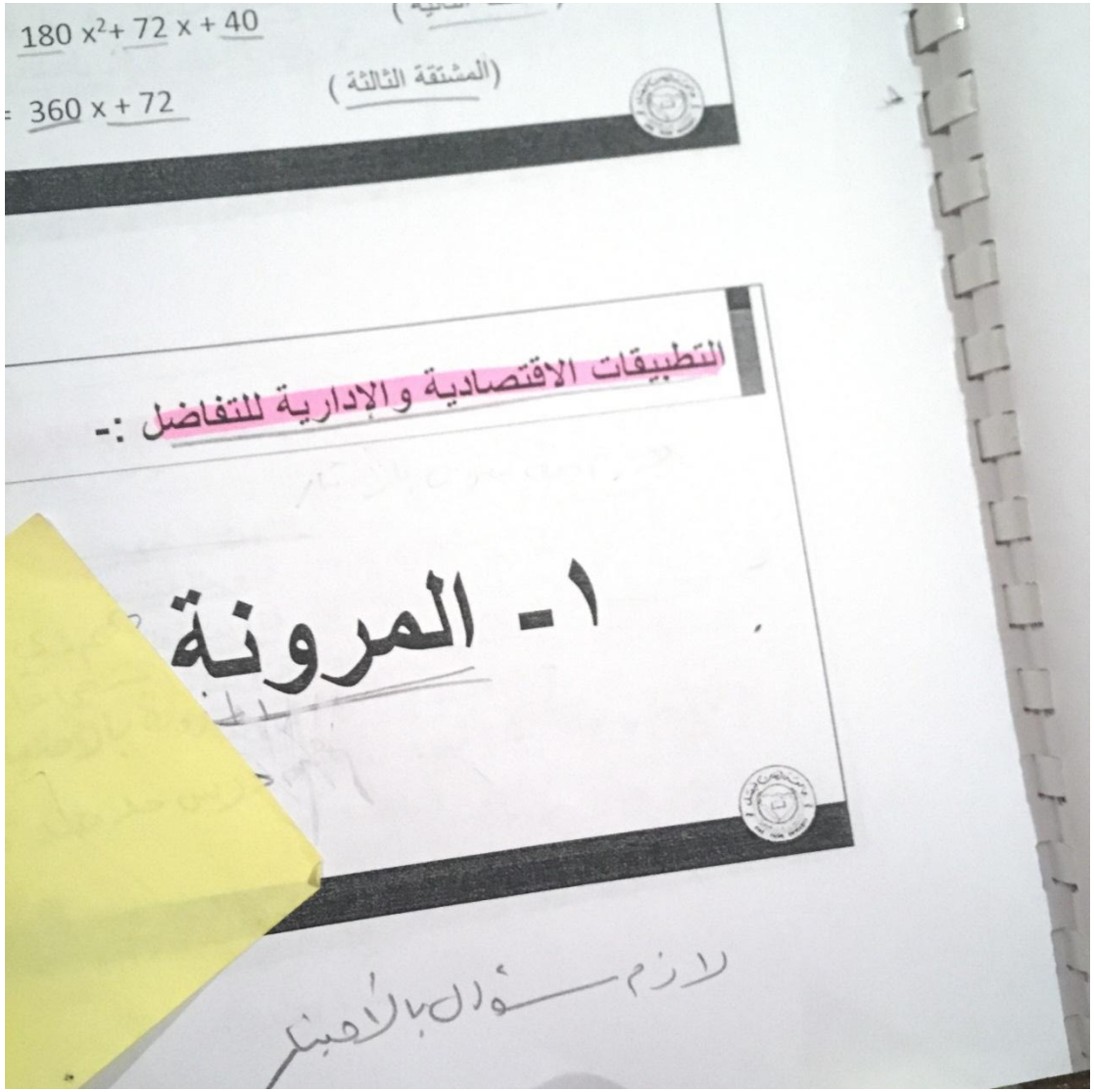
$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (4x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 12x - 6}{9x^2} = \frac{-6}{9x^2}$$

