الفصل الأول: نظرية الاحتمالات
التجربة الإحصائية والفضاء العيني والحوادث

تعريف 1: التجربة الإحصائية هي أي عملية أو مجموعة عمليات لا تعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي. فمثلا رمي زهرة نرد, أو إلقاء قطعة نقد يمثلان تجربة إحصائية ويسمى هذا النوع من التجارب بالتجارب العشوائية حيث نلاحظ أن النتائج تتغير في كل مرة يتم إجراء فيها التجربة.

ولكل تجربة إحصائية نتائج, وتعرف النتيجة للتجربة على أنها (النتيجة البسيطة, أي التي لا يمكن تحليلها إلى نتيجتين أو أكثر) وتسمى جميع النتائج البسيطة الممكنة الحدوث بالفضاء العيني للتجربة.

شرح : هناك نوعين من التجارب الاحصائية : **1): الأكيدة** ، تكون نتائجها المسبقة معروفه بشكل حتمي ..
مثال على التجارب الأكيدة : لو رمينا كره في الهواء فلابد بالنهاية ان ترتد إلى الأرض بفعل الجاذبية
2): العشوائية ، النتائج تتغير في كل مره يتم اجراء فيها التجربة بمعنى اننا لانعرف نتائجها المسبقة بشكل حتمي .
مثال على التجارب العشوائية : عند إلقاء قطعه نقد مره واحدة اما ان يكون الناتج هو صورة أو كتابة .

تعريف 2: الفضاء العيني (Sample Space) لتجربة إحصائية هي مجموعة جميع النتائج الممكنة لتلك التجربة وسنعبر عن الفضاء العيني بالرمز S.

تعريف 3: الحادث Event هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني ويرمز له بأحد الأحرف التالية ... ,A, B, C ويقسم إلى قسمين:

1- الحادث البسيط: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجة واحدة فقط.

2- الحادث المركب: وهو الحادث الذي يحتوي على نتيجتين فأكثر.

الشرح في مثال : عند القاء قطعه نرد مرتين ، عندما نرمي الاولى سيظهر لدينا العدد 1 أو العدد 2 (هذه الحوادث البسيطة)
وعند القائها المره الثانية ستظهر لدينا من 1 إلى 6
عند القاء قطعه نرد مرتين إما سيظهر حادث بسيط العدد 1،1 – 2،2 – 3،3 ... سيكون لدينا 36 ناتج ، الحادث المركب إذا ضمينا أكثر من نتيجة في نفس الوقت

كما يمكن تعريف بعض من الحوادث التالية:

1- الحادث المستحيل: وهو الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر ورمزه Ø.

الشرح : عند القاء قطعه نرد او نقد من غير الممكن ان يظهر لنا حادث مستحيل .. " لايحتوي على أي عنصر "

2- الحادث الأكيد: وهو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني S.

الشرح : لابد أن يظهر لدينا احد الوجهين .

تعريف 4: فضاء العينة المنفصل يسمى الفضاء العيني فضاءً منفصلا إذا كان محدودا أو لا نهائيا معدودا, أي إذا أمكن ربط عناصره واحدا إلى واحد مع الأعداد الصحيحة الموجبة كان نقول اربط العنصر الأول مع العدد 1 والعنصر الثاني مع العدد 2 وهكذا إلى مالا نهاية.

إضافات : متى يسمى الفضاء فضاء منفصل ؟ 1) : إذا كان محدوداً 2) : لانهائي معدود

- **محدود :** بأن نقول لدينا تجربة عشوائية عند رمي قطعه نقد يكون لدينا الناتج أما صورة أو كتابة
- **لانهائي معدود :** بأن نجري تجربة عشوائية عدد لانهائي من المرات وفي كل مره نربط نتيجة هذه التجربة بأعداد صحيحة موجبة

[نستطيع ان نربط عدد مالانهاية مع مجموعه الاعداد الصحيحة الموجبة]

مثال: في تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين, أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حادث بسيط, حادث مركب وحادث أكيد؟
ملاحظة: سيتم الرمز بالحرف H لوجه الصورة, وبالحرف T لوجه الكتابة.
الحل:

صورة كتابة

S= {(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}

A={(H,H)} حادث بسيط

B={(T,H),(T,T)} حادث مركب

C= S حادث أكيد

[لاحظ أن الحادث الأكيد دائما هو الحادث الذي يحتوي على جميع عناصر الفضاء العيني, بينما الحادث الذي لا يحتوي على أي عنصر يسمى بالحادث المستحيل.]

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة, أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم أعط مثال على حادث بسيط, حادث مركب وحادث أكيد؟
الحل:

الفضاء العيني للتجربة $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

وبالتالي يمكن كتابة الحوادث التالية:

$A=\{5\}$ حادث بسيط

$B=\{3, 4\}$ حادث مركب

$C= S$ حادث أكيد

$D= \{7\}$ حادث مستحيل

[لاحظ أن العدد 7 لا ينتمي إلى الفضاء العيني لهذه التجربة ولذلك سمي بالحادث المستحيل.]

تمرين 1: في تجربة إلقاء قطعة نقد وحجر نرد, أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم اعط مثال على حادث بسيط وحادث مركب؟

تمرين 2: في تجربة إلقاء حجري نرد مرة واحدة, أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة واعط مثال على حادث بسيط, حادث مركب وحادث أكيد؟

تمارين

تمرين 1: في تجربة إلقاء قطعة نقد وحجر نرد, أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة ثم اعط مثال على حادث بسيط وحادث مركب؟

تمرين 2: في تجربة إلقاء حجري نرد مرة واحدة, أوجد الفضاء العيني لهذه التجربة واعط مثال على حادث بسيط, حادث مركب وحادث أكيد؟

الحوادث المتنافية

نقول بأن الحادثان A, B حادثان متنافيان إذا تحقق الشرط التالي:

$$A \cap B = \emptyset$$

مثال: إذا كان $S=\{1, 2, \ldots, 10\}$, وكان A حادث يمثل ظهور عدد فردي وB حادث يمثل ظهور عدد زوجي من S, فعندئذ نقول بأن الحادثان A, B حادثان متنافيان.

العمليات الجبرية على الحوادث

$A \cup B = \{ x: x \in A \text{ or } x \in B\}$

$A \cap B = \{ x : x \in A \text{ and } x \in B\}$

$A = \{ x : x \in S \text{ and } x \notin A\}$

$A - B = \{ x : x \in A \text{ and } x \notin B\}$

مثال: إذا كان $S=\{1, 2, 3, \ldots\ldots, 10\}$

$A=\{ x: x$ عدد فردي $\}$

$B=\{ y: y$ عدد زوجي $\}$

أوجد : $A \cup B$, $A \cap B$, A, $A - B$ ؟

الحل:

$A \cup B = S$

$A \cap B = \emptyset$

$A = B$

$A - B = A$

المحاضرة الثانية – طرق العد

مقدمة:

قبل البدء بدراسة مفهوم الاحتمال النسبي ولاعتماده بشكل أساسي على عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية ,فلا بد من معرفة الطرق التي تساعدنا على ذلك .وهنالك أربعة طرق للعد سنتعرف عليها على النحو الآتي:

أولا :قاعدة الضرب

إذا كانت التجربة E1 تحدث في n1 الطرق وكانت التجربة E2 تحدث في n2 من الطرق ,فإن التجربتين معا تحدثان فيn1n2 من الطرق.

مثال :إذا أراد طالب أن يسجل في مقررين احدهما في قسم الإحصاء والآخر من قسم المحاسبة ,فإذا كان عدد المقررات لقسم الإحصاء هو 3 وعدد المقررات من قسم المحاسبة هو ,4 فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الطالب فيها؟

الحل :عدد الطرق= 3×4=12 طريقة

ملاحظة :يمكن تعميم القاعدة لتشمل k من التجارب.

مثال :كم هاتفا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا تألف رقم الهاتف من أربعة أرقام بشرط أن يكون الرقم الأول من اليسار ؟ أوله العددين 8 أو9؟

الحل :عدد الهواتف = 10×10×10×2= طريقة

(لاحظ أن العدد الأول له طريقتان فقط لاختياره أما باقي المنازل فله 10طرق لاختيارهم هي عبارة عن الأعداد من 0 إلى 9).

