المحاضرة (١٤)

تمارين مراجعة

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

" تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات (x , y) و تستخدم نوعين من المواد الخام الخشب و الحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يستخدم ٨ م من الخشب و ٢ كجم من الحديد و النوع الثاني من المنتجات يستدم ١٠ م من الخشب و ٤ كجم من الحديد ، و يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول بسعر ١٠٠ ريال و النوع الثاني بسعر ١٥٠ ريال ، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي ٢٨٠ م من الخشب و ١٠٠ كجم من الحديد ، المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أجب عما يلي "

(١) دالة الهدف للمشكلة السابقة هي :-

(أ) $p = 100\,x + 150\,y$

(ب) $p = 280\,x + 100\,y$

(ج) $p = 8\,x + 10\,y$

(د) لا شيء مما سبق

(٢) القيود المعبرة عن المشكلة السابقة هي :-

(أ) $8x+10y= 100\ ,\ \ 2x+4y=280$

(ب) $2x + 4\,y = 100\ ,\ 8x + 10y = 280$

(ج) $100x + 2y = 8\ ,\ 150x+4y = 10$

(د) لا شيء مما سبق

(٣) قيمة المتغير x و الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 10

(ب) 5

(ج) 4

(د) لا شيء مما سبق

(٤) قيمة المتغير y الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 10

(ب) 5

(ج) 20

(د) لا شيء مما سبق

(٥) ربح النموذج السابق يساوي :-

(أ) 1000 SAR

(ب) 3000 SAR

(ج) 4000 SAR

(د) لا شيء مما سبق

(٦) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) -23

(ب) 23

(ج) 7

(د) لا شيء مما سبق

(٧) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 178

(ب) 28

(ج) 54

(د) لا شيء مما سبق

(٨) اذا كانت $\Delta(A_{3\times3}) = 6$ فأوجد قيمة المحدد $(2A)$:

(أ) 12

(ب) 4

(ج) 48

(د) لا شيء مما سبق

(٩) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(A) = 4$ و $\Delta(B) = 3$ ، فأوجد $\Delta(AB)$:-

(أ) 12

(ب) 64

(ج) 81

(د) لا شيء مما سبق

(١٠) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

(أ) 6
(ب) 12
(ج) 24
(د) لا شيء مما سبق

(١١) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(أ) 3
(ب) 35
(ج) 63
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$:-

(١٢) قيمة Det (A) تساوي :-

(أ) 8
(ب) 24
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

(١٣) المصفوفة A^{-1} هي المصفوفة :-

(أ) B
(ب) C
(ج) D
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت نظام المعادلات التالي :-

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

فباستخدام طريقة المحددات أجب عن الاسئلة التالية :-

(١٤) قيمة محدد x أو ما يرمز بالرمز Δ_x تساوي :-

(أ) 18
(ب) 15
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

(١٥) قيمة محدد y أو ما يرمز بالرمز Δ_y تساوي :-

(أ) 32
(ب) -45
(ج) 10
(د) لا شيء مما سبق

(١٨) نهاية الدالة $\lim_{x\to 6} 30$:

(أ) 6
(ب) 30
(ج) 36
(د) لا شئ مما سبق

(١٩) نهاية الدالة $\lim_{x\to \frac{1}{2}}(10x + 15)$:

(أ) 15
(ب) $\frac{1}{2}$
(ج) $35\frac{2}{2}$
(د) 20

(٢٠) إذا كانت $\lim_{x\to 3} h(x) = 10$ و $\lim_{x\to 3} g(x) = -3$
فإن $\lim_{x\to 3}(g(x) - h(x))$ تساوي :

(أ) 7
(ب) -13
(ج) 13
(د) لا شئ مما سبق

(٢١) إذا كانت $\lim_{x\to 3} h(x) = 15$ و $\lim_{x\to 3} g(x) = -9$
فإن $\lim_{x\to 3}(g(x) - h(x))$ تساوي :

(أ) -24
(ب) 24
(ج) 6
(د) لا شيء مما سبق

(٢٢) نهاية الدالة $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2x^2 - 10)$ تساوي :-

(أ) 30
(ب) 55
(ج) **35**
(د) لا شيء مما سبق

(٢٣) نهاية الدالة $\lim_{x\to 2}(3x^4 + x^2 - 5)$ تساوي :-

(أ) 23
(ب) **47**
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

(٢٤) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}(e^x + 5)$ تساوي :

(أ) 1
(ب) 0
(ج) **6**
(د) لا شيء مما سبق

(٢٥) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}(3e^{2x} + 4)$ تساوي :

(أ) **7**
(ب) 4
(ج) 0
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(٢٦) المصفوفة A تسمى مصفوفة :-

(أ) صفرية .
(ب) محايدة .
(ج) **قطرية .**
(د) لا شيء مما سبق

(٢٧) المصفوفة B تسمى مصفوفة :-

(أ) صفرية .
(ب) **محايدة .**
(ج) قطرية .
(د) لا شيء مما سبق

(٢٨) المصفوفة C تسمى مصفوفة :-

(أ) مثلثية سفلى .
(ب) محايدة .
(ج) صفرية .
(د) **لا شيء مما سبق**

(٢٩) المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة :-

(أ) متماثلة .
(ب) غير متماثلة .
(ج) مثلثية سفلى .
(د) لا شيء مما سبق

(٣٠) المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة :-

(أ) متماثلة .
(ب) غير متماثلة .
(ج) مثلثية سفلى .
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 6 & 18 & 10 \\ 11 & 5 & 9 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 12 \\ 5 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

(٣١) ناتج جمع المصفوفة A و المصفوفة C هي المصفوفة { [?] = [C] + [A] }:-

(أ) E
(ب) H
(ج) G
(د) لا شيء مما سبق

(٣٢) ناتج طرح المصفوفة D من المصفوفة B هي المصفوفة { [?] = [D] – [B] } :-

(أ) F
(ب) G
(ج) H
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 10 & 12 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 13 & 10 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}$$