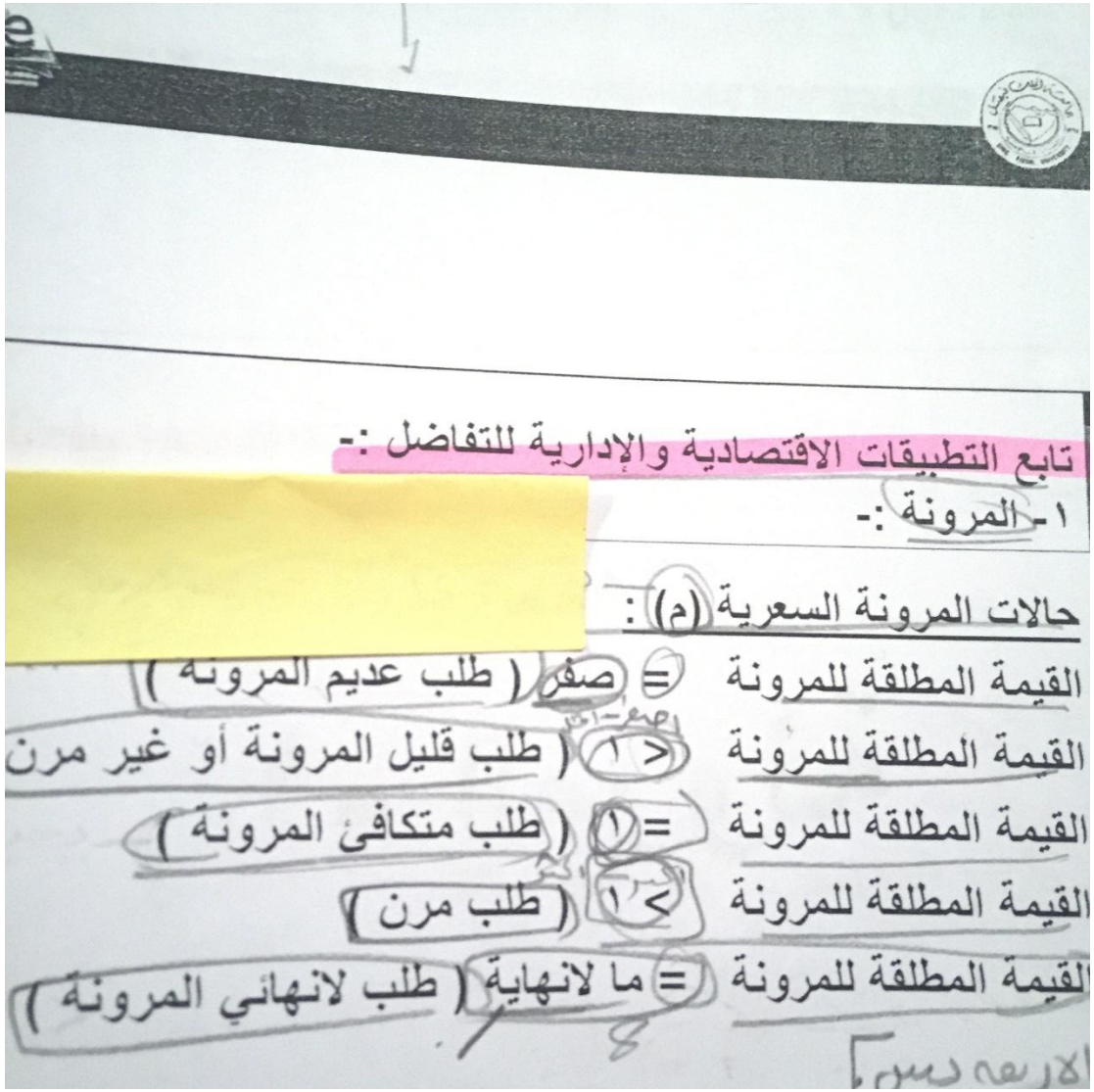
القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