ثانيا :قاعدة الجمع

إذا كانت تجربة ما تحدث في n1 من الطرق وكانت تجربة أخرى تحدث في n2 من الطرق بحيث كان من المعلوم أن التجربتين لا تحدثان معا (مانعتان لبعضهما البعض)فإن واحدة منهم أو الأخرى تحدث في n1+n2 من الطرق.

مثال :أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الإحصاء أو قسم المحاسبة ,بحيث كان عدد المقررات في قسم الإحصاء 3وفي قسم المحاسبة ,4فما عدد الاختيارات لديه؟

الحل: عدد الطرق = 3+4=7 طرق

ملاحظة :يمكن تعميم قاعد الجمع لتشمل k من التجارب.

الشرح :-
المثال المعطى في السؤال هو الذي يحدد القاعدة المطلوبة ، مثلًا : في المثال الأول التجربتين تحدثان معًا فقمنا باستخدام قاعدة الضرب ، والمثال الثاني أحد التجربتين تكون مانعة للتجربة الأخرى فقمنا باستخدام قاعدة الجمع .

مثال :- أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الإحصاء أو قسم المحاسبة أو قسم الرياضيات ، حيث أن عدد المقررات في قسم الإحصاء 4 والمحاسبة 6 والرياضيات 4 فما عدد الاختيارات لديه ؟

الحل :- حاصل جمع عدد مقررات القسم الأول + حاصل جمع عدد مقررات القسم الثاني + حاصل جمع مقررات القسم الثالث

عدد الطرق = 4 + 6 + 4 = 14 طريقة .

ثالثاً:التباديل Permutations

التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما.

مثال :ما عدد طرق ترتيب جميع الأحرف a,b,c؟

الحل :لاحظ أنه لدينا ثلاثة أماكن لنملأها من الأحرف الثلاثة حيث يمكن اختيار ثلاثة أحرف للمكان الأول أما المكان الثاني فيتبقى لدينا حرفان لملء المكان وأخيرا يبقى حرف واحد لملء المكان الأخير وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على:

عدد الطرق= **3×2×1=6 طرق**

الشرح :-

- يشترط قانون التباديل (الترتيب) . حينما يُذكر في السؤال كلمة ترتيب نطبق قانون التباديل على المعطيات الموجودة في السؤال .
- يمكن استخراج ناتج التباديل من الآلة الحاسبة بالضغط على الأزرار التالية : SHIFT + X

وبشكل عام ,لدينا الحالات الثلاث التالية:

1- يمكن ترتيب **n** من العناصر المختلفة بطرق عددها
$nPn = n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1$
وهذا هو عدد تباديل **n** من العناصر المميزة.

(ملاحظة تسمى العملية !n بمضروب العدد n وهو عبارة عن $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times3\times2\times1$ **ومثال عليها 4!=4×3×2×1=24)**

مثال :بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة" تقوى "؟
الحل :عدد الطرق يساوي
$4P4 = 4\times3\times2\times1 = 24$

الشرح :-
- نطبق القاعدة الأولى في حالة العناصر المختلفة ، حيث أحرف كلمة (تقوى) لايوجد بها أي حرف مكرر (متشابه) .

2- في حالة وجود لدينا n من العناصر فيها n1 من العناصر المتماثلة و n_2 من العناصر المتماثلة والمختلفة عن الأولى وهكذا لغاية k من العناصر المتماثلة ,فإن عدد التباديل في هذه الحالة يصبح على النحو الآتي:

$$nPn = \frac{n_1}{n_{1!}\, n_{2!\ldots nk1!}}$$

مثال :ما عدد تباديل أحرف كلمة" سلسبيل"؟
الحل :عدد الطرق يساوي

لاحظ أن حرف" س "تكرر مرتين وكذلك حرف" ل "أما بقية الأحرف فتكررت مرة واحدة.

الشرح :-

- في هذا المثال لانستطيع التعويض فقط بالآلة الحاسبة ، بسبب أن لدينا بعض الأحرف المكررة ، تكرر حرف (س) مرتان ، كما أنه تكرر حرف (ل) مرتان ايضًا ، فيكون مجموع احرف الكلمة في البسط مع علامة المضروب (!) ، ويكون في المقام عدد تكرار الأحرف مع اشارة الضرب (x) بينهما كما هو موضح في المثال .

3- في حالة كان لدينا n من العناصر المميزة وأردنا ترتيب جزء من هذه العناصر وليكن r, ففي هذه الحالة يكتب قانون التباديل على الصورة التالية:

مثال :ما عدد تباديل حرفين من كلمة" تاريخ"؟

الحل :لاحظ أن عدد أحرف كلمة " تاريخ "هو 5 وبذلك تصبح قيمة n=5 أما r= 2 كما هو مطلوب في السؤال وبذلك تصبح عدد الطرق تساوي

الشرح :-

- نستخدم هذا القانون حينما يُحدد في السؤال طلب معين ، في هذا المثال كان المطلوب تباديل حرفين فقط من الكلمة ، فيكون 2 هو المميز والذي نُعوض به قيمة r في القانون . و n نعوض بها عدد أحرف الكلمة .

رابعا :التوافيقCombinations

التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب.

- كما يمكن استخراج ناتج التوافيق من خلال الآلة الحاسبة من خلال الضغط على الازرار التالية :
  SHIFT+÷

مثال :ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف A, B, C دون الاهتمام بالترتيب؟

الحل :الاختيارات هي {A,B} , {A,C} ,{B,C}وبذلك يكون لدينا 3 طرق.

وبشكل عام ,عدد الطرق التي نختار بها r عنصر من مجموعة فيها n من العناصر بغض النظر عن الترتيب هو عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة ويعطى بالصيغة التالية:

مثال :صف فيه 10 طلاب ,بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلاب دون النظر إلى الترتيب؟

الحل:

مثال :صندوق فيه 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء.

أ)بكم طريقة نختار 4 كرات من الصندوق؟

ب) بكم طريقة تختار الكرات الأربع بحيث تكون فيها واحدة حمراء وثلاث كرات بيضاء؟

الحل:

أ)من قاعدة التوافيق ,عدد طرق اختيار 4 كرات من الصندوق يساوي

$$12c4 = \frac{}{(12}$$

ب) عدد طرق اختيار كرة واحدة من الكرات الحمراء هو

أما عدد طرق اختيار 3 كرات بيضاء فهو

إذن ,من قاعدة الضرب ,عدد طرق اختيار كرة واحدة وثلاث كرات بيضاء هو

أمثلة:

-1 بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI" ؟

الحل: لاحظ أن هذه الكلمة مكونة من 10 أحرف ,منها الحرف S تكرر اربع مرات وكذلك الحرف P تكرر مرتين ,الحرف I تكرر ثلاث مرات . وبذلك يكون الحل كما يلي:

$10 \square 10 =$

أما عدد طرق تكوين كلمة من جميع أحرف كلمة "MISSISSPPI" بغض النظر عن الترتيب فهو طريقة واحدة فقط.

2 - بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159

أ- مع الترتيب؟

ب - بدون ترتيب؟

الحل:

1- لاحظ أن جميع الأرقام المكون منها هذا العدد مختلفة ,وكذلك عدد منازل هذا العدد هو n=4 والمطلوب في السؤال ترتيب رقمين فقط بمعنى , r=2 وبذلك يكون الحل هو $4 \square 2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2!}{2!} = 12$:

2- في حال عدم الترتيب ,تصبح صيغة القانون على الشكل التالي

تمارين:

1- يقدم احد المطاعم 4 أصناف من اللحوم , و 3 أصناف من السلطات , وصنفين من الحلوى كم عدد الاختيارات الممكنة لوجبة غذائية مكونة من صنف واحد من كل نوع ؟

2- صندوق فيه 8 كرات مختلفة سحبت 3 كرات الواحدة تلو الأخرى . جد عدد طرق سحب الكرات الثلاث إذا كان السحب:

أ- دون إرجاع

ب- مع إرجاع

3-

أراد أربعة أشخاص اخذ صورة جماعية بوقوفهم معا في صف واحد بكم طريقة مختلفة يمكن أن يصطف هؤلاء الأشخاص ؟

المحاضرة الثالثة نظرية الاحتمالات

مقدمة : مفهوم الاحتمال .. هناك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها :

1/ طريقة الرأي الشخصي : وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما , و كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرًا للجهد الذي بذله في دراستها .