(٣٣) ناتج ضرب المصفوفة A في المصفوفة B تساوي :-

(أ) C
(ب) D
(ج) لا يصح الضرب .
(د) لا شيء مما سبق

(٣٤) اذا كانت $B_{7\times8}$ ، $A_{6\times3}$ فأوجد رتبة AB :-

(أ) $AB_{6\times8}$
(ب) $AB_{3\times7}$
(ج) $AB_{8\times3}$
(د) لا شيء مما سبق

(٣٥) إذا كانت :-

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

وكانت $C=AB$ فإن قيمة C_{33} تساوي :-

(أ) 36
(ب) **18**
(ج) 63
(د) لا شيء مما سبق

(٣٦) إذا كانت :-

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

وكانت $C=AB$ فإن قيمة C_{12} تساوي :-

(أ) **36**
(ب) 18
(ج) 63
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$$A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-\frac{5}{2} & 2\\ \frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}$$

(٣٧) فإن معكوس المصفوفة A تساوي :-

(أ) B
(ب) C
(ج) **D**
(د) لا شيء مما سبق

(٣٨) حاصل ضرب المصفوفة A في معكوسها تساوي :-

(أ) **B**
(ب) C
(ج) D
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

A = (-3 , 3]
B = (0 , 5)

(٣٩) المجموعة المعبرة عن A∩B هي :-

(أ) [0 , 4]
(ب) (1, 3]
(ج) **(0 , 4)**
(د) لا شيء مما سبق

A = {-2,-1,0,1,2,3}
B={1,2,3,4}
A∩B = {1,2,3} = (0,4)
= [1,3]
A-B = {-2,-1,0}=(-3,1)
= [-2,0] = (-3,0]

(٤٠) المجموعة المعبرة عن A−B هي (تقرا A ناقصاً B):-

(أ) [-2 , 1]
(ب) **(-3, 0]**
(ج) (-3 , 2)
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$h(x) = -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$

(٤١) فإن $f(x) + h(x)$ تساوي :-

(أ) $-3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 23$

(ب) $5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 14$

(ج) $-3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 3$

(د) لا شيء مما سبق

$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$h(x) = -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$ (+)

$= 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 14$

(٤٢) فإن $f(x) - h(x)$ (تقرأ الدالة f ناقصاً الدالة h) تساوي :-

(أ) $8x^3 - 15x^2 + 11x + 3$

(ب) $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 23$

(ج) $5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 14x + 12$

(د) لا شيء مما سبق

$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$h(x) = -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$ (-)

$= 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 14x + 12$

(٤٣) إذا علمت أن :-

$$f(x) = \frac{20x^5 + 30x - 12}{2x^2 - 288}$$

$2x^2 - 288 = 0$

$2x^2 = 288$

$x^2 = \frac{288}{2} = 144$

$x = \pm 12$

فإن الدالة السابقة تمثل :-

(أ) إقتران نسبي مجاله R

(ب) إقتران نسبي مجاله $R^{\setminus} = \{4\}$

(ج) إقتران نسبي مجاله $R^{\setminus} = \{-12, 12\}$

(د) لا شيء مما سبق

(٤٤) إذا علمت أن :-

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256}$$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{?}$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

فإن قيمة x تساوي :-

(أ) ± 2

(ب) ± 3

(ج) ± 4

(د) لا شيء مما سبق

(٤٥) أوجد :- $\frac{log\ 1000+log\ 10000-log\ 100}{log\ 10000+\ log\ 1000}$

(أ) $\frac{5}{7}$

(ب) $\frac{9}{5}$

(ج) $\frac{9}{100}$

(د) لا شيء مما سبق

(٤٦)المتتالية التالية $(1, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \dots\dots)$:-

$\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$

$\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$

(أ) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

(ب) متتالية حسابيه أساسها $\frac{1}{4}$

(ج) متتالية حسابيه أساسها $-\frac{1}{4}$

(د) لا شيء مما سبق

(٤٧)الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (10-) و أساسها (4-) :-

$a_1 = -10$

d = - 4

الحد العام=

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_n = -10 + (n-1) - 4$

$a_n = -10 - 4n + 4$

$a_n = -6 - 4n$

(أ) $a_n = -10 - 4n$

(ب) $a_n = -6 - 4n$

(ج) $a_n = -4 - 10n$

(د) لا شيء مما سبق

(٤٨) متتالية حسابية عدد حدودها (١٦) حدها الأول (٣) وحدها الأخير (٣٩) فإن مجموعها يساوي :-

$n = 16$
$a_1 = 3$
$a_n = 39$
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
$= \frac{16}{2}(3 + 39)$
$= 8 \times 42 = 336$

(أ) 336
(ب) 363
(ج) 633
(د) لا شيء مما سبق

(٤٩)المتتالية التالية $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \dots\dots)$:-

$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$

$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

(أ) متتالية حسابيه أساسها $\frac{2}{3}$
(ب) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$
(ج)متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$
(د) لا شيء مما سبق

(٥٠)متتالية هندسية حدها الأول (2) و اساسها (3) أوجد حدها العام :-

$a_1 = 2$
r = 3
= الحد العام
$a_n = a_1 r^{n-1}$
$a_n = 2 . (3)^{n-1}$

(أ) $a_n = 3.2^{n-1}$
(ب) $a_n = 2.3^{n-1}$
(ج) $a_n = 2.n^{3-1}$
(د) لا شيء مما سبق

(٥١) أودع شخص مبلغ (١٠٠٠٠) ريال لمدة (٨) سنوات بفائدة بسيطة ٧.٥% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة :-

(أ) 1000

(ب) 16000

(ج) 10000

(د) لا شيء مما سبق

$$a_1 = 10000$$
$$n = 8$$
$$d = \frac{7.5}{100} \times a_1$$
$$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$$
$$a_n = a_1 + nd$$
$$a_n = 10000 + 8 \times 750$$
$$= 10000+6000 = 16000$$

(٥٢) أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ ريال لمدة ما بفائدة بسيطة ١٠% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ ١٢٥٠ ريال أحسب مدة الاستثمار :-

(أ) 10سنوات .