1- $y = (15x2 + 20)^3$


$180\ x^2 + 72\ x + 40$
$= 360\ x + 72$
(المشتقة الثالثة)
التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-
١- المرونة



تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١- المرونة :-

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن

القيمة المطلقة للمرونة = ١ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > ١ (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١- المرونة :-

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠ وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

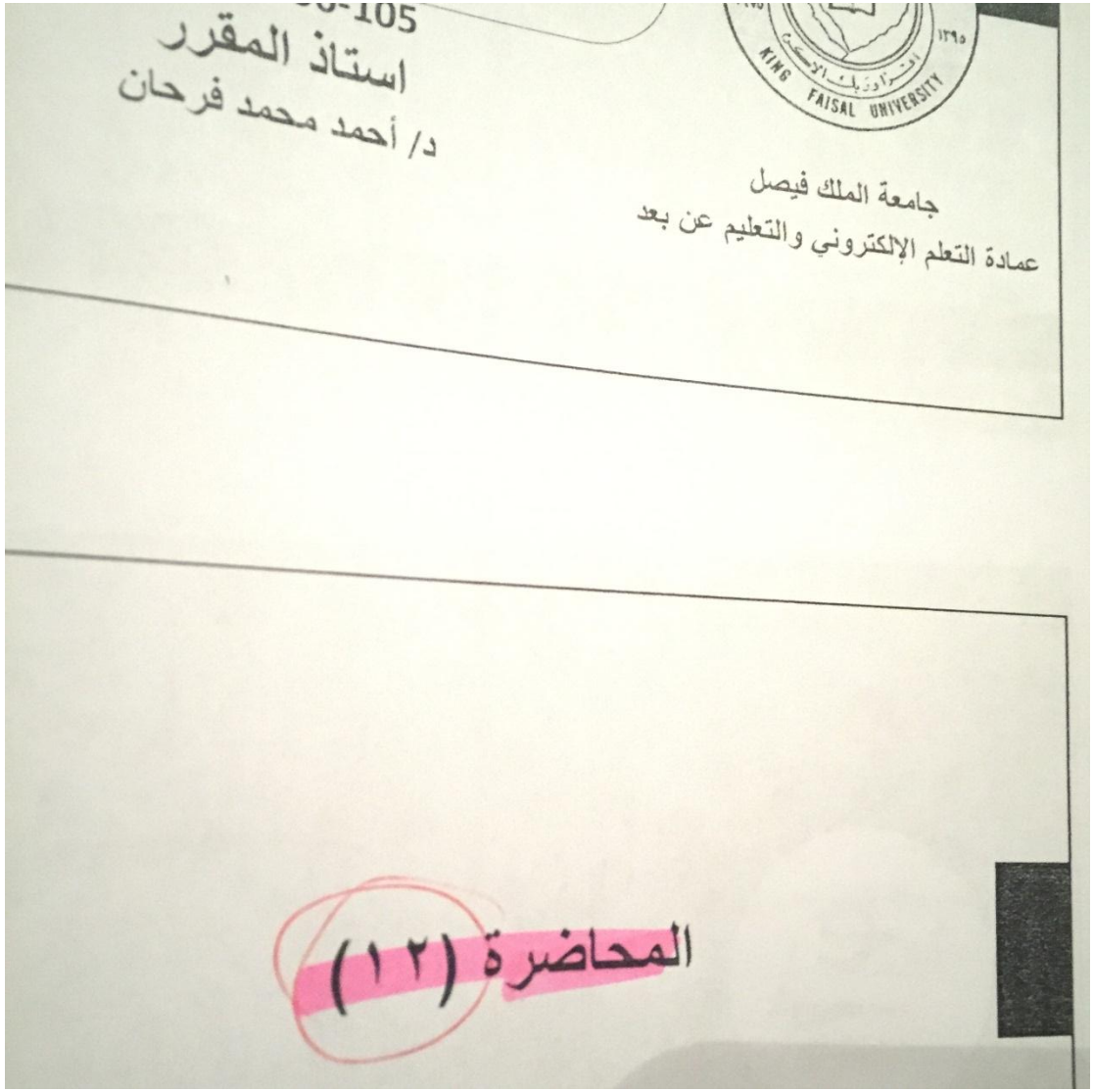
أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن


105-
استاذ المقرر
د/ أحمد محمد فرحان
جامعة الملك فيصل
عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
KING FAISAL UNIVERSITY
المحاضرة (١٢)

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

حسام - رقال دكتور

٢- الاستهلاك والادخار

لازم يجي سؤال عليه بالاختارعن
الاستهلاك والادخار

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

هام جداً قال الدكتور

٤- الربح الحدي

حيث أن عدد الوحدات المنتج

ريال 3990=10 - 10×40 + 10^2×36

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٤- الربح الحدي :-

مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

ling price(سعر بيع الوحدة) = $4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٥ وحدات إذاً x=15

$= 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ ريال

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٤- الربح الحدي :-

مثال (٣) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

$10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$ = (سعر بيع الوحدة) elling price

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

$(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$

$\times (5\times400 - 60 + 15)^2 \times (200-3)$

$\times(197) \times (1955)$ = 1155405 ريال

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٤- الربح الحدي :-

مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

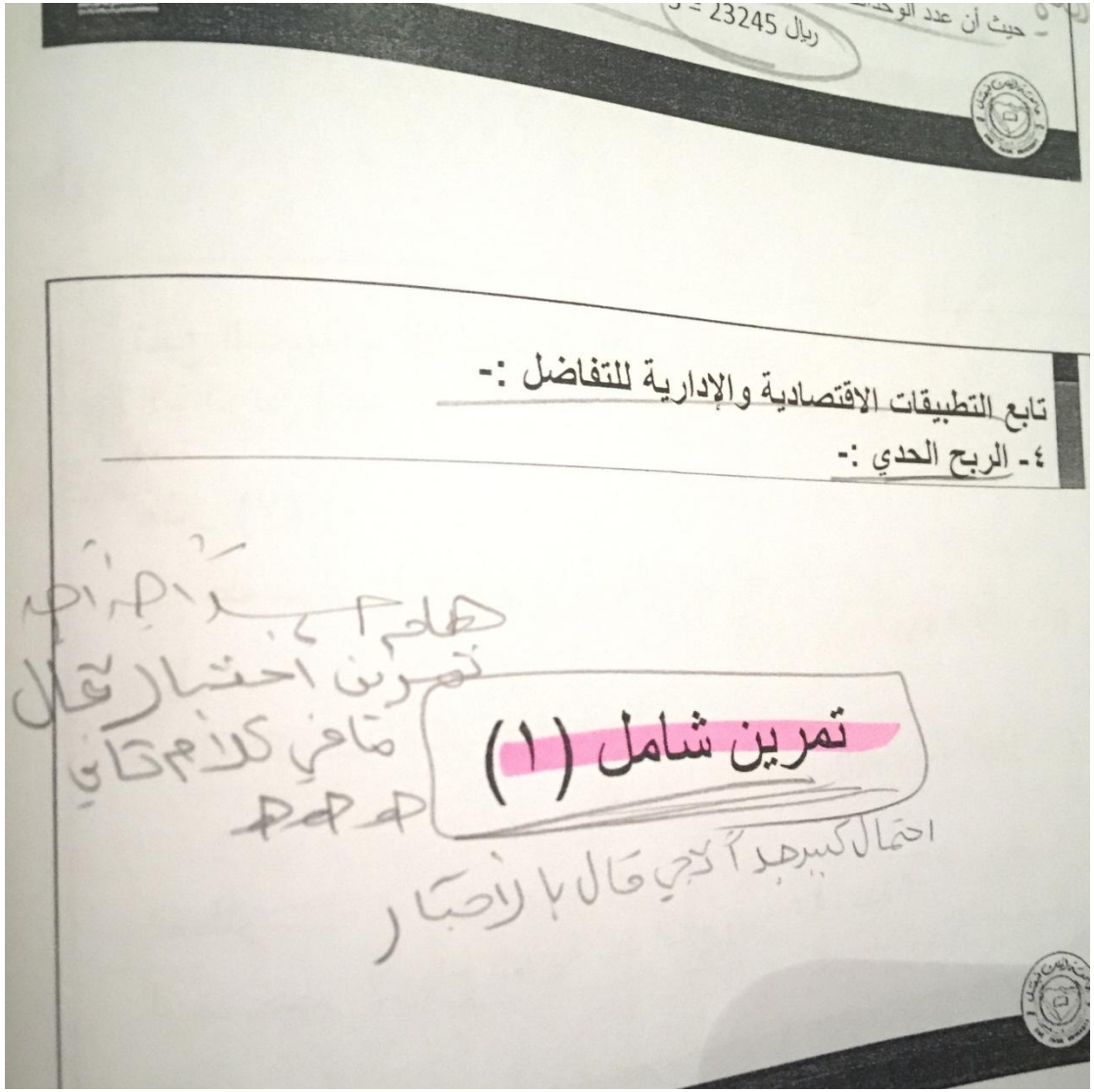
$- 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة ؟