2/ طريقة التكرار النسبي :و ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي , n(A) فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$, وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت ,وليكن p فعندئذ تقول أن احتمال الحادثA هو العدد. p

مثال : عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها , نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدًا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$

مثال : إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

التخصص	عدد الطلبة
إدارة أعمال	320
محاسبة	480
تسويق	300
علوم مالية ومصرفية	500

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة ,فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل: التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي $\frac{480}{320+480+300+500}$ = 0.3

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي :

فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث : إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه n من النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر . ومن هذا نحصل على النتيجة التالية :

إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A), فإن احتمال هذا الحادث هو : $P(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$ =

مثال : في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات أوجد احتمال كل من الحوادث التالية :

1/ إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل ؟

2/ إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة ؟

الحل : لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي :

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2 = 8 (من قاعدة الضرب).

1- $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

احظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $P(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين .

قوانين الاحتمالات: في هذا البند سنورد القوانين الاولية في الاحتمال وهي :

نظرية (1) :

1- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها Ø فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر . بالرموز p(Ø) = 0

2- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1 . بالرموز p(S) = 1

3- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد . بالرموز $0 \le p(s) \le 1$

نظرية (2) : إذا كان A حادثًا في s , وكان $\bar{A}$ هو متممة ذلك الحادث فإن $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

مثال : إذا كان احتمال نجاح طال في مادة الحاسبة ما هو 80% , فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة ؟

الحل : بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A , فإن احتمال عدك نجاحه يساوي $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 -$

$0.08 = 0.20$

مثال : إذا كان احتمال وصول طالب إلى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75 فما احتمال وصول الطالب المتأخر ؟

الحل : نفرض أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

$\bar{A}$ = وصول الطالب متأخرًا

$P(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

نظرية (3) : إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20, أجب عن الاسئلة التالية :

أ) ما احتمال غياب الطالب عن أحد المحاضرتين على الأقل ؟

ب) ما احتمال عد غياب الطالب عن أي من المحاضرتين ؟

ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى ؟

الحل : نفرض أن A تمثل غياب طالب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية . وبذلك فأن A∩B يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين

أ) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين, وهذا يعني متممة الحادث "غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$$p^{(A \cup B)} = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$$

ج) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.5$, $p(B) = 0.8$, $p(A \cup B) = 0.9$. أوجد

أ) $p(A \cap B)$

ب) $p(\bar{A})$

ج) $p^{(\overline{A \cap B})}$

الحل :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0.9 = 0.5 + 0.8 - p(A \cap B)$

1)

$$\downarrow$$

$p(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$

2) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

3) $p^{(\overline{A \cap B})} = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

ملاحظة : في حال كان الحادثين B,A حادثين منفصلين , فإن تقاطعهما = Ø وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$$p(A \cup B) = p(A) + P(B)$$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.3$, $p(B) = 0.4$ بحيث كان الحادثين B,A حادثين منفصلين , فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B ؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B او حدوث احدهما على الأقل تعني $p(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معًا فهذا يعني $p(A \cap B)$

نظرية (4) : إذا كان B,A أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

ب) $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعد في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الاقل يساوي أو أوجد احتمال

1- حضور المدير ومساعده؟

2- حضور المدير وحده؟

3- حضور المساعد وحده؟

الحل : نعبر عن حضور المدير بالحادث A وحضور المساعد بالرمز , وحضور احدهما على الأقل بالرمز $A \cup B$

1- من نظرية رقم ثلاث نجد أن :

الحل :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$

$$\downarrow$$

$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$

2- حضور المدير وحده تعني أن المدير حضور وغيابك مساعد , وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث

$p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B) \quad 0.90 - 0.88 = 0.02$

3- حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب حدوث B وعدم حدوث A .

$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$

تمارين :

- **في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين اوجد احتمال ما يلي :**

1- ظهور عددين متشابهين

2- ظهور عددين مختلفين

3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من12 ؟

4- ظهور عدين بحيث يكون الأول عدد فردي؟

- **ألقيت قطعتا نقود متزنتان مرة واحدة فما أحتمال** :

1- ظهور صورة واحدة على السطح العلوي ؟

2- ظهور صورة واحدة على الأقل ؟
3- ظهور صورة واحدة على الأكثر ؟

أمثلة :

- اذا كان احتمال حصول طالبة على قبول من جامعة الملك فيصل هو 0.5 ، واحتمال حصولها على القبول من جامعة الملك سعود هو 0.8 ، واحتمال حصولها على القبول من كلا الجامعتين هو 0.4 ، فما هو احتمال حصولها على القبول من احدى الجامعتين ؟
الحل : اذا كان الحصول على القبول من جامعة الملك فيصل هو A ، والحصول على القبول من جامعة الملك سعود هو B فإن :-

$P(A)=0.5 \quad P(B)=0.8 \quad P(A\cap B)=0.4$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0.5 + 0.8 - 0.4 = 0.9$

- في تجربة رمي حجر النرد منتظم مرة واحدة ، أوجد احتمال الحوادث التالية :
1- الحادث A احتمال ظهور العدد 4 .
2- الحادث B احتمال ظهور عدد زوجي .
3- الحادث C احتمال ظهور العدد 9 .

$S = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$

بما أن حجر النرد منتظم فإن كل نقاط فراغ العينة متساوية في احتمال الظهور .

$1=P(S)=P\{(1) \cup (2) \cup \dots \cup (6)\}$

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6)$

$6P(1)=1 \rightarrow P(1)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(1) = P(2) = P$

1- $P(A) = P(4) = \frac{1}{6}$

2- $P(B) = P(2,4,6)= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

3- $P© = P\emptyset = 0$

- في تجربة القاء حجر نرد مرتين ماهو احتمال :
1- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 10 .
2- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى أكبر من 10 .
3- مجموع العددين الظاهرين إلى أعلى يساوي 7 .

- فراغ العينة يتألف من 36 نقطة .

الوجه الأول / الوجه الثاني	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

1- اذا كان A ظهور عددين مجموعهما يساوي 10 .

$A=[(4,6),(6,4),(5,5)]$

$P(A)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

2-اذا كان B ظهور عددين مجموعهما أكبر من 10 .

B=[(5,6),(6,5),(6,6)]

P(B)=$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

3-اذا كان C ظهور عددين مجموعها يساوي 7 .

C=[(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)]

P(C)=$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

تمرين :

وجد في أحد نوادي الرياضة القريبة من الجامعة 50 طالبا من جامعة الدمام ، منهم 20 طالبا من كلية الاقتصاد والادارة و 25 طالبا من كلية الآداب والباقي من الكليات الآخرى . أختير منهم طالبًا عشوائيا أوجد الاحتمالات التالية :

1- احتمال أن يكون الطالب من كلية الاقتصاد والادارة .

2- احتمال أن يكون الطالب من كلية الآداب .

المحاضرة الرابعة – نظرية الاحتمالات

قوانين ديمورغان :

من خواص العمليات الجبرية على المجموعات مايسمى بقوانين ديمورغان والتي تنص على أن

$$(\overline{A \cup B}) = \bar{A} \cap \bar{B}$$

ومنها نستنتج أن :

مثال : إذا كان $P(A \cup B) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(A) = 0.3$

أوجد مايلي :

1. **احتمال حدوث الحالتين معاً ؟**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = 0.7 - 0.5$$
$$= 0.2$$

2. **عدم حدوث أي من الحادثين A ، B ؟**

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$= 1 - P(A \cup B)$$
$$= 1 - 0.5$$
$$= 0.5$$

3. **عدم حدوث الحادث A أو الحداث B ؟**

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B})$$
$$= 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - 0.2$$
$$= 0.8$$

4. **حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B ؟**

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0.3 - 0.2$$
$$= 0.1$$

5. **حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A ؟**

$$P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.4 - 0.2$$

$= \quad 0.2$

6. احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A ، B حادثين منفصلين ؟

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= 0.3 \quad + \quad 0.4$$
$$= \quad 0.7$$