(ب) 2.5 سنة .

(ج) 5 سنوات .

(د) لا شيء مما سبق

$$a_1 = 1000$$
$$n = ?$$
$$d = \frac{10}{100} \times a_1$$
$$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$$
$$a_n = 1250$$
$$a_n = a_1 + nd$$
$$1250 = 1000 + n \times 100$$
$$1250 - 1000 = n \times 100$$
$$250 = n \times 100$$
$$\frac{250}{100} = n$$
$$n = 2.5 \text{ سنة}$$

(٥٣) ادخر شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٥% نصف سنوي لمدة ٣.٥ سنة ، فإن جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي:-

(أ) 13959.65 SAR

(ب) 10000 SAR

(ج) 19359.65 SAR

(د) لا شيء مما سبق

$$a_1 = 10000$$
$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1.10$$
$$n = 3.5$$
$$a_n = ?$$
$$a_n = a_1 r^n$$
$$a_n = 10000\ (1.10)^{3.5}$$
$$a_n = 13959.65 \text{ SAR}$$

(٥٤) ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة ٤% نصف سنوي لمدة ٦ سنوات ،فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة ١٥٨٦٨.٧٤٣٢٢ ريال أوجد أصل المبلغ :-

$$a_1 = ?$$
$$r = 1 + \frac{8}{100} = 1.08$$
$$n = 6$$
$$a_n = 15868.74$$
$$15868.74 = a_1(1.08)^6$$
$$a_1 = \frac{15868.74}{(1.08)^6}$$
$$= 10000\ SAR$$

(أ) 15000 SAR

(ب) 20000 SAR

(ج) 10000 SAR

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

" تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة ١٠ قدم وثلاجة ١٢ قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة ١٠ قدم تحتاج ٤ ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة ١٢ قدم تحتاج إلى ٥ ساعات عمل في مرحلة التصنيع و ٣ ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي ٢٤٠٠ ساعة لمرحلة التصنيع، ١٣٠٠ ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة ،المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أجب عما يلي "

(٥٥) القيود المعبرة عن المشكلة السابقة هي :-

(أ) $4x+5y= 2400\ ,\ 2x +3y =1300$

(ب) $4x + 2y = 1300\ ,\ 5x + 3y = 2400$

(ج) $2x + 4y = 2400\ ,\ 3x+5y = 1300$

(د) لا شيء مما سبق

(٥٦) قيمة المتغير x و الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 1300

(ب) 350

(ج) 200

(د) لا شيء مما سبق

(٥٧) قيمة المتغير y الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 200

(ب) 1300

(ج) 2400

(د) لا شيء مما سبق

(٥٨) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) -23

(ب) 23

(ج) 7

(د) لا شيء مما سبق

(٥٩) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 105

(ب) 60

(ج) 45

(د) لا شيء مما سبق

(٦٠) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 178

(ب) 28

(ج) 54

(د) لا شيء مما سبق

(٦١) اذا كانت $\Delta(A_{2\times 2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد (3A) :

(أ) 15

(ب) 2

(ج) 45

(د) لا شيء مما سبق

(٦٢) اذا كانت $\Delta(A_{3\times3}) = 6$ فأوجد قيمة المحدد (2A) :

(أ) 12

(ب) 4

(ج) 48

(د) لا شيء مما سبق

(٦٣) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(\mathbf{A}) = 2$ و $\Delta(\mathbf{B}) = 5$ ، فأوجد $\Delta(\mathbf{AB})$:-

(أ) 25

(ب) 32

(ج) 10

(د) لا شيء مما سبق

(٦٤) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(\mathbf{A}) = 4$ و $\Delta(\mathbf{B}) = 3$ ، فأوجد $\Delta(\mathbf{AB})$:-

(أ) 12

(ب) 64

(ج) 81

(د) لا شيء مما سبق

(٦٥) أوجد قيمة المحدد التالي A=$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$:-

(أ) 24

(ب) 4

(ج) 0

(د) لا شيء مما سبق

(٦٦) أوجد قيمة المحدد التالي A=$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$:-

(أ) -24

(ب) 4

(ج) 0

(د) لا شيء مما سبق

(٦٧) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

(أ) 6

(ب) 12

(ج) 24

(د) لا شيء مما سبق

(٦٨) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(أ) 3

(ب) 35

(ج) 63

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 80 – 6x) و كانت الكمية المطلوبة هي 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال :-

(٦٩) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -6

(ج) -0.6

(د) لا شيء مما سبق

(٧٠) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) قليل المرونة .

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 200 – 10x) و كانت الكمية المطلوبة هي 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال :-

(٧١) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -10

(ج) -0.1

(د) لا شيء مما سبق (1)

(٧٢) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) متكافئ المرونة .

