جمــع وتنسيق : **أبو عادل** . . . (**الرياض**)

أهداف المقرر:

الهدف من المقرر:

صمم هذا المقرر بهدف تقديم بعض الأساليب الرياضية التي يحتاج إليها طالب الاقتصاد والعلوم الإدارية في دراسته للظواهر الاقتصادية وتحليلها بطريقة كمية بهدف الوصول إلى حل لها. حيث يهدف هذا المقرر إلى تعريف الطالب بأساسيات التفاضل والتكامل وكيفية استخدامها في حل المشكلات الاقتصادية والإدارية. وذلك من خلال التعرف على الدوال بأنواعها المختلفة وكيفية حساب النهاية لها و البحث في اتصالها ومن ثم إيجاد الاشتقاق لها وتحديد القيم العظمى و الصغرى بالإضافة إلى إيجاد التكامل المحدود وغير المحدود وأساليب التكامل المختلفة في التطبيقات الاقتصادية.

محتويات المقرر:

يحتوي هذا المقرر على الموضوعات التالية:

الموضوع الأول : المجموعات (تمهيد)

- تعريف المجموعة
- طرق كتابة المجموعات
- أنواع المجموعات
- العمليات على المجموعات
- الضرب الديكارتي

الموضوع الثاني : الدوال:

- تعريف الدالة
- المجال والمجال المقابل والمدى للدالة
- إيجاد قيمة الدالة
- أنواع الدوال
- العمليات الجبرية على الدوال
- رسم الدوال
- دالة الخط المستقيم
- التطبيقات الاقتصادية والإدارية للدوال
- المتباينات والقيمة المطلقة

الموضوع الثالث : النهايات والاتصال:

- مفهوم النهايات
- جبر وقواعد النهايات
- نهاية المقادير غير المحددة عند نقطة وأساليب معالجتها
- النهاية عندما تؤول x إلى مالانهاية
- الاتصال
- تطبيقات إدارية واقتصادية للنهايات

الموضوع الرابع : التفاضل وتطبيقاته:

- متوسط التغير
- مفهوم الاشتقاق
- قواعد وجبر الاشتقاق
- قانون السلسلة
- الاشتقاق الضمني
- الاشتقاق الجزئي
- المشتقات العليا
- مشتقة الدوال الاسية
- مشتقة الدوال اللوغاريتمية
- مشتقة الدوال المثلثية
- التطبيقات الاقتصادية و التجارية للتفاضل

الموضوع الخامس : التكامل وتطبيقاته:

- مفهوم التكامل
- التكامل غير المحدود
- قوانين التكامل
- المعادلة التفاضلية
- التكامل بالتعويض
- التكامل المحدود
- تطبيقات على المساحات باستخدام التكامل
- تطبيقات اقتصادية وتجارية على التكامل

الكتاب الدراسى:

- الرياضيات العامة وتطبيقاتها الاقتصادية د. عدنان محمد عوض - عمان – دار الفرقان (٢٠٠٤)

الكتاب متوفر لدى:

- مكتبة جرير بجميع فروعها في أنحاء المملكة
- مكتبة العبيكان بجميع فروعها في أنحاء المملكة

المراجع الإضافية:

- الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية فتحي خليل حمدان - عمان– دار وائل - الطبعة الثانية (٢٠٠٩)
- الرياضيات في الاقتصاد والإدارة – الجزء الثاني ، تأليف احمد محمد باروم ، محمد طلعت عبدالناصر، عبدالشافي فهمي عبادة، يوسف نصرالدين

المحاضرة الأولى

المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً. وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شئ آخر.

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

$$A \quad , \quad B \quad , \quad C \quad , \quad \cdots$$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

$$a \quad , \quad b \quad , \quad c \quad , \quad \cdots$$

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

طرق كتابة المجموعات:

- **طريقة العد (سرد العناصر):**

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة "," مثل:

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

بحيث لا يتم تكرار العنصر

تابع: طرق كتابة المجموعات:

•طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x: عدد طبيعي زوجي x }

B={x:كلية بجامعة الملك فيصل x}

C={x: طالب مسجل بالمقرر الحالي x}

D={x: -3≤x ≤1 ،عدد حقيقيX}

X={x: 0≤x ≤12 ،عدد صحيحX}

أنواع المجموعات:

• المجموعة الخالية:

هي المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز Φ أو { }.