<u>الاحتمال الشرطي :</u>

يعرف الاحتمال الشرطي على انه احتمال وقوع الحادث A مشروطاً بوقوع حادث آخر وليكن B ، ويرمز للاحتمال الشرطي بالرمز $P(\mathrm{A}/B)$ ويعرف كالآتي :

وكذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحادث B مشروطاً بحدوث الحادث A على النحو الآتي :

مثال : وميت قطعه نقد ثلاث مرات ، فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف H وظهور الكتابة بالحرف T . إذا علم أن الوجه الاول في الرمية الاولى H فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H , H ؟

الحل : نلاحظ أن الفضاء العيني يساوي :

S = { (H,H,H) , (H,H,T) , (H,T,H) , (H,T,T) , (T,T,T) , (T,T,H) , (T,H,T) , (T,H,H) }

نفرض أن A يمثل الحادث " ظهور H في الرميه الاولى "

B تمثل الحادث ظهور الوجان H,H في الرميه الثانية و الثالثة

المطلوب : $P(B/A)$ ؟

بالنظر إلى فضاء العينة S فإن

وكذلك

ومن قانون الاحتمال الشرطي ، نحصل على

سؤال : اعتماداً على المثال السابق ، إذا علمت ان الوجه الأول كان T فما احتمال ان يكون الوجهان الآخران H,T ؟

<u>قاعدة الضرب :</u>

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

حيث يطلق على هذه القوانين مايسمى بقوانين الضرب ويستفاد منها في احتساب احتمالات التقاطع إذا علمنا أن الاحداث مشروطة بعضها ببعض .

مثال : إذا كان $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$ وكان $P(A/B) = 0.4$

أ) $P(A \cap B)$

من قاعدة الضرب $P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$

ب) $\boldsymbol{P(B/A)}$

من قانون الاحتمال الشرطي $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$

الحوادث المستقلة :

تعريف : يقال بأن الحادثان B,A حادثان مستقلان إذا كان حصول احدهما لايؤثر على حدوث الاخر

اي ان : $P(A/B) = P(A)$

لاحظ أن حدوث A لا يتأثر بوجود الحادث B ، وكذلك

وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي

نحصل على

مثال : إذا كان B,A حادثين مستقلين وكان $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.6$ .. أوجد :

1. $\boldsymbol{P(A \cap B)}$

2. $\boldsymbol{P(\overline{A \cap B})}$

مثال : إذا كان $P(A/B) = P(A) = 0.6$, $P(B/A) = 0.5$ هل الحادثان A , B مستقلان ؟ وما احتمال الحادث B ؟

الحل : بما أن $P(A/B) = P(A) = 0.6$ فإن A ، B حادثان مستقلان .. ومع ذلك نجد أن $P(B) = P(B/A) = 0.5$

نظرية بيز :

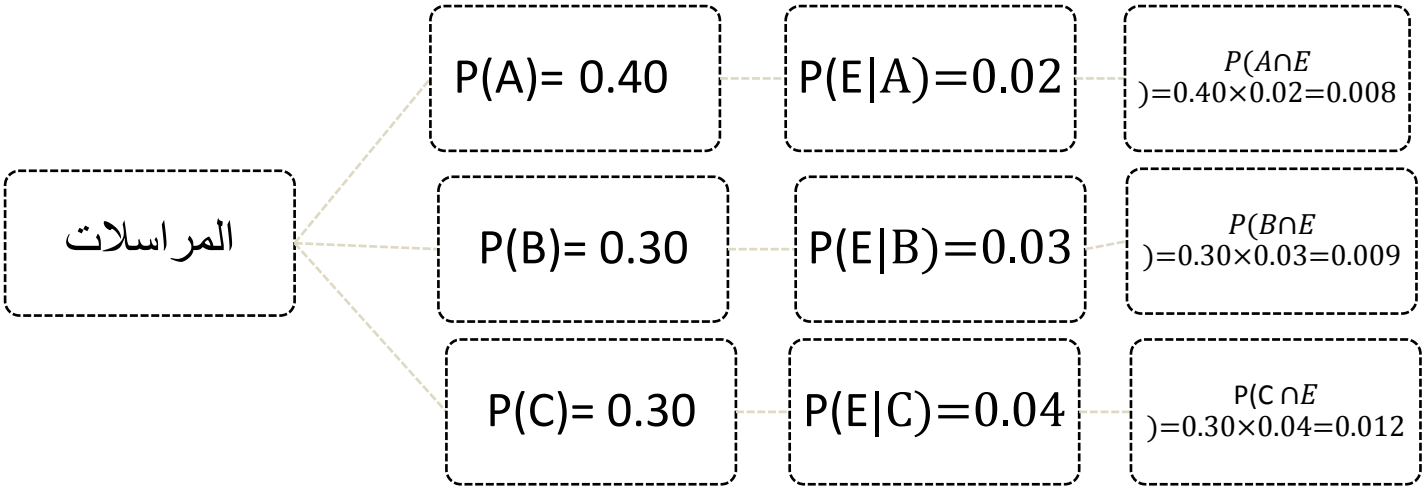
إذا كانت A_1 , A_2 , ... , A_n تقيسماً لفضاء العينة S أي أن $A_i \cap A_j$ لكل $i \neq j$ و $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

وكان $P(\quad_i) > 0$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ وكان E حادث في S بحيث $P(E) > 0$ فإن $P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{k} p(A_i)p(E \mid A_i)}$

مثال : تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما ، فإذا كانت السكرتيرة A تطبع 40% من المراسلات ، وتطبع B 30% الباقيه ، وتطبع C 30% الباقيه ، إذا كان احتمال ان A تخطئ في الطباعه هو 0.02 واحتمال الخطأ في عند B هو 0.03 واحتماله عند C هو 0.04 .. سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ ، اوجدي احتمال ان نكون السكرتيرة B هي التي طبعتها ؟

الحل : إذا كان E هو الحادث ، يوجد خطأ في الورقة المطبوعة .. المطلوب : ايجاد $P(B/E)$

يمكن توضيح المثال السابق بالشكل التالي



تمرين 1 : إذا كان $P(A) = 0.7$ ، $P(B) = 0.8$ ... أوجد مايلي :

1) $P(A \cup B)$ إذا كان A , B حادثين مستقلين ؟

2) $P(A \cup B)$ إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟

3) $P(\overline{A \cap B})$ إذا كان حادثين مستقلين ؟

4) $P(A/B)$ إذا كان A , B حادثين مستقلين ؟

5) $P(B/A)$ إذا كان A , B حادثين منفصلين ؟

تمرين 2 : يوجد في مصنع ثلاث ماكينات تنتج الاولى 450 وحدة يومياً والثانية 350 وحدة يومياً و الثالثة تنتج 200 وحدة يومياً وكانت نسبة المعيب من إنتاج الماكينة الاولى 1% ومن الثانية 2% ومن الثالثة 3% . اختيرت من إنتاج المصنع وحدة عشوائياً فوجدت أنها معيبة فاحسب احتمال أن تكون الوحدة المختارة من الماكينة الثانية .

المحاضرة الخامسة - الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

مقدمة

في كثير من الأحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقط مرة واحدة إما H وإما T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الأعداد من 1 إلى 6 وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة إحصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي إعطاءنا المجال.

- **المتغير العشوائي Random Variable:**

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه، ويرمز له بحرف لاتيني كبير X, Y ، ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير x, y

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات ؟

الحل :

عناصر الفضاء العيني	قيمة X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
THH	2

نلاحظ أن كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع إعادة تنظيم النتائج السابقة على الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X

3	[HHH]
2	[THH , HTH , HHT]
1	[THT , TTH , HTT]
0	[TTT]

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X تسمى فضاء X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث تعبر عنها بدلالة X. ففي المثال السابق تكون الحوادث { X=0 } , { X=2 } , { X=3 }.