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)" أجب عما يلي :-

(٧٣) الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) لا شيء مما سبق

(٧٤) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8 x - 0.15x^2$)" أجب عما يلي :-

(٧٥) الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

(ج) 0.5

(د) لا شيء مما سبق

(٧٦) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

(ج) 0.5

(د) لا شيء مما سبق

المحاضرة المباشرة (١)

المجموعات والاقترانات
المعادلات والمتباينات
المتتاليات الحسابية و الهندسية

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

$A = (-3, 3]$

$B = (0, 5)$

$A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$
$B=\{1,2,3,4\}$
$A \cap B = \{1,2,3\} = (0,4) = [1,3]$
$A-B = \{-2,-1,0\} = (-3,1) = [-2,0] = (-3,0]$

(١) المجموعة المعبرة عن $A \cap B$ هي :-

(أ) $[0, 4]$

(ب) $(1, 3]$

(ج) $(0, 4)$

(د) لا شيء مما سبق

(٢) المجموعة المعبرة عن $A - B$ هي (تقرأ A ناقصاً B):-

(أ) $[-2, 1]$

(ب) $(-3, 0]$

(ج) $(-3, 2)$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

$h(x) = -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13$

(٣) فإن $f(x) + h(x)$ تساوي :-

(أ) $-3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + x - 23$

(ب) $5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 14$

(ج) $-3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 3$

(د) لا شيء مما سبق

$$\begin{array}{rl} f(x) = & 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ h(x) = & -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13 \\ \hline = & 5x^4 - 6x^3 + 8x^2 - 10x - 14 \end{array} \quad (+)$$

(٤) فإن $f(x) - h(x)$ (تقرأ الدالة f ناقصاً الدالة h) تساوي :-

(أ) $8x^3 - 15x^2 + 11x + 3$

(ب) $3x^4 - 4x^3 + 5x^2 + x - 23$

(ج) $5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 14x + 12$

(د) لا شيء مما سبق

$$\begin{array}{rl} f(x) = & 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ h(x) = & -10x^3 + 11x^2 - 12x - 13 \\ \hline = & 5x^4 + 14x^3 - 14x^2 + 14x + 12 \end{array} \quad (-)$$

تمارين مراجعة :-

(٥) إذا علمت أن :-

$$f(x) = \frac{20x^5+30X-12}{2X^2-288}$$

$$2X^2 - 288 = 0$$
$$2X^2 = 288$$
$$X^2 = \frac{288}{2} = 144$$
$$X = \pm 12$$

فإن الدالة السابقة تمثل :-

(أ) إقتران نسبي مجاله R

(ب) إقتران نسبي مجاله $R^{\setminus} = \{4\}$

(ج) إقتران نسبي مجاله $R^{\setminus} = \{-12,12\}$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٦) إذا علمت أن :-

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{4}\right)^{?}$$

$$x^2 = 4$$

$$X = \pm 2$$

فإن قيمة x تساوي :-

(أ) ± 2

(ب) ± 3

(ج) ± 4

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٨) أوجد $\frac{log\ 1000 + log\ 10000 - log\ 100}{log\ 10000 + log\ 1000}$:-

(أ) $\frac{5}{7}$

(ب) $\frac{9}{5}$

(ج) $\frac{9}{100}$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٩) المتتالية التالية , $-\frac{1}{4}$, 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, 1 , ... , $-\frac{1}{2}$) :-

$$\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{4}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$$

(أ) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$

(ب) متتالية حسابيه أساسها $\frac{1}{4}$

(ج) متتالية حسابيه أساسها $-\frac{1}{4}$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٠) الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (10-) و أساسها (4-) :-

$a_1 = -10$
d = - 4
الحد العام =
$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = -10 + (n-1) - 4$
$a_n = -10 - 4n + 4$
$a_n = -6 - 4n$

(أ) $a_n = -10 - 4n$

(ب) $a_n = -6 - 4n$

(ج) $a_n = -4 - 10n$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١١) متتالية حسابية عدد حدودها (١٦) حدها الأول (٣) وحدها الأخير (٣٩) فإن مجموعها يساوى :-

$$n = 16$$
$$a_1 = 3$$
$$a_n = 39$$
$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$
$$= \frac{16}{2}(3 + 39)$$
$$= 8 \times 42 = 336$$

(أ) 336

(ب) 363

(ج) 633

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٢) المتتالية التالية $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}, \dots \dots)$:-

(أ) متتالية حسابيه أساسها $\frac{2}{3}$

(ب) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$

(ج) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$

(د) لا شيء مما سبق

$$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$$

تمارين مراجعة :-

(١٣) متتالية هندسية حدها الأول (2) و اساسها (3) أوجد حدها العام :-

$a_1 = 2$
r = 3
الحد العام =
$a_n = a_1 r^{n-1}$
$a_n = 2 . (3)^{n-1}$

(أ) $a_n = 3.2^{n-1}$

(ب) $a_n = 2.3^{n-1}$

(ج) $a_n = 2.n^{3-1}$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٤) أودع شخص مبلغ (١٠٠٠٠) ريال لمدة (٨) سنوات بفائدة بسيطة ٧.٥% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة :-

$a_1 = 10000$
$n = 8$
$d = \frac{7.5}{100} \times a_1$
$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$
$a_n = a_1 + nd$
$a_n = 10000 + 8 \times 750$
= 10000+6000 = 16000

(أ) 1000

(ب) 16000

(ج) 10000

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٥) أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ ريال لمدة ما بفائدة بسيطة ١٠% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ ١٢٥٠ ريال أحسب مدة الاستثمار :-

(أ) 10سنوات .

(ب) 2.5 سنة .

(ج) 5 سنوات .