أمثلة:

A={x:x^2+1=0 ،عدد حقيقيx}

B={x: عدد طبيعي زوجي وفردي x }

C={x: دولة عربية تقع في اوروبا x }

• المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \cdots, 100\}$$

$$C = \{x, y, z, w, u\}$$

•المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={x: عدد طبيعي فردي x }

$$B = \{10, 20, 30, \cdots\}$$

$$C = \{x \in R : 0 \le x \le 10\}$$

- **المجموعة الكلية:**

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها، ويرمز لها بالرمز U.

- **المجموعة الجزئية:**

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب على الصورة $A \subset B$

أمثلة:

١. إذا كانت $A = \{2,4,6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فان $A \subset B$

٢. مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

- **تساوي المجموعات:**

تكون المجموعتان B، A متساويتان إذا كانت

$$A \subseteq B , B \subseteq A \Rightarrow A = B$$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

$$1-\ A = \{1,3,5,7\} ,\ B = \{3,1,5,7\}$$

$$2-\ A = \{0,1,2\} ,\ B = \{a,b,c\}$$

الحل:

$$1)\quad A = B$$

$$2)\quad A \equiv B$$

- **الاتحاد**

اتحاد المجموعتين A، B $(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما. أي أن :

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

- **التقاطع**

تقاطع المجموعتين A، B($A\cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A و في B معاً. أي العناصر المشتركة بين A و B . أي أن

$$A\cap B=\{x:x\in A\ \wedge x\in B\}$$

- **المكملة**

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A. أي أن

$$\overline{A}=\{x:x\in U\ \wedge\ x\notin A\}$$

- **الفرق**

إذا كانت مجموعتان A، B فان A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة A وليست في B.أي أن

$$A-B=\{x:x\in A\ \wedge x\notin B\}$$

مثال:

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U=\{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

فأوجد:

1) $A\cup B$
2) $A\cap B$
3) $A-B$
4) $\overline{A}$
5) $\overline{B}$

الحل:

1) $A\cup B=\{1,2,3,4,5,x,y,w\}$

2) $A\cap B=\{3,x\}$

3) $A-B=\{1,2,y\}$

4) $\overline{A}=\{4,5,w,z\}$

5) $\overline{B}=\{1,2,y,z\}$

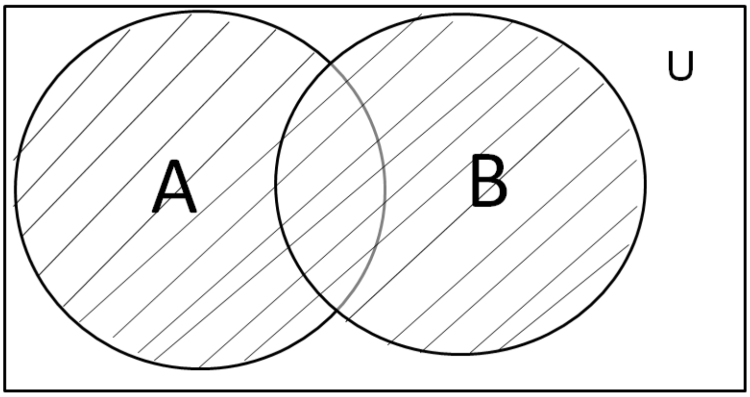
المحاضرة الثانية

المجموعات - تكملة

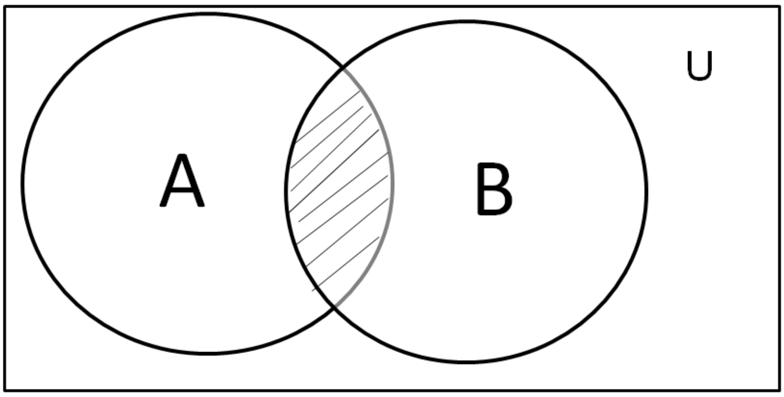
أشكال فين:

يمكن استخدام الأشكال الهندسية لتمثيل المجموعات والعمليات عليها، حيث يتم تمثيل المجموعة الكلية U بمستطيل ومن ثم أي مجموعة جزئية منها بشكل هندسي كالدائرة مثلاً، يرسم داخل المستطيل ، وتستخدم هذه الأشكال لتوضيح العمليات التي نجريها على المجموعات مثل الاتحاد ، التقاطع والمكملة والفرق وغيرها. كما في الأمثلة التالية:

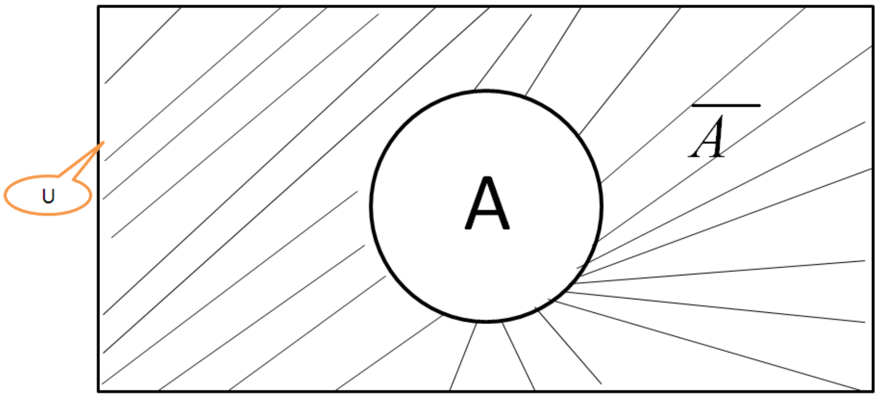
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل اتحاد مجموعتين A و B



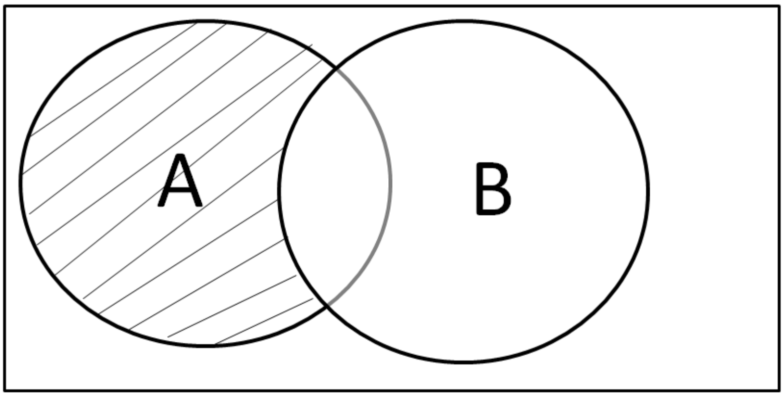
الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل تقاطع مجموعتين A و B



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل $\overline{A}$



الجزء المظلل في الشكل أدناه يمثل A-B



الضرب الديكارتي:

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A، B ($A \times B$) بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x,y)التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B.

بالرموز

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

مثال:

إذا كانت $A = \{-2,1\}$ و $B = \{-3,1,4\}$

فأوجد $A \times B$ و $B \times A$

الحل:

$$A \times B = \{(-2,-3),(-2,1),-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$$

$$B \times A = \{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$$

مثال:

أنشئ $A \times B$ ، علما بان

$B = \{ w , x , y \}$ و $A = \{ 1 , 2 \}$

الحل:

$$A \times B = \{(1, w), (1, x), (1, y), (2, w), (2, x), (2, y)\}$$

ملاحظات:

- لاحظ أن عدد عناصر A عنصران وعدد عناصر B ثلاثة عناصر، وان عدد عناصر $A \times B$ يساوي عدد عناصر $B \times A$ و يساوي ٦ عناصر (أزواج مرتبة) = 2×3 = عدد عناصر A×عدد عناصر B .
- أيضا يمكننا ملاحظة أن

$$A \times B \neq B \times A$$

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1, y_1) و (x_2, y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1 = x_2)$ ، وكان المسقط الثاني في الزوج الأول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني، $(y_1 = y_2)$

مثال:

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $\left(x + 1 , y - \frac{1}{2} \right) = \left(4 , \frac{3}{2} \right)$

الحل:

$$x + 1 = 4 \quad \Rightarrow x = 4 - 1 = 3$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

مجموعة المجموعات (مجموعة القوى):

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية ϕ والمجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S).