مثال: اعتماداً على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين بين عدد H وعدد T ؟

ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H ناقصاً عدد T ؟

الحل :

أ)

الحادث المقابل	**قيمة y**
[TTH , THT , THH , HTH , HHT , HTT]	1
[TTT , HHH]	3

ب)

الحادث المقابل	**قيمة Z**
[TTT]	-3
[HTT , THT , TTH]	-1
[HHT , HTH ,THH]	1
[HHH]	3

- **أنواع المتغيرات العشوائية:**

ينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

1- **المتغير العشوائي المنفصل (Discrete):** وهو المتغير الذي يأخذ قيماً إما محدودة أو لا نهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمة واحداً لواحد مع مجموعة الأعداد الصحيحة. ومن الأمثلة عليه عدد أفراد الأسرة ، عدد المواليد

2- **المتغير العشوائي المتصل (Continuous):** وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما ومن الأمثلة على ذلك: درجة الحرارة، وزن الإنسان

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالاً لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساوياً لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال : في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث X يمثل عدد مرات ظهور الصورة H، أوجد:

1- P{X=3} 2- P{X=2}

الحل :

1- نلاحظ أن X=3 يقابل الحادث HHH وبالتالي $P(X=3) = \frac{1}{8}$

2- في حالة X=2 فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH}

وبالتالي $P(X=2) = \frac{3}{8}$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي :

قيمة X	**P(X=X)**
3	
2	
1	
0	

تمرين : في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموعة العددين الظاهرين، عرف ذل كالمتغير واحتمال كل منهما؟

الجدول السابق يقودنا إلى التعريف التالي:

- **التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution:**

تعريف : كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعاً احتمالياً منفصلاً أو اقتران احتمالي، بحيث يحقق الشرطين التاليين:

1- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.
2- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X تساوي 1.

وإذا عبرنا بالرمز $f(x)$ للاحتمال $P(X=x)$ فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

لجميع قيم x , $f(x) \geq 0$

لجميع قيم x , $\sum f(x) = 1$

مثال : هل تمثل المعادلة $f(x) = \frac{x}{15}; x = 1,2,3,4,5$ لغير ذلك: $f(x) = 0$ توزيعاً احتمالياً منفصلاً؟

الحل : لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X. أما مجموع قيم $f(x)$ فهي:

إذا: f(x) توزيع احتمالي حقق الشرطين الأول والثاني.

يمكن وضع المعادلة على شكل جدول على الصورة:

X	1	2	3	4	5	المجموع

مثال : أوجد قيمة a في الجدول التالي والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً واحسب احتمال X اكبر من 4 واحتمال X أقل من أو تساوي 4؟

x	1	2	3	4	5	6
	a					

الحل : بما أن $\sum f(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{5}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X أكبر من 4:

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي 4:

$$P(X \leq 4) = P(X =$$

المحاضرة السادسة – الاسبوع الرابع
الفصل الثاني : المتغيرات العشوائية و التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :**

تعريف : التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل الذي اقترانه الاحتمالي f (x) هو المقدار التالي :

مثال : اوجد التوقع الرياضي للمتغير X و الذي توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي :

X	f(x)	Xf (x)

3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.2	1.0
6	0.1	0.6
7	0.2	1.4

الحل : من خلال ضرب القيمة x في f(x) كما هو موضح في العمود الثالث و بعملية الجمع نحصل على

مثال : اوجد توقع X اذا كان $f(X) = \frac{x}{15} ; x = 1,2,3,4,5$ ، لغير ذلك $f(x) = 0$

الحل :

μ

$$= \frac{1+4+9+16+25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

- خواص التوقع الرياضي

نظرية (1) : لكل متغير عشوائي X , اذا كان a , b عددين ثابتين فان :

وهذا يعني انه اذا ضرب المتغير العشوائي بعدد ثابت وليكن a , و اضيف له عدداً ثابتاً آخر وليكن b فان التوقع الرياضي يتأثر بنفس الطريقة فيصبح بعد التعديل مساوياً للتوقع الاصلي مضروبا في a و مضافا اليه العدد b .

مثال : اذا كان $E(X) = 6$, اوجد

-1 $E(3X + 5)$

-2 $E(0.5X - 2)$

الحل :

-1 $E(3X + 5) = 3 \times 6 + 5 = 23$

-2 $E(0.5X - 2) = 0.5 \times 6 - 2 = 1$

مثال : اذا كان $E(X) = 10$ وكان $E(ax + 5) = 25$, اوجد قيمة a ؟

الحل :

$E(ax +$

تمرين : اعتماداً على الجدول التالي و الذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

X	f (x)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	A

اوجد :

-1 قيمة المجهول a

-2 المتوقع الرياضي للمتغير العشوائي x

-3 $E(2X + 10)$ ؟

- تباين المتغير العشوائي X

تعريف : اذا كان μ توقع المتغير العشوائي X تباين X و يعبر عنه بالرمز σ^2 بالصيغة التالية :

مثال : جد تباين X اذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي :

f (x)	X

10	
20	
30	
40	

الحل : نجد اولا توقع x كما يلي :

و لحساب التباين ، نجد ان :

$= ($

$= \frac{225+25+25+225}{4} = 125$

اما الجذر التربيعي الموجب للتباين فيسمى الانحراف المعياري و يعبر عنه بالرمز σ حيث نلاحظ ان الانحراف المعياري للمثال السابق هو

- خواص التباين :

اذا كان X متغيرا عشوائيا منفصلا معدله μ وتباينه σ_X^2 وكان لدينا التحويل $Y = aX + b$ حيث b,a ثابتان فان

اما الانحراف المعياري للمتغير Y فهو

مثال : اذا كان للمتغير $\mu_2 = 50, X$, $\sigma_X^2 = 16$ اوجد معدل Y وتباينه و انحرافه المعياري اذا كان $Y = 3X - 4$ ؟

الحل : $\mu_Y = E(3X - 4) = 3\mu_X - 4 = 3 \times 50 - 4 = 146$

$\sigma_Y^2 = 3^2 \times \sigma_X^2 = 9$

$\sigma_Y = \sqrt{144} = 12$

- توزيعات احتمالية خاصة :

هنالك كثير من المتغيرات العشوائية التي شاع استعمال توزيعاتها الاحتمالية بحيث من المفيد دراسة كل منها على حده ، ومن هذه التوزيعات

1- توزيع ذات الحدين Binomial Distribution :

في كثير من التجارب تكون النتيجة احد الامرين اما نجاح او فشل , وتتألف هذه التجارب من تكرار و اعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض , فمثلا في تجربة القاء قطعة نقد فان النتيجة اما ظهور صورة او كتابة و تكون نتيجة أي محاولة مستقلة عن الاخرى وهكذا . ان هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي

تعريف : محاولات بيرنوللي Bernoulli Trials :

كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاولات بيرنوللي :

1- نتيجة كل محاولة احد الأمرين , نسمي "احدها" نجاح و الأخرى "بالفشل"

2- نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي المحاولة الأخرى

3- احتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P وبذلك فان احتمال الفشل هو q = 1-p

ومن الامثلة على هذه التجارب : فحص مجموعة من المصابيح الكهربائية , فحص مجموعة من الطلاب لمعرفة حاجته الى نظارات طبية

تعريف : اذا اجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان x يمثل عدد النجاحات في المحاولات كلها فان :

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p) .

مثال : رميت قطعة نقد متزنة اربع مرات , جد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة ثم اوجد احتمال ظهور الصورة اربع مرات ؟
الحل : ان هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث ان $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$, ومنها

وعند X = 4 ، ينتج ان :

$b\left(4;\right.$

ويمكن حساب احتمال عدم ظهور الصورة (P (X=0 او ظهور الصورة مرة واحدة (P(X=1 وهكذا .

