المحاضرة الثانية عشر

الفصل الرابع: توزيعات المعاينة

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$:

نظرية (١): إذا كان X يخضع للتوزيع وسطه (معدله) M وتباينه س٢ وكان $\overline{X}$ يمثل الوسط الحسابي للعينة ذات الحجم n والمحسوبة من هذا المجتمع فإن:

١- توزيع$\overline{X}$ هو: $M_{\overline{X}} = M$

٢- تباين $\overline{X}$ هو: $\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n}$

شرطه أن السحب مع الارجاع.

مثال: سحبت عينة عشوائية من مجتمع لا نهائي معدله ٧٠ وتباينه ٤٠. إذا كان حجم العينة ١٠، فأوجد:

١- الوسط الحسابي للعينة.

$$M_{\overline{X}} = M = 70$$

٢- تباين العينة.

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

٣- الانحراف المعياري للعينة.

$$\sigma^2_{\overline{X}} = \sqrt{4} = 2$$

توزيع المعاينة للوسط الحسابي $\overline{X}$ عند المعاينة من مجتمع طبيعي:

نظرية (٢): إذا كان $X_1, X_2, ..., X_n$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي وسطه (معدله) M وتباينه س٢ فإن توزيع $\overline{X}$ يكون التوزيع الطبيعي ذا الوسط M والتباين $\frac{\sigma^2}{n}$ حيث أن المتغير العشوائي $Z = \frac{\overline{X}-M}{\sigma/\sqrt{n}}$

يخضع لتوزيع طبيعي معياري.

مثال: تخضع علامات الطلاب في أحد المقررات لتوزيع طبيعي وسطه ٦٥ وانحراف معياري ١٨. اخذت عينة عشوائية حجمها ٣٦ طالب، احسب:

١- احتمال أن يزيد وسط علامات العينة على ٧٤؟

$$P(\overline{X} > 74) = P(Z > \frac{\overline{X}-M}{\sigma/\sqrt{n}}) = P(Z > \frac{74-65}{18/\sqrt{36}})$$
$$= P(Z > 3)$$
$$= 1 - P(Z < 3)$$
$$= 1 - 0.9987$$
$$= 0.0013$$

٢- احتمال أن يقل وسط علامات العينة على ٦٠؟

$$P(\overline{X} < 60) = O(Z < \frac{\overline{X}-M}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}})$$
$$= P(Z < \frac{60-65}{18/\sqrt{36}})$$
$$= P(Z < -1.67)$$
$$= 0.0475$$

نظرية (٣): المعاينة من مجتمع طبيعي وسطه M وتباينه س٢ غير معلوم.

إذا اخذت عينة عشوائية من توزيع طبيعي وسطه M وتباينه س٢ غير وعلوم بحيث كان $\overline{M}$ (الوسط الحسابي للعينة) لعينة حجمها n وانحرافها المعياري s فإن المتغير: $T = \frac{\overline{X}-M}{s/\sqrt{n}}$

يخضع لتوزيع t بدرجات حرية v = n – 1

مثال: إذا كانت أطوال الطلاب في أحد الصفوف المدرسية تتبع التوزيع الطبيعي المتوسط يساوي ١٦٠سم، إذا سحبت عينة عشوائية من ٤ طلاب فما احتمال أن يقل متوسطها الحسابي عن ١٦٦سم، إذا علمت أن الانحراف المعياري للعينة يساوي ١٠سم؟

الحل: $P(\overline{X} < 166)$?

$$T = \frac{\overline{X}-M}{s/\sqrt{n}} = \frac{166-160}{10/\sqrt{4}} = \frac{6}{5} = 1.2$$

$$P(t[\lambda,3]=1.2) = 0.90$$

نظرية (٤): توزيع المعاينة للفرق بين وسطي عينين $(\overline{X}-\overline{Y})$:

إذا اخذت عينة عشوائية حجمها n_1 من مجتمع طبيعي معدله M_1 وتباينه س٢، ثم اخذت عينة عشوائية اخرى حجمها n_2 من مجتمع طبيعي معدله M_2 وتباينه س٢ بحيث كان مستقل عن المجتمع الأول، ورمزنا للوسط الحسابي للعينة الأولى بالرمز $\overline{X}$ والوسط الحسابي للعينة الثانية $\overline{Y}$ فإن توزيع الفرق وسطي العينة بين $(\overline{X}-\overline{Y})$ يكون التوزيع الطبيعي ذا معدل $(M_1 - M_2)$ والتباين $\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$ بحيث:

$$Z = \frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري

مثال: تخضع علامات الناجحين من امتحان الدراسة الثانوية العامة في احدى المدارس (أ) لتوزيع طبيعي معدله ٧٠ وانحرافه المعياري ١٢، وفي مدرسة ثانية (ب) تخضه العلامات للتوزيع الطبيعي معدله ٧٤ وانحرافه المعياري ١٦، اخذت عينة عشوائية حجمها ١٦ من المدرسة (أ) وعينة عشوائية اخرى حجمها ٩ من المدرسة (ب)، على فرض أن الوسط الحسابي للعينة الأولى $\overline{X}$، وللعينة الثانية $\overline{Y}$، أوجد:

أ- $P(\overline{Y}-\overline{X}) > 8$ ؟احتمال الفرق بين وسطين عينين

ب- $P(\overline{X}-\overline{Y}) < 3$ ؟

الحل: أ-

$$P[\frac{Z=(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > \frac{8-(74-70)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}]$$

$$P(Z > \frac{8-4}{\sqrt{9-26.4}}) = P(Z > 0.65)$$

$$= 1 - P(z < 0.65)$$

$$= 1 - 0.7422$$

$$= 0.2578$$

ب- $P[\frac{Z=(\overline{Y}-\overline{X})-(M_1-M_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} < \frac{3-(70-74)}{\sqrt{\frac{(12)^2}{16}+\frac{(16)^2}{9}}}$

$$P\left(Z < \frac{3-(-4)}{\sqrt{9+28.4}}\right) = P(Z < \frac{7}{\sqrt{37.4}})$$

$$= P(Z < 1.14)$$

$$= 0.8729$$

تمرين ومسائل:

سؤال (١): إذا كان لدينا المتغير العشوائي X والذي يتبع التوزيع الطبيعي ذا المعدل ٢٥ والتباين ٣٦، أجب عن الاسئلة التالية:

a. أوجد القيمة المعيارية المقابلة للعدد X=10 ؟

b. اذا تم سحب عينه حجمها ١٦ من ذلك التوزيع ، اوجد القيمة المعياريه المقابله للعدد $\overline{X} = 10$ ؟

c. أوجد الانحراف المعياري للعينة إذا علمت أن n=16 ؟

سؤال (٢) : اذا كان لدينا x : n (15 , 25) ، سحبت منه عينة حجمها 10 ، اوجد $p(\overline{X} < 10)$ ؟

سؤال (٣)إذا كان لدينا التوزيع الطبيعي X;N (10,25) والتوزيع الآخر Y;N (15,36)، ومستقل عن الاول ، سحبت عينة من المجتمع الأول حجمها ١٦، وسحبت عينة من المجتمع الآخر حجمها ٢٥، أوجد احتمال الفرق بين $(\overline{Y}-\overline{X})$ يقل عن العدد ٣ ؟

المطلوب: $[P\ (\overline{Y}-\overline{X}) < 3]$