مثال:

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{a, b, c\}$

مجموعة الأعداد:

١. مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

٢. مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$$

٣. مجموعة الأعداد النسبية:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b}, a, b \in Z ; b \neq 0 \right\}$$

٤. مجموعة الأعداد غير النسبية :

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها على صورة الأعداد النسبية مثل $\sqrt{2}$ والنسبة التقريبية π والعدد النابيري e غيرها.

٥. مجموعة الأعداد الحقيقية:

وهي المجموعة التي تحتوي على كافة الأنواع السابقة ويرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$ وتمثل هندسياً بخط الأعداد.

ملاحظة: $N \subset Z \subset Q \subset R$

تمارين:

١. افرض أن $A = \{3,4,5,x,y\}$ و $B = \{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة .

(i) 3 ________ A

(ii) 3 ________ B

(iii) x ________ A

(iv) x ________ B

(v) z ________ A

(vi) z ________ B

(vii) 1 ________ A

($viii$) 1 ________ B

(ix) A ________ A

(x) B ________ B

٢. اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية . يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر

i. A={x: عدد طبيعي اصغر من ٧ x}

ii. B={x: عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على٢ x}

iii. C={y: حرف من حروف الهجاء المحصور بين c وh y}

iv. D={x: عدد طبيعي فردي اصغر من ١٧ x}

٣. ضع الرمز $=$ أو $\neq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

$(i)\ \{a, b, c\}$ ________ $\{b, c, a\}$

$(ii)\ \{0, 1, 2, 3\}$ ________ $\{0, 1, 2, 3, 3\}$

$(iii)\ \{x, y, z\}$ ________ $\{x, y, z, w\}$

٤. افرض أن $X = \{1,2,3,4\}$ و $Y = \{4,6,8,10\}$ ضع الرمز $\subset$ أو $\not\subset$ أو $\subseteq$ في المكان الخالي لتكون الجملة صحيحة

$(i)\ X$ ________ Y

$(ii)\ Y$ ________ X

$(iii)\ X$ ________ $X \cup Y$

$(iv)\ \phi$ ________ X

$(v)\ \phi$ ________ Y

٥. إذا كانت المجموعة الكلية هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأصغر من ١٠ ، افرض ان $A = \{1,3,5\}$ و $B = \{2,4,6\}$ كون المجموعات الاتية:

$(i)\ A \cup B$

$(ii)\ A \cap B$

$(iii)\ \overline{A}$

$(iv)\ \overline{B}$

$(v)\ \overline{A\cup B}$

$(vi)\ \overline{A\cap B}$

$(vii)\ \overline{A}\cup\overline{B}$

$(viii)\ \overline{A\cap U}$

$(ix)\ A\cap A$

٦. لتكن المجموعة الكلية $U=\{-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

ولتكن $A=\{1,2\}\ ,\ B=\{-1,1,3\}\ ,\ C=\{2,4,6\}$

فأوجد

$(i)\ A\times B$

$(ii)\ B\times A$

$(iii)\ B\times B$

$(iv)\ A\times(B\cap C)$

$(v)\ (A\times B)\cap(A\times C)$

$(vi)\ \overline{C}\times B$

٧. إذا كانت

A={x: ٥ عدد طبيعي اصغر من x}

B={y: ٣ عدد طبيعي اصغر من y}

هل $A\times B=B\times A$

٨. أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x,y^2)=(2x-2,1)$

المحاضرة الثالثة

الدوال

الدالة:

يعتبر مفهوم الدالة واحدا من أهم المفاهيم في الرياضيات. وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على)أو (تتوقف على)أو(تتعين بواسطة) كمية أخرى.

فمثلاً:

- حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.
- متوسط إنتاج الفدان من المحاصيل يعتمد على كمية السماد المستخدمة.
- الاستهلاك الشهري لأسرة ما يعتمد على دخلها الشهري.

تعريف مجرد لمفهوم الدالة:

إذا كانت A ، B مجموعتين فان f دالة من A إلى B ، أي $f:A \longrightarrow B$ إذا كانت f مجموعة جزئية من A×B بحيث انه لكل $x \in A$ توجد y واحدة في B بحيث $(x,y) \in f$. يسمى y قيمة الدالة f عند x ويكتب ذلك رمزا على النحو $y=f(x)$. ويسمى y بالمتغير التابع و x بالمتغير المستقل.