تمرين 1: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات , ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها , ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات ؟
تمرين 2 : في تجربة ذات الحدين , اذا كان $n = 15 , p = 0.1$ اوجد $p(x \leq 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات ؟

- خواص التوقع الرياضي و التباين العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين :
نظرية : اذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذات الحدين b(x; n; p) فان :
1) توقع X هو $\mu = E(X) = np$
2) تباين X هو $\sigma^2 = npq$
مثال : ما هو التوقع الرياضي و التباين لمتغير ذات الحدين اذا كان $n = 60 , p = \frac{2}{3}$
الحل : $\mu = E(X) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

2- توزيع بواسون :
ان التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة تسمى بواسون . و الفترة الزمنية قد تكون دقيقة او يوما او اسبوعا او شهرا او غير ذلك اما المنطقة المحددة فقد تكون صفحة كتاب او مترا مربعا او غير ذلك
وبشكل عام تجربة بواسون تحقق الشروط التالية :
1- معدل النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة او منطقة محددة معلوم وليكن **ʎ**
2- احتمال حدوث نجاح حادث واحد في فترة زمنية قصيرة او منطقة زمنية صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة او مساحة تلك المنطقة .
3- احتمال حدوث نجاحين او اكثر في فترة زمنية قصيرة او منطقة صغيرة مهمل .
4- حدوث النجاحات في أي فترة زمنية مستقل عن حدوث أي نجاحات اخرى في عدة فترات زمنية منفصلة .
تعريف : توزيع بواسون
التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة هو

حيث ʎ هي معدل النجاحات في الفترة الزمنية المعينة او المنطقة المحددة e= 2.718

مثال : تصل المكالمات الهاتفية الى مقسم احد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة في الدقيقتين
ما احتمال وصول كل من الحوادث التالية :
أ) صفر مكالمة في اربع ؟
ب) 4 مكالمات في فترة اربع دقائق ؟

الحل : نفرض ان X = عدد المكالمات في فترة اربع
اذن $\lambda = \frac{1}{2} \times 4 = 2$
ان X يتبع توزيع بواسون الذي معدله ʎ = 2 وينتج ان

أ) عدم وصول أي مكالمة في اربع دقائق هو :

ب) وصول اربع مكالمتا في اربع دقائق هو :

تمرين : معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الاسبوع الواحد . ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين ، ما احتمال حادثين او اقل في اسبوع معين ؟

- **خواص التوقع الرياضي و التباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون :**

نظرية : اذا كان X متغير بواسون العشوائي الذي توزيعه الاحتمالي P(x;ʎ) حيث ʎ معدل عدد الحوادث في فترة زمنية معينة فان توقع X هو E(X) = ʎ وتباين X هو $\sigma = \frac{2}{X} = \lambda$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون اذا كان25 =ʎ ؟

الحل : $E(X) = 25 , \sigma_X = 5$ .. لاحظ ان الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .

المحاضرة السابعة – الأسبوع الرابع ..

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

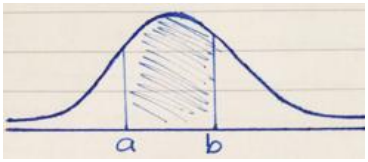
تعريف: إذا كان X متغير عشوائي متصل وكان f(x) اقتران حقيقي يتحقق الشرطان التاليين:

1- $f(x) \geq 0 , -\infty < X < \infty$

2- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

(عن المساحة تحت منحنى f(x) وفوق محور السينات = 1 فإن f(x) تسمى الكثافة الاحتمالية أي التوزيع الاحتمالي المتصل للمتغير X.

ويكون احتمال وقوع X بين قيمتين a = x , b = x يساوي المساحة تحت منحنى f(x) وفوق المحور الأفقي والمحصور بين a , b والشكل التالي يوضح ذلك



أي أن:

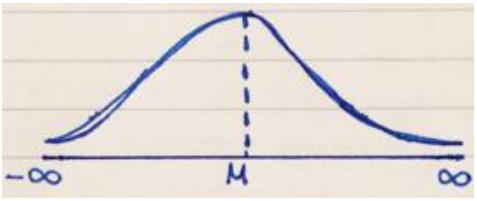
$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx$

ومن أنواع التوزيعات الاحتمالية المتصلة التي سنتعرف عليها في هذا الفصل:

1- التوزيع الطبيعي (The normal Distribution): ويعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة حيث يوصل التوزيع الطبيعي من خلال معادلة رياضية تحدد منحناه وتعين تماماً وبمعرفة كل من المعدل μ والتباين س^2 والتي يمكن كتابتها على الصورة التالية:

حيث μ: معدل التوزيع ، س^2: التباين ، $e \approx 2.718$ ، π=3.14 ، واحتمال الحادث X هو الذي يقع بين النقطتين a ، b هو:

وسنعبر عن المتغير العشوائي X والذي يخضع للتوزيع الطبيعي الذي معدله μ وتباينه س^2 بالرمز (س ^{2} X:N (M,



*** خواص التوزيع الطبيعي:**

1- مماثل حول العمود المقام على الوسط الحسابي M بحيث يشبه شكله شكل الجرس.

2- له قيمة واحدة، وبذلك له منوال واحد ينطبق على الوسط الحسابي M.

3- تقارب طرفا منحنى التوزيع الطبيعي من الصفر عندا $X \to -\infty$ ، $X \to \infty$.

4- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي 1.

2- التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution): هو التوزيع الطبيعي الذي معدله (وسد الحسابي) يساوي صفر وتباينه يساوي 1، وسنعبر عن التوزيع بالرمز Z: N (0, 1).

نظرية: إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هو التوزيع الطبيعي ذو المعدل μ والتباين $س^2$ فإن توزيه المتغير العشوائي:

$Z = \frac{X-M}{س}$ هو التوزيع الطبيعي المعياري.

كل قيمة من X تقابلها قيمة من قيم Z حسب التحويل السابق وتسمى قيم Z القيم المعيارية المقابلة لقيم X.

مثال: إذا كان X: N (70,25) ، أوجد القيم المعيارية المقابلة لكل من القيم التالية:

1- $X_1 = 62$

2- $X_2 = 13$

الحل: لتحويل قيم X إلى قيم Z ، نستخدم التحويل التالي: $Z = \frac{X-M}{س}$ (س= ..... المعياري)

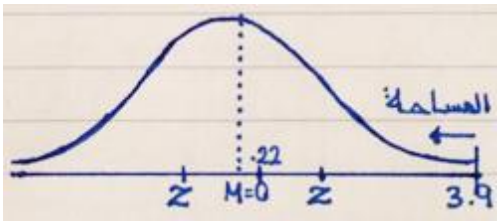
1- $Z_1 = \frac{65-70}{5} = \frac{-5}{5} = -1$

2- $Z_2 = \frac{13-7-}{5} = \frac{-57}{5}$

*** المساحات تحت التوزيع الطبيعي:** نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد المساحة المحصورة بين متغيرين عشوائيين حيث تعطى هذه الجداول المساحة إلى يسار ثم Z بشكل عام موجبة كانت أم سالبة بمعنى $P(Z \leq z)$.

لاحظ أن العامود الايسر في الجدول يعطي قيم z ، ذات خانة عشرية واحدة والصف العلوي يعطي الخانة العشرية الثانية وتقاطع الصف مع العامود يعطي المساحة المطلوبة .

المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري :



(قيم Z موجبة) > نستخدم القيم الإحصائية لقيم Z الموجبة

(قيم Z سالبة) > نستخدم الجداول الإحصائية لقيم Z السالبة

[داخل جسم الجدول هي عبارة عن المساحات التي تقع على يسار قيمة معينة]

أمثلة على المساحة التي تقع على يسار قيم معيارية مختلفة:

Z 3.4	= 1
Z 0.52	= 0.6982
Z 3.48	=0.0003
Z 0.11	0.4562

هي عبارة عن المساحات على يسار قيمة معيارية معينة ←

القيمة المعيارية Z المقابلة لقيمة X المختلفة ←

المحاضرة التاسعة

الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

المتغير العشوائي Z والذي يقابل المتغير العشوائي X حيث ينتمي هنا المتغير Z الذي توزيعه الطبيعي المعياري الذي وسطه العدد 0 وتباينه العدد 1	المتغير العشوائي X ينتمي الى التوزيع الطبيعي الذي معدلة μ وتباينه σ^2

وهنالك صيغة تحويل يتم من خلالها إيجار قيمة Z المقابلة لقيم X المختلفة والتي تعطي على الشكل التالي :

μ = الوسط الحسابي للتوزيع الاصلي / σ = الانحراف المعياري للتوزيع الاصلي / X = قيمة المتغير العشوائي

مثال

إذا كان لدينا التوزيع الطبيعي المعياري $Z; N(0, 1)$ ، أوجد مايلي :