(د) لا شيء مما سبق

$$a_1 = 1000$$
$$n = ?$$
$$d = \frac{10}{100} \times a_1$$
$$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$$
$$a_n = 1250$$
$$a_n = a_1 + nd$$
$$1250 = 1000 + n \times 100$$
$$1250 - 1000 = n \times 100$$
$$250 = n \times 100$$
$$\frac{250}{100} = n$$
$$n = 2.5 \text{ سنة}$$

تمارين مراجعة :-

(١٦) ادخر شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٥% نصف سنوي لمدة ٣.٥ سنة ، فإن جملة المبلغ في نهاية المدة يساوي:-

$$a_1 = 10000$$
$$r = 1 + \frac{10}{100} = 1.10$$
$$n = 3.5$$
$$a_n = ?$$
$$a_n = a_1 r^n$$
$$a_n = 10000\,(1.10)^{3.5}$$
$$a_n = 13959.65 \text{ SAR}$$

(أ) 13959.65 SAR

(ب) 10000 SAR

(ج) 19359.65 SAR

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٧) ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة ٤% نصف سنوي لمدة ٦ سنوات ،فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة ١٥٨٦٨.٧٤٣٢٢ ريال أوجد أصل المبلغ :-

$$a_1 = ?$$
$$r = 1 + \frac{8}{100} = 1.08$$
$$n = 6$$
$$a_n = 15868.74$$
$$15868.74 = a_1(1.08)^6$$
$$a_1 = \frac{15868.74}{(1.08)^6}$$
$$= 10000\ \text{SAR}$$

(أ) 15000 SAR

(ب) 20000 SAR

(ج) 10000 SAR

(د) لا شيء مما سبق

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد
Deanship of E-Learning and Distance Education

جامعة الملك فيصل
King Faisal University

المحاضرة المباشرة (٢)

المصفوفات
المحددات
النهايات

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

" تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات (x , y) و تستخدم نوعين من المواد الخام الخشب و الحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يستخدم ٨ م من الخشب و ٢ كجم من الحديد و النوع الثاني من المنتجات يستدم ١٠ م من الخشب و ٤ كجم من الحديد ، و يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول بسعر ١٠٠ ريال و النوع الثاني بسعر ١٥٠ ريال ، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي ٢٨٠ م من الخشب و ١٠٠ كجم من الحديد ، المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أجب عما يلي "

(١) دالة الهدف للمشكلة السابقة هي :-

(أ) $p = 100x + 150y$

(ب) $p = 280x + 100y$

(ج) $p = 8x + 10y$

(د) لا شيء مما سبق

(٢) القيود المعبرة عن المشكلة السابقة هي :-

(أ) $8x+10y= 100$, $2x +4y =280$

(ب) $2x + 4y = 100$, $8x + 10y = 280$

(ج) $100x + 2y = 8$, $150x+4y = 10$

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٣) قيمة المتغير x و الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) **10**

(ب) 5

(ج) 4

(د) لا شيء مما سبق

(٤) قيمة المتغير y الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 10

(ب) 5

(ج) 20

(د) لا شيء مما سبق

(٥) ربح النموذج السابق يساوي :-

(أ) 1000 SAR

(ب) 3000 SAR

(ج) 4000 SAR

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٦) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) -23

(ب) **23**

(ج) 7

(د) لا شيء مما سبق

(٧) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 178

(ب) 28

(ج) 54

(د) **لا شيء مما سبق**

تمارين مراجعة :-

(٨) اذا كانت $\Delta(A_{3\times3}) = 6$ فأوجد قيمة المحدد $\Delta(2A)$:

(أ) 12

(ب) 4

(ج) 48

(د) لا شيء مما سبق

(٩) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(A) = 4$ و $\Delta(B) = 3$ ، فأوجد $\Delta(AB)$:-

(أ) 12

(ب) 64

(ج) 81

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٠) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

(أ) 6
(ب) 12
(ج) 24
(د) لا شيء مما سبق

(١١) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(أ) 3
(ب) 35
(ج) 63
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$:-

(١٢) قيمة Det (A) تساوي :-

(أ) 8
(ب) 24
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

(١٣) المصفوفة A^{-1} هي المصفوفة :-

(أ) B
(ب) C
(ج) D
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت نظام المعادلات التالي :-

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

فباستخدام طريقة المحددات أجب عن الاسئلة التالية :-

(١٤) قيمة محدد x أو ما يرمز بالرمز Δ_x تساوي :-

(أ) 18
(ب) 15
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

(١٥) قيمة محدد y أو ما يرمز بالرمز Δ_y تساوي :-

(أ) 32
(ب) -45
(ج) 10
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت نظام المعادلات التالي :-

$$2x + y + 3z = 3$$
$$x + 2y + 2z = 5$$
$$5x + 3y + 6z = 7$$

فباستخدام طريقة المحددات أجب عن الاسئلة التالية :-

(١٤) قيمة محدد x أو ما يرمز بالرمز Δ_x تساوي :-

(أ) 18
(ب) 15
(ج) **5**
(د) لا شيء مما سبق

(١٥) قيمة محدد y أو ما يرمز بالرمز Δ_y تساوي :-

(أ) 32
(ب) -45
(ج) **10**
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(١٨) نهاية الدالة $\lim_{x\to 6} 30$:

(أ) 6
(ب) **30**
(ج) 36
(د) لا شيء مما سبق

(١٩) نهاية الدالة $\lim_{x\to \frac{1}{2}} (10x + 15)$:

(أ) 15
(ب) $\frac{1}{2}$
(ج) 35
(د) **20**

(٢٠) إذا كانت $\lim_{x\to 3} h(x) = 10$ و $\lim_{x\to 3} g(x) = -3$
فإن $\lim_{x\to 3}(g(x) - h(x))$ تساوي :

(أ) 7
(ب) **13**
(ج) 13
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٢١) إذا كانت $\lim_{x\to 3} h(x) = 15$ و $\lim_{x\to 3} g(x) = -9$
فإن $\lim_{x\to 3}(g(x) - h(x))$ تساوي :

(أ) -24
(ب) 24
(ج) 6
(د) لا شيء مما سبق

(٢٢) نهاية الدالة $\lim_{x\to 3}(x^3 + 2x^2 - 10)$ تساوي :-

(أ) 30
(ب) 55
(ج) 35
(د) لا شيء مما سبق

$3^3 + 2(3)^2 - 10$
$27 + 18 - 10$

(٢٣) نهاية الدالة $\lim_{x\to 2}(3x^4 + x^2 - 5)$ تساوي :-

(أ) 23
(ب) 47
(ج) 5
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٢٤) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}(e^x + 5)$ تساوي :