ملاحظة:

إذا كانت f دالة من A إلى B. فان A تسمى مجال الدالة . وتسمى B المجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى.

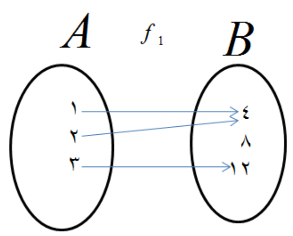
مثال: إذا كانت $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت

$f_1 = \{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و $f_2 = \{(1,4),(2,8)\}$ و

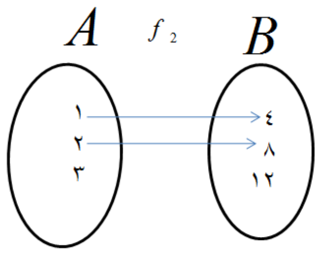
$$f_3 = \{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$$

فهل f_1 ، f_2 و f_3 دوال من A إلى B ؟

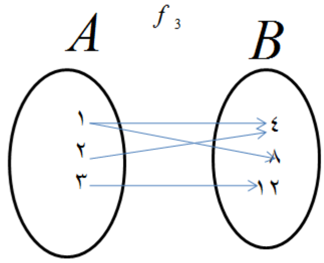
الحل:



نعم f_1 دالة لان كل عنصر في المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل.



f_2 ليست دالة لان $3 \in A$ وليس له صورة B .



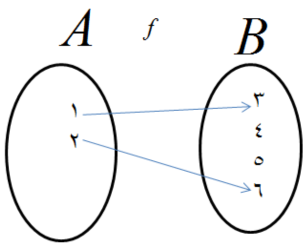
f_3 ليست دالة لان $1 \in A$ وله صورتان

مثال:

إذا كان A={1,2} ، B={3,4,5,6} ، f={(1,3),(2,6)}

مثل f بالمخطط السهمي ثم أوجد مداها

الحل:



مدى f هو {3,6}

تمرين:

- أي من العلاقات التالية تمثل دالة

1. R= {(-1,2), (2,2), (3,5), (6,1) }
2. R ={(0,7), (1,5), (1,2), (3,-4) }
3. R={(-3,1), (-1,1), (0, 1), (4,1)}
4. R={(-4,0), (-4,4), (2,3), (1,9)}
5. R={(3,0), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4)}
6. R={(1,1), (2,2), (4,4), (9,9)}

إيجاد قيمة الدالة:

مثال:

إذا كان $f(x)=x^2+4x-3$ ، فأوجد

$(i)\ f(2)$

$(ii)\ f(-1)$

$(iii)\ f(a)$

$(iv)\ f(x+1)$

الحل:

$$(i)\ f(2) = 2^2 + 4\times 2 - 3 = 4 + 8 - 3 = 9$$

$$(ii)\ f(-1) = (-1)^2 + (4\times -1) - 3 = 1 - 4 - 3 = -6$$

$$(iii)\ f(a) = a^2 + 4\times a - 3 = a^2 + 4a - 3$$

$$(iv)\ f(x+1) = (x+1)^2 + 4(x+1) - 3$$
$$= x^2 + 2x + 1 + 4x + 4 - 3 = x^2 + 6x + 2$$

مثال:

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ ، فأوجد

$(i)\ f(a)$

$(ii)\ f(-3)$

$(iii)\ f\left(\frac{1}{2}\right)$

$(iv)\ f\left(\frac{-2}{3}\right)$

الحل:

$$(i)\ f(a) = 3a^2 - 7a + 2$$

$$(ii)\ f(-3) = 3(-3)^2 - 7(-3) + 2$$
$$= 27 + 21 + 2 = 50$$

$$(iii)\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 2$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{7}{2} + 2 = \frac{-3}{4}$$

$$(iv)\ f\left(\frac{-2}{3}\right) = 3\left(\frac{-2}{3}\right)^2 - 7\left(\frac{-2}{3}\right) + 2$$
$$= \frac{4}{3} + \frac{14}{3} + 2 = 8$$

تمرين:

١. إذا كان $f(x)=2x^2-3x$ ، فأوجد

$(i)\ f(0)$

$(ii)\ f(-4)$

$(iii)\ f(1+h)$

$(iv)\ f(x+h)$

٢. للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-1)$

٣. للدالة $g(x)=\frac{x-1}{2x+3}$ أحسب $g(x-1)$ و $g(4)$

٤. للدالة $f(x)=2x^2-1$ أحسب $f(1)+f(2)+f(3)$

٥. للدالة $f(x)=x^2$ أحسب $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

٦. للدالة $g(x)=x+1$ أحسب $2[g(2)]^2-g(2)+5$

٧. للدالة $f(t)=\frac{2t-1}{t+3}, t\neq -3$ أحسب $\frac{5}{f(4)}$

ملاحظة:

سنقتصر في دراستنا للدوال على دراسة بعض أنواع الدوال الحقيقية .