1) $P(Z < 1)$
2) $P(Z < -1.96)$
3) $P(Z > 2.57)$
4) $P(-1.23 < Z < -0.68)$

الحل :

z	0.00	0.01	0.02
1.0	0.8413	0.8438	0.8461
1.1	0.8643	0.8665	0.8686

1- $P(Z < 1)$= 0.8413

نستخرج هذه القيمة من الجدول مباشرة (لان الجدول دائماً تعطينا المساحات التي تقع على يسار قيمة معيارية معينة)

z	0.09	0.08	0.07	0.06
−1.9	0.0233	0.0239	0.0244	0.0250
−1.8	0.0294	0.0301	0.0307	0.0314
−1.7	0.0367	0.0375	0.0384	0.0392
−1.6	0.0455	0.0465	0.0475	0.0485
−1.5	0.0559	0.0571	0.0582	0.0594

2- $P(Z < -1.96)$=0.0250
مباشرة من الجدول

3- $P(Z > 2.57)$
سيتم تحويلها لان يتجه لليسار فإن راح نقول

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962

1-$P(Z < 2.57)$ = 1- 0.9949 = 0.0051

4- $P(-1.23 < Z < -0.68)$ = P (Z< - 0.68) – P (Z< - 1.23) = 0.248 – 0.1093 = 0.139
نطرح الاكبر من الاصغر

z	0.09	0.08	0.07	0.06	0.05	0.04	0.03
−1.4	0.0681	0.0694	0.0708	0.0721	0.0735	0.0749	0.0764
−1.3	0.0823	0.0838	0.0853	0.0869	0.0885	0.0901	0.0918
−1.2	0.0985	0.1003	0.1020	0.1038	0.1056	0.1075	0.1093
−1.1	0.1170	0.1190	0.1210	0.1230	0.1251	0.1271	0.1292
−1.0	0.1379	0.1401	0.1423	0.1446	0.1469	0.1492	0.1515
−0.9	0.1611	0.1635	0.1660	0.1685	0.1711	0.1736	0.1762
−0.8	0.1867	0.1894	0.1922	0.1949	0.1977	0.2005	0.2033
−0.7	0.2148	0.2177	0.2206	0.2236	0.2266	0.2296	0.2327
−0.6	0.2451	0.2483	0.2514	0.2546	0.2578	0.2611	0.2643
−0.5	0.2776	0.2810	0.2843	0.2877	0.2912	0.2946	0.2981

أوجد X;N(65,36)الطبيعي التوزيع لدينا كان إذا :

1) P (X > 55)
2) P (X < 68)
3) P (50 < X< 70)

الحل : لابد من عملية تحويل قيم المتغير العشوائي X والتي تنتمي الى المعطى الى قيم معيارية مقابلةZ
ولإيجاد المساحات المطلوبة

1) P (X > 55)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{55 -}{6}$$
$$\sigma^2 = 36 , \sqrt{\sigma} = \sqrt{3}$$

P (X > 55) = P (Z > - 1.67)

نفس المثال اللي قبل راح نقلبها

= 1- P (Z < - 1.67) = 1 – 0.0475 = 0.9525

من الجدول

2) P (X < 68)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{68 -}{6}$$

P (X < 68) = P (Z < 0.5) = 0.6915

من الجدول

3) P (50 < X< 70)

$$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{50 -}{6}$$
$$Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{70 -}{6}$$

P (50 < X< 70) = P (-2.5 < Z< 0.83)

P (Z < 0.83) – P (Z < - 2.5)

= 0.7967 – 0.0062 = 0.7905

تطبيقات على التوزيع الطبيعي-:

مثال-:

تخضع اوزان عبوات احدى انواع الحلويات لتوزيع طبيعي وسطه الحسابي وسطه الحسابي 85 غم وانحرافه يساوي 2.5 غم:

أ) ماهو احتمال ان وزن احدى العبوات والتي اخذت بشكل عشوائي تزيد عن 90 غم

ب) ماهو احتمال ان وزن احدى العبوات والتي اخذت بشكل عشوائي تقل عن 82 غم

المطلوب(2.5^2, 85) N ; X -:

A) P (X> 90)
B) P (X< 82)

الحل : لابد من ان احول القيم كما في المثال السابق:

A) P (X> 90)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{90 -}{2.5}$$

P (X > 90) = P (Z > 2)
= 1 – 0.9772 = 0.0228

B) P (X< 82)

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{82 -}{2.5}$$

P (X< 82) = P (Z< -1.2)
= 0.1151

مثال:
تخضع تكاليف الولادة الطبيعية في مستشفيات بلد ما لتوزيع طبيعي وسطه 115 دولار وتباينه 49 دولار ، ما احتمال ان تكون تكاليف احدى الولادات الطبيعية في هذا البلد بين العددين 104 دولار و 122 دولار ؟
المعطى : X;N (115, 49)
المطلوب : P (104 < X < 122)

الحل:

P (X < 122) – P (X < 104)

$$Z_1 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{122 - 115}{7} = 1 \text{ , } Z_2 = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{104 - 115}{7} = -1.57$$

P (Z < 1) – P (Z < -1.57)
0.8413 – 0.0582 = 0.7831

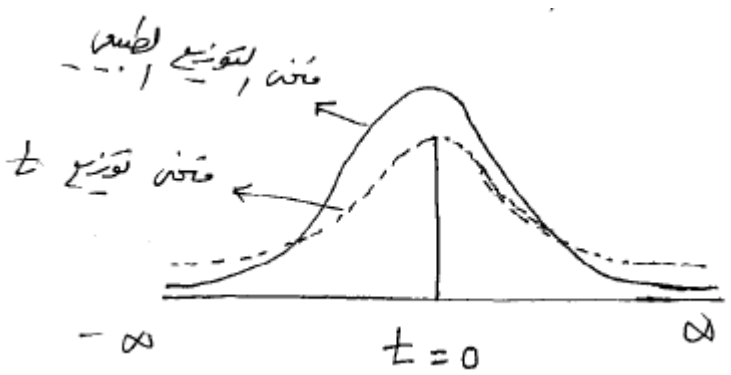
المحاضرة العاشرة – الأسبوع السادس
الفصل الثالث : التوزيعات الاحتمالية المتصلة

2. توزيع t :
ان احد التوزيعات الاحتمالية المتصلة الهامة لمتغير عشوائي متصل هو توزيع t .
تعريف : اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي t
معطى بالمعادلة :

فان هذا التوزيع يسمى توزيع t حيث v درجات الحرية و c ثابت يعتمد على v ليجعل المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .

خواص منحنى توزيع t :
1- يشبه منحنى توزيع t شكل الجرس , وهو احادي المنوال له قيمه تقابل t=0 , بحيث يتماثل منحنى الشكل حول العمود المقام على t
2- شكله يشبه شكل التوزيع الطبيعي المعياري ألا انه اكثر انخفاضاً منه , بالاضافه الى ان تقارب طرفيه من الصفر عندما $t \to \infty, t \to -\infty$ ابطأ من تقارب منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

و الشكل التالي يوضح منحنى التوزيع الطبيعي مع منحنى توزيع t :



ملاحظة : يعتمد منحنى توزيع t على معلمة هامة تحدد شكل ذلك المنحنى وهي درجات الحرية فعندما تزداد درجات الحرية يقترب منحنى توزيع t من التوزيع الطبيعي المعياري .

حساب الاحتمالات تحت توزيع t :

تحسب الاحتمالات تحت توزيع t من خلال حساب المساحات المختلفة التي تقع على يسار قيم t بدرجات حرية مختلفة , ويوجد جداول خاصة لهذه المساحات ويكون استعمال هذه الجداول كالتالي :

1- تسجل درجات الحرية v في العمود الايسر , وعلى الخط الأفقي تسجل مساحات معينة

2- ان جدول t يعطي قيم $t[\sqrt{};v]$ القريبة من 1 , لهذا عندما تكون $\sqrt{}$ صغيرة مثل 0.05 , 0.01 وغريها , فأننا نستعمل القاعدة $t[\sqrt{};v] = -t[1-\sqrt{};v]$ وذلك بسبب تماثل توزيع t حول العمود المقام على الصفر .