ريال 23245 =
تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-
٤- الربح الحدي :-
تمرين شامل (١)

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٤- الربح الحدي :-

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية والايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$= 30\ x^4 + 12x^2 - 6\ x + 15$

$= 13\ x^3 - 5x^2 + 3\ x - 20$

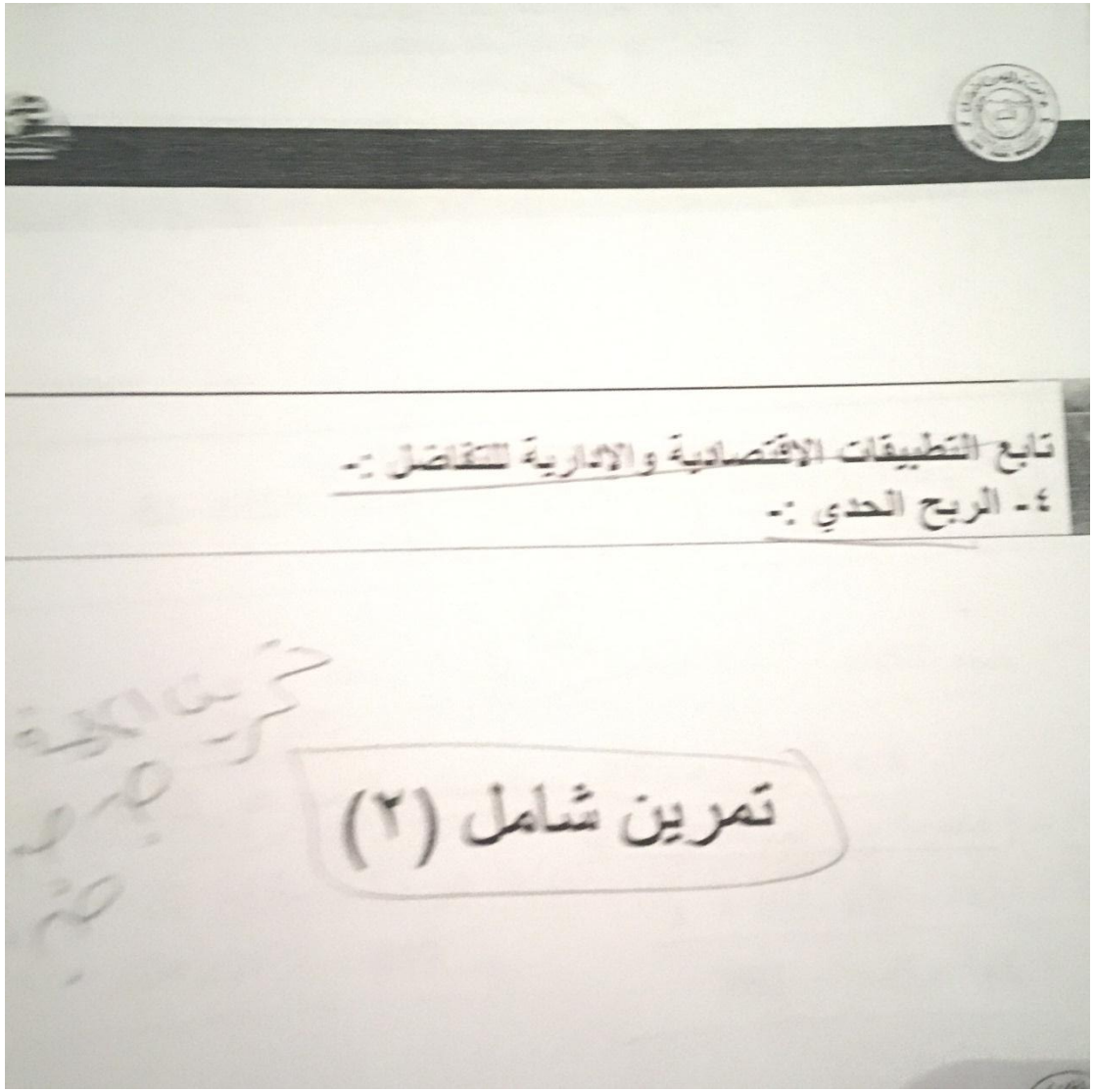
المطلوب :-

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .


تابع التطبيقات الاقتصادية والادارية للتفاضل :-
٤- الربح الحدي :-
تمرين شامل (٢)

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٤- الربح الحدي :-

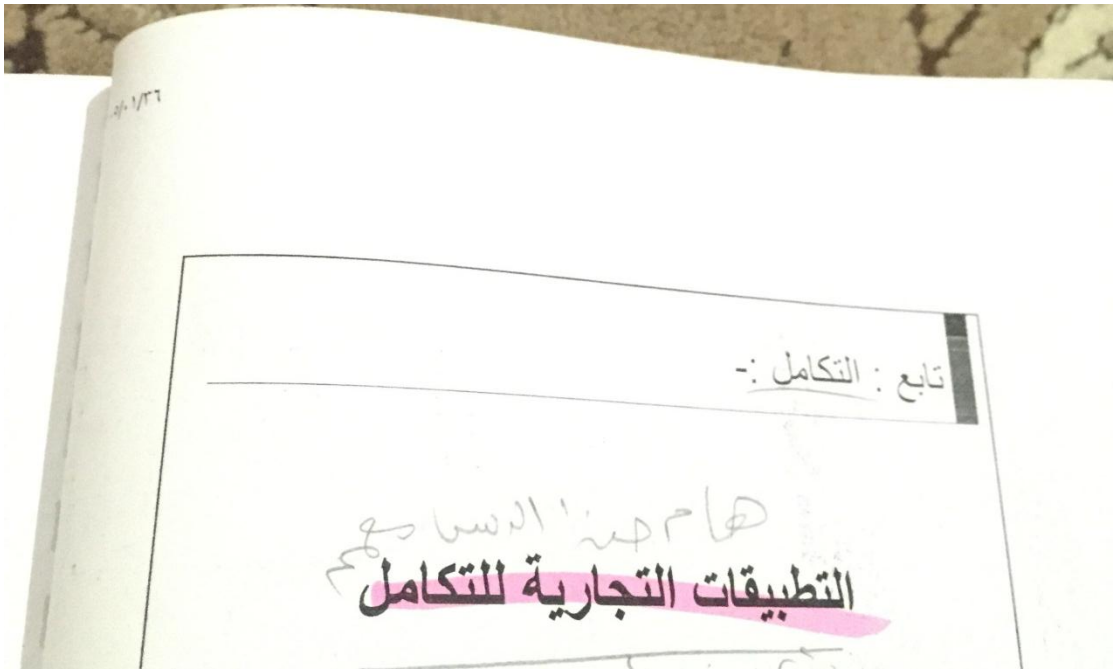
لاعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