الدوال الحقيقية:

الدالة الحقيقية هي الدالة المعرفة من مجموعة الأعداد الحقيقية إلى مجموعة الأعداد الحقيقية . أي $f:R \longrightarrow R$

- **دالة كثيرة الحدود:**

هي الدالة التي على الصورة $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x + a$

حيث $a_n, a_{n-1}, \cdots, a$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثيرة الحدود، n عدد طبيعي. تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x)

مثال: ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية:

$$(1)\ f(x)=3$$

$$(2)\ f(x)=3x-4$$

$$(3)\ f(x)=x^2-x+1$$

$$(4)\ f(x)=2-3x+x^3$$

$$(5)\ f(x)=x^3+x^5+5x-6$$

الحل:

١. الدرجة الصفرية ويسمى أيضا دالة ثابتة.
٢. الدرجة الأولى ويسمى أيضا دالة خطية.
٣. الدرجة الثانية ويسمى أيضا دالة تربيعية.
٤. الدرجة الثالثة أو دالة تكعيبية.
٥. الدرجة الخامسة

العمليات على الدوال:

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة معطيات. وتشمل هذه العمليات، العمليات الثنائية من جمع وطرح وضرب وقسمة وتركيب وعملية أحادية واحدة هي المعكوس.

لتكن f ،g دالتين فان:

$$(i)(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(ii)(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(iii)(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0$$

$$(v)(fog)(x)=f(g(x))$$

(vi) معكوس الدالة:

إذا كانت $y=f(x)$ دالة فان معكوسها يعني إيجاد x كدالة في y أي $x=f^{-1}(y)$، حيث f^{-1} يرمز لمعكوس الدالة f .

مثال: إذا كانت $f(x)=3x+5$ ، $g(x)=x^2+1$ ، فأوجد

$(i)\ (f+g)(x)$

$(ii)\ (f-g)(x)$

$(iii)\ (f\times g)(x)$

$(iv)\ \frac{f}{g}(x)$

$(v)\ (fog)(x)$

$(vi)\ f^{-1}$

الحل:

$$(i)\ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=3x+5+x^2+1$$
$$=x^2+3x+6$$

$$(i)\ (f-g)(x)=f(x)-g(x)=3x+5-(x^2+1)$$
$$=3x+5-x^2-1=3x-x^2+4$$

$$(iii)\ (f\times g)(x)=f(x)\times g(x)=(3x+5)(x^2+1)$$
$$=3x^3+3x+5x^2+5$$
$$=3x^3+5x^2+3x+5$$

$$(iv)\ \frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x+5}{x^2+1}$$

$$(v)\ (fog)(x)=f(g(x))=f(x^2+1)=3(x^2+1)+5$$
$$=3x^2+3+5$$
$$=3x^2+8$$

$$(vi)\ f^{-1}(y)=\frac{y-5}{3}$$

تمرين١: افرض أن $f(x)=1/(x-2)$ ، $g(x)=\sqrt{x}$ ، احسب

$(i)\ (fog)(9)$

$(ii)\ (fog)(x)$

$(iii)\ (gof)(6)$

$(iv)\ (gof)(x)$

حلول تمرين ١:

$$(i)\,(fog)(9) = f\big(g(9)\big) = f(3) = \frac{1}{3-2} = 1$$

$$(i)\,(fog)(x) = f\big(g(x)\big) = \frac{1}{g(x)-2} = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$$

$$(iii)\,(gof)(6) = g\big(f(6)\big) = g\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$(iii)\,(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$$

تمرين ٢ :

افرض أن $f(x) = 1/(x-1)$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، فأوجد

$(i)\,(f+g)(x)$

$(ii)\,(f-g)(x)$

$(iii)\,(f \times g)(x)$

$(iv)\,\dfrac{f}{g}(x)$

$(v)\,(fog)(x)$

$(vi)\,(gof)(x)$