مثال : المتغير العشوائي t يتبع لتوزيع t بدرجات حرية 4 , اوجد

1) المساحة الواقعة على يسار 1.532 ؟

$t[\sqrt{};4] = 1.531$

من جدول توزيع مباشرة نجد ان $\sqrt{} = 0.90$

2) ما هي قيمة t التي يقع الى يسارها المساحة 0.01 ؟

$t[0.01;4] = \quad ??$

$= -3.747$

3) قيمة $\sqrt{}$ بحيث $t[\sqrt{};] = -2.776$ ؟

من الجدول مباشرة , نجد ان قيمة المساحة التي تحقق الشرط

$t[\sqrt{};4] = 2.776$

هي $\sqrt{} = 0.975$

وبسبب وجود اشارة السالب ، لابد ان اخذ المتممة من العدد 1 ، وبذلك فان قيمة $\sqrt{}$ التي تحقق الشرط

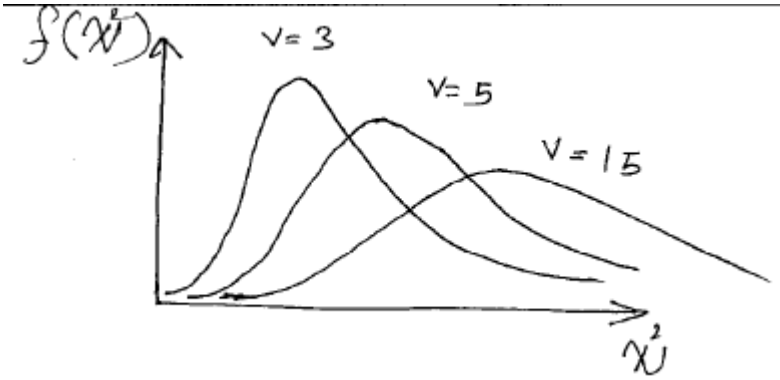
$[\sqrt{};4] = -2.776$

هي $\sqrt{} = 1 - 0.975 = 0.025$

3. توزيع كاي تربيع :

تعريف : اذا كان توزيع الكثافة الاحتمالي للمتغير العشوائي x^2 معطى بالمعادلة :

فان هذا التوزيع يسمى توزيع كاي تربيع بدرجات حرية v حيث تعتمد c على v وتحدد تكون المساحة تحت المنحنى تساوي 1 .



لإيجاد المساحات تحت منحنى كاي تربيع أر ايجاد القيم التي تقع الى يسارها او الى يمينها مساحة معينة , سنستخدم جدول كاي تربيع حيث يسجل عدد درجات الحرية في العمود الأيسر , وتسجل المساحات التي تقع تاى يسار قيمة x^2 على الخط الافقي وتسجل قيم x^2 داخل جسم الجدول .

مثال : اذا كان المتغير العشوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي تربيع على درجات حرية 10 , اوجد :-

أ) قيمة ^{2} التي يكون على يسارها 0.99 من المساحة .

$$x^2\ [0.99\ ;\ 10] \qquad = ??$$

من الجدول مباشرة : $x^2 = 23.209$

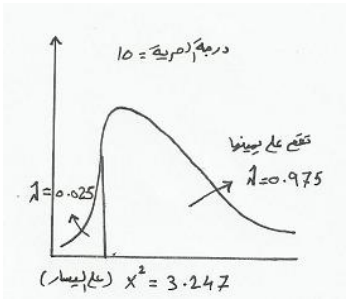
ب) قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة .

قيمة x^2 التي يكون الى يمينها 0.01 من المساحة

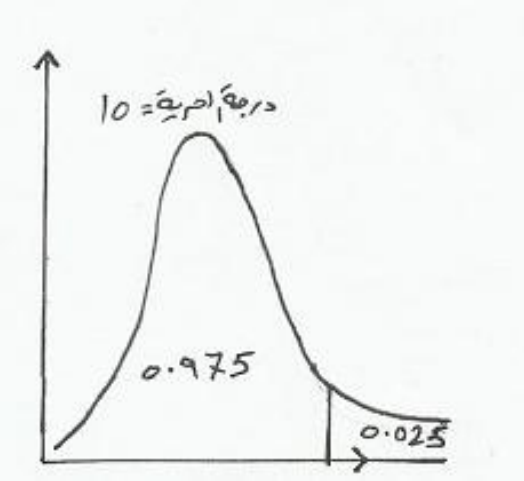
لاحظوا ان المساحة التي تقع على يمين $\sqrt{\ } = 0.01$ هي المساحة التي تقع على يسار $\sqrt{\ } = 0.99$, وبذالك فان قيمة $x^2 = 23.209$

ت) قيمة x^2 التي يكون الى يسارها 0.975 و القيمة التي يكون الى يسارها 0.025 من المساحة ؟

المساحة اليمين $x^2[0.025\ ;\ 10] = x^2[0.975\ ;\ 10]$ المساحة من اليسار



$$x^2[0.025\ ;\ 10] = x^2[0.975\ ;\ 10] = 3.247$$



ملاحظة : نعبر عن قيمة المتغير العشوائي x^2 التي يقع على يسارها المساحة $\sqrt{}$ بدرجة حرية v تحت منحنى توزيع x^2 بالرمز

تمرين : اذا كان المتغير العشوائي x^2 يخضع لتوزيع كاي بدرجة حرية v = 15 اوجد :

1) **قيمة ^{2} التي تقع 0.99 من المساحة على يسارها ؟**
2) **قيمة ^{2} التي تقع 0.01 من المساحة على يمينها ؟**

المحاضرة الحادية عشر

الفصل الثالث: التوزيعات الاحتمالية المتصلة

4- توزيع F: (The F-Distribution)

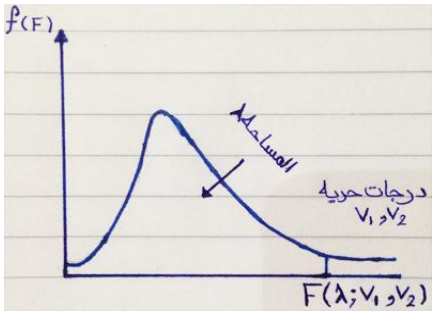
يعتبر توزيع F من التوزيعات الاحتمالية الهامة والتي تستعمل في اختبار الفرضيات (موضوع الباب السادس).

تعريف: إذا كان توزيع الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي F

$$f(F) = \frac{cF^{(v_1-2)/2}}{(v_2+v_1F)^{(v_1+v_2)/2}} \quad , \; F > 0$$

فإن هذا التوزيع يسمى توزيع F ويعبر عنه بالرمز $F(V_1 , V_2)$ حيث أن V_1 , V_2هي درجات الحرية و C هي ثابت يعتمد على V_1 , V_2 ويعين بحيث تصبح المساحة أسفل منحنى التوزيع تساوي 1.

يوجد لدينا في هذا التوزيع عدوان من الدرجة الحرية، وبما أن V_2 يظهر في المقام فقط فإنه يعتبر درجات الحرية، ويعتبر V_1 درجات حرية البسط ويظهر V_1 قبل V_2 في الرموز $F(V_1 , V_2)$.



خواص منحنى توزيع F: منحنى توزيع F أحادي المنوال ملتوٍ قليلاً إلى اليمين، وكلما زادت درجات الحرية V_1 , V_2 يقترب منحنى توزيع F من منحنى التوزيع الطبيعي وهو موجب لجميع قيم F بين الصفر واللانهاية.

مثال: أوجدي ما يلي:

1- F(0.95 ; 9.7)← معدل (3.64 , 3.73)

←F = 3.68

2- F(0.99 ; 9.7)← معدل (6.62 , 6.84)

←F = 6.73

وفي حال إيجاد قيم F إذا كانت المساحة على يسارها وقيم غير موجودة في الجدول (بمعنى قيم صغيرة) مثل F(0.05 ; V_1 , V_2) أو F(0.01 ; V_1 , V_2) ، ففي هذه الحالة تستخدم الصيغة التالية: $F(\lambda; V_1, V_2) = \frac{1}{F(1-\lambda; V_2, V_1)}$

مثال: أوجدي قيمة ما يلي:

1- F(0.05 ; 10 , 7) = $\frac{1}{F(1-0.05;7,10)} = \frac{1}{F(0.95;7,10)} = \frac{1}{3.14}$

2- F(0.01 ; 1 , 15) = $\frac{1}{F(0.99;15,1)} = \frac{1}{\frac{6056+6209}{2}}$

تمرين: أوجد المساحة إلى يسار F=3 إذا كانت $V_1 = 7$ ، $V_2 = 20$ ؟

أوجد المساحة λ بحيث F(λ ; 5 , 5)

{.. نهاية الباب الثالث..}

تجميع : سرّو..