(أ) 1

(ب) 0

(ج) 6

(د) لا شيء مما سبق

(٢٥) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}(3e^{2x} + 4)$ تساوي :

(أ) 7

(ب) 4

(ج) 0

(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}1&4&5\\0&2&6\\0&0&3\end{bmatrix}$$

(٢٦) المصفوفة A تسمى مصفوفة :-
(أ) صفرية .
(ب) محايدة .
(ج) قطرية .
(د) لا شيء مما سبق

(٢٧) المصفوفة B تسمى مصفوفة :-
(أ) صفرية .
(ب) محايدة .
(ج) قطرية .
(د) لا شيء مما سبق

(٢٨) المصفوفة C تسمى مصفوفة :-
(أ) مثلثية سفلى .
(ب) محايدة .
(ج) صفرية .
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٢٩) المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة :-

(أ) متماثلة .
(ب) غير متماثلة .
(ج) مثلثية سفلى .
(د) لا شيء مما سبق

(٣٠) المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ هي مصفوفة :-

(أ) متماثلة .
(ب) غير متماثلة .
(ج) مثلثية سفلى .
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

$$A=\begin{bmatrix}3 & 9 & 7\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ 7 & 3 & 8\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 1\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}1 & 5 & -2\\ -1 & 0 & 6\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix}6 & 18 & 10\\ 11 & 5 & 9\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}4 & -1 & 5\\ 3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 6\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}2 & 11 & 11\\ 8 & 5 & 2\end{bmatrix},\ G=\begin{bmatrix}6 & 9 & 1\\ 1 & 1 & 12\\ 5 & 4 & 10\end{bmatrix}$$

(٣١) ناتج جمع المصفوفة A و المصفوفة C هي المصفوفة { [?] = [C] + [A] }:-

(أ) E
(ب) H
(ج) G
(د) لا شيء مما سبق

(٣٢) ناتج طرح المصفوفة D من المصفوفة B هي المصفوفة { [?] = [D] – [B] } :-

(أ) F
(ب) G
(ج) H
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

$$A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}13 & 15\\ 10 & 12\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}13 & 10\\ 15 & 12\end{bmatrix}$$

(٣٣) ناتج ضرب المصفوفة A في المصفوفة B تساوي :-

(أ) C
(ب) D
(ج) لا يصح الضرب .
(د) لا شيء مما سبق

(٣٤) اذا كانت $A_{6\times3}, B_{7\times8}$ فأوجد رتبة AB :-

(أ) $AB_{6\times8}$
(ب) $AB_{3\times7}$
(ج) $AB_{8\times3}$
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

(٣٥) إذا كانت :-

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

وكانت $C=AB$ فإن قيمة C_{33} تساوي :-

(أ) 36
(ب) 18
(ج) 63
(د) لا شيء مما سبق

(٣٦) إذا كانت :-

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 0\\ 6 & 4 & 7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 4 & 2 & 6\\ 3 & 5 & 0\end{bmatrix}$$

وكانت $C=AB$ فإن قيمة C_{12} تساوي :-

(أ) 36
(ب) 18
(ج) 63
(د) لا شيء مما سبق

تمارين مراجعة :-

إذا علمت أن :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & 2 \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

(٣٧) فإن معكوس المصفوفة A تساوي :-

(أ) B
(ب) C
(ج) **D**
(د) لا شيء مما سبق

(٣٨) حاصل ضرب المصفوفة A في معكوسها تساوي :-

(أ) **B**
(ب) C
(ج) D
(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

" تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة ١٠ قدم وثلاجة ١٢ قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة ١٠ قدم تحتاج ٤ ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة ١٢ قدم تحتاج إلى ٥ ساعات عمل في مرحلة التصنيع و ٣ ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي ٢٤٠٠ ساعة لمرحلة التصنيع، ١٣٠٠ ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة ،المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أجب عما يلي "

(١) القيود المعبرة عن المشكلة السابقة هي :-

(أ) $4x+5y= 2400 \ , \ 2x +5y =1300$

(ب) $4x + 2 y = 1300, 5x + 3y = 2400$

(ج) $2x + 4y = 2400 \ , 3x+5y = 1300$

(د) لا شيء مما سبق

(٢) قيمة المتغير x و الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 1300

(ب) 350

(ج) 200

(د) لا شيء مما سبق

(٣) قيمة المتغير y الذي يحقق النظام السابق هي :-

(أ) 200

(ب) 1300

(ج) 2400

(د) لا شيء مما سبق

(٤) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) -23

(ب) 23

(ج) 7

(د) لا شيء مما سبق

(٥) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 105

(ب) 60

(ج) 45

(د) لا شيء مما سبق

(٦) قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ تساوي :-

(أ) 178

(ب) 28

(ج) 54

(د) لا شيء مما سبق

(٧) اذا كانت $\Delta(A_{2\times2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد (3A) :

(أ) 15

(ب) 2

(ج) 45

(د) لا شيء مما سبق

(٨) اذا كانت $\Delta(A_{3\times3}) = 6$ فأوجد قيمة المحدد (2A) :

(أ) 12

(ب) 4

(ج) 48

(د) لا شيء مما سبق

(٩) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(A) = 2$ و $\Delta(B) = 5$ ، فأوجد $\Delta(AB)$:-

(أ) 25

(ب) 32

(ج) 10

(د) لا شيء مما سبق

(١٠) اذا كانت A و B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت $\Delta(A) = 4$ و $\Delta(B) = 3$ ، فأوجد $\Delta(AB)$:-

(أ) 12

(ب) 64

(ج) 81

(د) لا شيء مما سبق

(١١) أوجد قيمة المحدد التالي :- $A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(أ) 24

(ب) 4

(ج) 0

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 200 – 10x) و كانت الكمية المطلوبة هي 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال :-

(١٧) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -10

(ج) -0.1

(د) لا شيء مما سبق

(١٨) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) متكافئ المرونة .