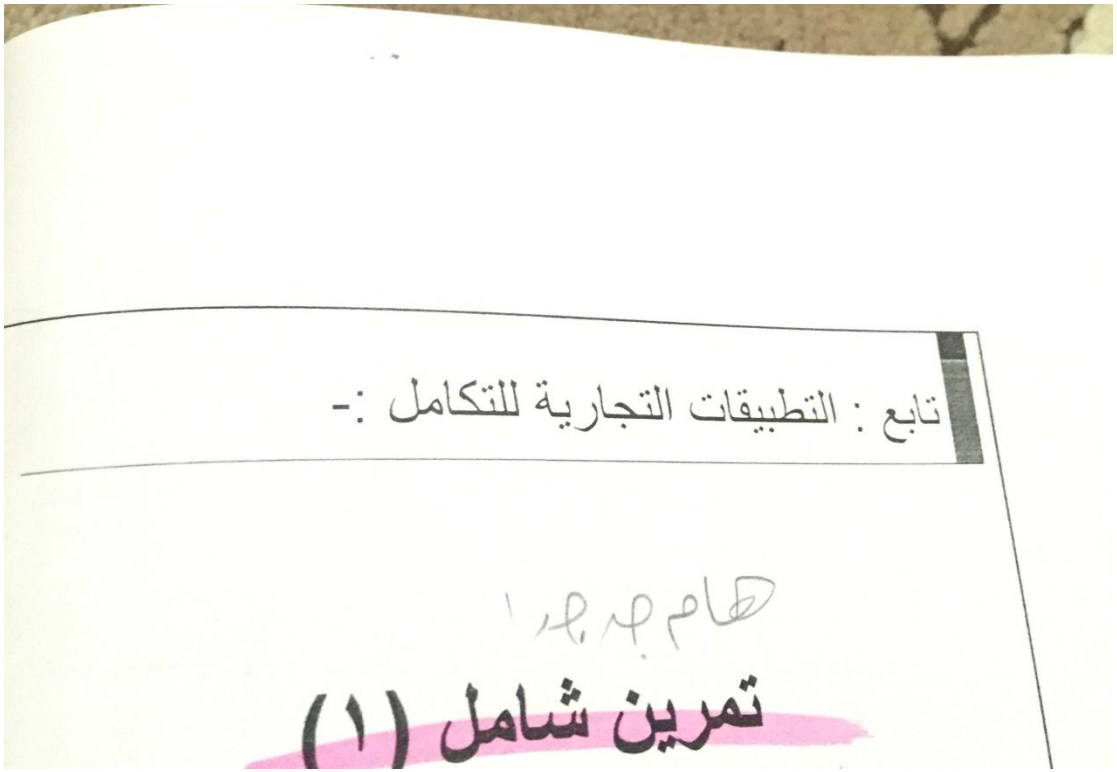
١- دالة الايراد الكلى .
٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .
٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
٤- دالة الربح الكلى .
٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .



تابع : التكامل :-

هام جدا الدساسهم

التطبيقات التجارية للتكامل



تابع : التطبيقات التجارية للتكامل :-

هام جدا

تمرين شامل (١)

تمرين شامل (١)

تابع : التطبيقات التجارية للتكامل :-

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند انتاج