المحاضرة المباشرة الثالثة – مراجعة للباب الثالث والرابع وجزء من الباب الخامس ..

❖ الباب الثالث - (التوزيعات الاحتمالية المتصلة) :

١)- التوزيع الطبيعي : $X : N (M , \sigma^2)$

٢)- التوزيع الطبيعي المعياري : $Z : N (0 ,1)$

يمكن تحويل أي قيمة من X من التوزيع الطبيعي إلى قيمة Z في التوزيع الطبيعي المعياري من خلال الصيغة التالية :

$$Z=\frac{X-M}{\sigma}$$

ونلاحظ انه يوجد لدينا ٣ حالات لايجاد المساحة في حالة التوزيع الطبيعي المعياري :

١. المساحة التي تقع على يسار قيمة معيارية معينة : (تستخرج مباشرة من الجداول الاحصائية) .
٢. المساحة التي تقع على يمين قيمة معيارية معينة : (تستخرج المساحة من الجدول ثم تُطرح من العدد ١) .
٣. المساحة المحصورة بين قيمتين معياريتين : (المساحة التي تقع على يسار القيمة الاكبر – المساحة التي تقع على يمين القيمة الاصغر) .

❖ مثال : اذا كانت X تنتمي للتوزيع (9 , 15) N أوجد :

١. $P(X < 6)$ " احتمال X اقل من ٦ "
٢. $P(X > 6)$ " احتمال X أكبر من ٦ "
٣. $P(3 < X < 6)$ " احتمال X تكون محصورة بين العددين ٣ و ٦ "

❖ الحل :

١) $P(X < 6) = P(Z < \frac{6-15}{3}) = P(Z < -3) = 0.0013$

٢) $P(X > 6) = P(Z > -3) = 1 - P(Z < -3) = 1 - 0.0013 = 0.9987$

٣) $P(3 < X < 6) = P(X < 6) - P(X < 3)$

$= 0.0013 - P(Z < \frac{3-15}{3})$

$= 0.0013 - P(Z < -4) = 0.0013 - 0 = 0.0013$

٢)- توزيع t ويرمز له بالرمز $t [\lambda ; v]$

حيث يتم حساب الاحتمالات الخاصة لهذا التوزيع من خلال ايجاد المساحة التي تقع على يسار t بدرجات حرية مختلفة .

وفي حال السؤال عند قيم مساحات صغيرة فإنه يجب استخدام الصيغة التالية : $-t [1 - \lambda ; v]$

❖ مثال : أوجد قيمة المساحة λ في التوزيع $t [\lambda ; 5] = -2.015$

❖ الحل : عند التقاء درجة الحرية ٥ مع العدد ٢,٠١٥ فإنه يقابل المساحة ٠,٩٥ ، وبسبب وجود اشارة السالب يجب أخذ متممة قيمة المساحة بطرحها من العدد ١ ، ويكون الجواب كالتالي : $\lambda = 1 - 0.95 = 0.05$

٣)- توزيع كاي تربيع :

حيث يتم ايجاد المساحة التي تقع على يسار قيمة معينة بدرجة حرية v من خلال جداول احصائية خاصة ، ويحتوي المحور العامودي على درجات الحرية والمحور الافقي على قيمة المساحات وتقاطعها .

❖ مثال : أوجد قيمة كاي تربيع والتي تقع على يسارها المساحة 0.99 بدرجة حرية ٢ ؟

❖ الحل : مباشرة من الجدول نجد ان الناتج يساوي = 9.210

٤)- توزيع F ويرمز له بالرمز $F [\lambda;v1;v2]$

❖ مثال : اوجد المساحة إلى يسار F=3 بدرجات حرية , V2=20 , V1 = 7 ؟

❖ الحل : $\lambda = 0.975$

❖ مثال : اوجد المساحة λ حيث أن $F(\lambda;5;5)=10.97$ ؟

❖ الحل : $\lambda = 0.99$

- وفي حال السؤال عن مساحات صغيرة فإننا نستخدم التحويل $F [\lambda;v1;v2] = \frac{1}{F[\lambda;v2;v1]}$

❖ الباب الرابع - (توزيعات المعاينة) :

وهناك ٤ نظريات متعلقة بهذا الباب

- اذا كانت X تنتمي للتوزيع الطبيعي (36 , 25) N ، أوجد :

١. القيمة المعيارية المقابلة لـ X=10 .