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)" أجب عما يلي :-

(١٩) الميل الحدى للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) لا شيء مما سبق

(٢٠) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8 x - 0.15x^2$)" أجب عما يلي :-

(٢١) الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

(ج) 0.5

(د) لا شيء مما سبق

(٢٢) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

(ج) 0.5

(د) لا شيء مما سبق

(١٢) أوجد قيمة المحدد التالي :- $A=\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$

(أ) -24

(ب) 4

(ج) 0

(د) لا شيء مما سبق

(١٣) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{vmatrix}$

(أ) 6

(ب) 12

(ج) 24

(د) لا شيء مما سبق

(١٤) أوجد قيمة المحدد التالي $A = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

(أ) 3

(ب) 35

(ج) 63

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 80 – 6x) و كانت الكمية المطلوبة هي 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال :-

(١٥) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -6

(ج) -0.6

(د) لا شيء مما سبق

(١٦) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) قليل المرونة .

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

دالة الطلب على سلعة ما هي (D = 200 – 10x) و كانت الكمية المطلوبة هي 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال :-

(١٧) فإن معامل المرونة يساوي :-

(أ) 0.1

(ب) -10

(ج) **-0.1**

(د) لا شيء مما سبق

(١٨) الطلب في هذه الحالة :-

(أ) **متكافئ المرونة .**

(ب) عديم المرونة .

(ج) لا نهائي المرونة .

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)" أجب عما يلي :-

(١٩) الميل الحدى للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) **0.56**

(د) لا شيء مما سبق

(٢٠) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.6

(ب) 0.4

(ج) 0.56

(د) **لا شيء مما سبق**

إذا علمت أن :-

"دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8 x - 0.15x^2$)" أجب عما يلي :-

(٢١) الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

(ج) **0.5**

(د) لا شيء مما سبق

(٢٢) الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

(أ) 0.8

(ب) 0.3

(ج) **0.5**

(د) لا شيء مما سبق

الاسئلة المهمة التي ذكرت في المحاضرات

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (١) و اساسها (٢) أوجد حدها العام .

الحل :-

$$a_n = 1 \ , \ r = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$= (1)(2)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 2^{n-1}$$

مثال :-

أودع شخص مبلغ ١٠٠٠ ريال لمدة ما بفائدة بسيطة ١٠% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ ١٢٥٠ ريال أحسب مدة الاستثمار .

الحل :-

$a_1 = 1000$

n = ?

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

المبلغ في نهاية المدة = $a_?$

$$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$$

$$1250 - 1000 = n.100$$

$$250 = n.100$$

$$n = \frac{250}{100} = 2.5 \text{ سنة}$$

مثال :-

أودع شخص مبلغ (١٠٠٠٠) ريال لمدة (٨) سنوات بفائدة بسيطة ٧.٥% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

n = 8

$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$

المبلغ في نهاية السنة الثانية = a_8

$$a_8 = 10000 + (8)(750)$$

$$= 10000 + 6000 = 16000 \text{ SAR}$$

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ٨٠٠٠ ريال بفائدة مركبة ٩% لمدة خمس سنوات ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$$a_1 = 8000$$

$$r = 1 + 0.09 = 1.09$$

$$n = 5$$

$$a_5 = 8000\,(1.09)^5 = 12308.9 \text{ SAR}$$

١. **المصفوفة المحايدة:** هي المصفوفة القطرية التي تكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد و يرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها).

مثال:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢. **المصفوفة المثلثية:** و تقسم إلى قسمين:

أ. **المصفوفة المثلثية العليا:** هي المصفوفة التي يكن فيها جميع العناصر **تحت** القطر الرئيسي أصفار.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال:

ب. **المصفوفة المثلثية السفلى:** هي المصفوفة التي يكن فيها جميع العناصر **فوق** القطر الرئيسي أصفار.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال:

ملاحظة :-

١ - اذا كانت A_{mn} وكانت B_{nk} فإن $(AB)_{mk}$.

مثال :-

اذا كانت $A_{3\times5}$, $B_{5\times6}$ فأوجد رتبة AB.

الحل :-

$$A_{mn} \times B_{nk} = AB_{mk}$$
$$A_{3\times5} \times B_{5\times6} = AB_{3\times6}$$

و نستنتج من هذا المثال أن :-

$$AB \neq BA$$

ص ٥٣ محاضرة ٦

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة):

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة و سوف نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .

خطوات إيجاد معكوس المصفوفة :-

تأخذ المصفوفة الشكل التالي :- $\begin{bmatrix} \text{العنصر الرابع} & \text{العنصر الأول} \\ \text{العنصر الثالث} & \text{العنصر الثاني} \end{bmatrix}$

يتم وضع مصفوفة الوحدة بجانب المصفوفة الأصلية كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} \text{العنصر الرابع} & \text{العنصر الأول} \\ \text{العنصر الثالث} & \text{العنصر الثاني} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

الهدف هو تحويل العناصر الأربعة إلى مصفوفة الوحدة .

ثم يتم ضرب الصف الأول في مقلوب العنصر الأول أي يتم ضرب في $\frac{1}{\text{العنصر الأول}}$ وبذلك نكون قد حولنا العنصر الأول إلى واحد .

ثم يتم ضرب الصف الأول الجديد في سالب العنصر الثاني و جمعة على الصف الثاني وبذلك نكون قد حولنا العنصر الثاني إلى صفر.