٢. القيمة المعيارية المقابلة لـ $\overline{X}$=10 ، حيث أن n=16 .

٣. الانحراف المعياري للعينة اذا علمت أن n=16 بحيث كان السحب مع الارجاع .

❖ الحل :

١) $Z=\frac{X-M}{\sigma}=\frac{10-25}{6}=\frac{-15}{6}$

٢) $Z=\frac{\overline{X}-M}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{10-25}{6/16}=-15*\frac{16}{6}=-40$

٣) $\sigma_x^2=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{36}{16}=2.25$

$\sigma_{\overline{X}}=\sqrt{2.25}=1.5$

- اذا كانت لدينا X; N (25 , 36) وسحبت عينة حجمها ١٠٠ أوجد$P(\overline{X}<14)$:

❖ الحل : $P(\overline{X}<10)=P(Z<\frac{\overline{X}-M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})=P\left(Z<\frac{14-15}{\frac{5}{10}}\right)=P\left(Z<\frac{-1}{0.5}\right)=-2$

P (Z < -2)=0.228

- اذا كان لدينا X:N(13,25) و Y:N(15,36) ، سحبت عينة حجمها ١٦ من المجتمع الأول وعينة حجمها ٢٥ من المجتمع الثاني ، أوجد $P(\overline{X}-\overline{Y}<3)$:

- الحل : ايجاد قيمة Z المقابلة لـ $\overline{X}-\overline{Y}$: $\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}=\frac{3-(13-15)}{\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{36}{25}}}=\frac{3-(-2)}{\sqrt{1.56+1.44}}=2.89$

P(Z < 2.98)=0.9981

❖ الباب الخامس - (التقدير) :

١) التقدير باستخدام الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ ، حيث توجد لدينا الحالات التالية :-

١. اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه معلوم .

٢. اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم .

٣. اذا كان السحب من مجتمعين مستقليين .

نستخدم جداول التوزيع الطبيعي في الحالتين (الأولى والثالثة) ، بينما نستخدم جدول توزيع t في الحالة الثانية .

❖ مثال : عينة عشوائية حجمها ١٦ سحبت من مجتمع طبيعي $N(M,\sigma^2)$ اذا علمت أن الوسط الحسابي للعينة ٢٠ أوجد :

١. فترة ثقة ٩٠% للوسط الحسابي للمجتمع اذا علمت أن تباين المجتمع يساوي ٩ ..؟

٢. فترة ثقة ٩٥% للوسط الحسابي للمجتمع اذا علمت أن تباين العينة يساوي ٩ ..؟

❖ الحل :

- للمطلوب الأول :

$1-\alpha=0.90$

$\alpha=0.10,\quad \frac{\alpha}{2}=0.05\,,1-\frac{\alpha}{2}=0.95$

$(\overline{X}-z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}+z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=(20-z_{0.95}*\frac{3}{4}\ ,\ 20+z_{0.95}*\frac{3}{4})=(18.76\,,21.24)$

- للمطلوب الثاني :

$(\overline{X}-t[1-\frac{\alpha}{2}\,,v]\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{X}+t[1-\frac{\alpha}{2}\,,v]\frac{s}{\sqrt{n}})=(20-t[0.95\,,15]\frac{3}{4}\ ,\ 20+t[0.95\,,15]\frac{3}{4})$

$(20-1.753*\frac{3}{4}\ ,\ 20+1.753*\frac{3}{4})=(18.68\,,\ 21.31)$