ثم يتم ضرب الصف الثاني في مقلوب العنصر الثالث أي يتم الضرب في $\frac{1}{\text{العنصر الثالث}}$ وبذلك نكون قد حولنا العنصر الثالث إلى واحد .

ثم يتم ضرب الصف الثاني الجديد في سالب العنصر الرابع و جمعة على الصف الأول وبذلك نكون قد حولنا العنصر الرابع إلى صفر.

ص ٥٥

مثال :-

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات (x , y) و تستخدم نوعين من المواد الخام الخشب و الحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يستخدم ٨ م من الخشب و ٢ كجم من الحديد و النوع الثاني من المنتجات يستدم ١٠ م من الخشب و ٤ كجم من الحديد ، و يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول بسعر ١٠٠ ريال و النوع الثاني بسعر ١٥٠ ريال ، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي ٢٨٠ م من الخشب و ١٠٠ كجم من الحديد ، المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن .

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتجات / المواد الخام	الخشب	الحديد	الربح
x	8	2	100
y	10	4	150
الطاقة المتاحة	280	100	

2- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- الهدف (الربح) :- $p = 100x + 150y$

ب- القيود :-

$$8x + 10y = 280$$

$$2x + 4y = 100$$

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 280 \\ 100 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 280 \\ 2 & 4 & 100 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{8}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 2 & 4 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{240}{8} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{8}{12}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{10}{8}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$$

x=10 , y=20

ربح النموذج :-

$p = 100x + 150y = 100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\ SAR$

٤-اذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة وكان k أي عدد حقيقي فإن :-

$$\boldsymbol{Det(KA) = K^N\ Det(A)}$$

مثال :-

اذا كانت $\Delta(A_{2\times 2}) = 5$ فأوجد قيمة المحدد (3A)

الحل :-

$$\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3} f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

3- $\lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x\to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

= 7 x - 2 = 7 × 1 – 2 = 5

$\lim_{x\to 1^-} f(x)$ = (النهاية من اليسار)

= $3x^2$ +5 = 3 × $(1)^2$ + 5 = 3+5 = 8

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$$

هذه النهاية غير موجودة $\lim_{x\to 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 2x & , \quad 0<x<1 \\ 3+x^2 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

حالات المرونة السعرية (م) :

١. القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

٢. القيمة المطلقة للمرونة < ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

٣. القيمة المطلقة للمرونة = ١ (طلب متكافئ المرونة)

٤. القيمة المطلقة للمرونة > ١ (طلب مرن)

٥. القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 80 – 6x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -6)

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١. الاستهلاك و الادخار:

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = 1

مثال (١) :- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15+0.6x -0.02x^2)$

المطلوب: أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل:

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك:-

$$K/= 0.6 - 0.04\ x$$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$$K/= 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - .04 = 0.56$$

٣-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

= ١ – الميل الحدي للاستهلاك = 1 −0.56 = 0.44

١. الربح الحدي:

١- الإيراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

٢- الربح الكلي = الإيراد الكلي – التكلفة الكلية

٣- الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي .

٤- التكلفة الحدية = المشتقة الأولى لدالة التكلفة الكلية .

٥- الربح الحدي = المشتقة الأولى لدالة الربح الكلي .

٦- الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (١) : إذا علمت أن دالة الإيراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الإيراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل : الإيراد الحدي = المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلي

$$R/ = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$$R/ = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$$ ريال

مثال (٢) : إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 4x^2 + 6x + 5$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب : إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$$R = (\text{دالة سعر بيع الوحدة}) \times x$$

$$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R/ = 12x^2 + 12x + 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٥ وحدات إذاً $x=15$

$$R/ = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5=2885$$ ريال

مثال (3) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً x=5

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20$ =4205ريال

تمرين شامل (١)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$R^{/} = 120\,x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$R^{/} = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

$C^{/} = 39\,x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$C^{/} = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

3- دالة الربح الكلي :-

$R = 30\,x^4 + 12x^2 - 6\,x + 15$

$C = 13\,x^3 - 5x^2 + 3\,x - 20$

$$P = R - C = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 7x^2 - 9\,x + 35$$

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$P = 30\,x^4 - 13\,x^3 + 7x^2 - 9\,x + 35$

$P^{/} = 120\,x^3 - 39x^2 + 7x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$P^{/} = 120\times12^3 - 39\times12^2 + 7\times12 - 9 = 201819$ ريال

قواعد التكامل :-

١- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \,.dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c$$

$$\int k \,.dx = k\,x + c$$

$$\int \,.dx = x + c$$

مثال :-

$$1-\int x^3 \, .dx = \frac{1}{4}x^4 + c$$

$$2-\int x^5 \, .dx = \frac{1}{6}x^6 + c$$

$$3-\int 6 \, .dx = 6x + c$$

$$4-\int 3x^4 \, .dx = \frac{3}{5}x^5 + c$$

٢- تكامل e^x :-

$$\int e^x \, .dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} \, .dx = \ln x + c$$

التطبيقات التجارية للتكامل :-

١ – الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

٢ – التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣ – الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤ – الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$R/ = 3x^2 + 6x - 10$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$

$R = x^3 + 3x^2 - 10x$

٢- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$R = x^3 + 3x^2 - 10x$

الايراد الكلي= $(5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$C/ = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$

$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$R/ = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$C/ = 36x^2 + 40x - 10$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R/ = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$

$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$ ريال

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C/ = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$C = 12 \times (25)^3 + 20 \times (25)^2 - 10 \times (25) = 199750$ ريال

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P/ = R/ - C/$

$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$

$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P/ = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$

$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$

$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=10 في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2\times(10)^4 - 4\times(10)^3 - 26\times(10)^2 + 30\times(10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$$ ريال