جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر

مبادئ الرياضيات

QM.0606-105

استاذ المقرر

د/ أحمد محمد فرحان

المحاضرة (1)

المجموعات والاقترانات

تعريف المجموعة :-

يمكن **تعريف المجموعة** على أنها عدد من العناصر بينها صفات مشتركة تكتب بين حاصرتين { } و تسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة ..... , C , B , A

و من الأمثلة على المجموعات {.....,1,3,5,7,9} =A

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c , ...

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز ϵ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة

$$a \epsilon A$$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { 1,5,10,15}

B= { a , b ,c , d }

C= { 1 , 2 , 3 .....}

(و هي مجموعة منتظمة تسير بنفس الشكل1 2 3 4وهكذا)

A = { 1, 2 , 3,....,100}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

تابع : طريقة كتابة المجموعات :

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

$A = \{ x : x \text{ عدد زوجي} \}$

$B = \{ x : x \text{ طالب بمقرر الاحصاء في الادارة} \}$

$C = \{ x : x \text{ طالب بنظام التعليم عن بعد} \}$

$D = \{ x : -3 \leq x \leq 1 \text{ عدد صحيح } x \}$

$X = \{ x : 0 \leq x \leq 12 \text{ عدد صحيح } x \}$

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ
(فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : x عدد طبيعي زوجي و فردي }

B = { x : x دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية }

تابع أنواع المجموعات :-

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$

$B = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots , 100 \}$

$C = \{ x , y , s, t\ u \}$

تابع أنواع المجموعات :-

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (وهي المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { x : عدد طبيعي فردي }

B = { 10, 20 , 30 ,..... }

تابع أنواع المجموعات :-

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

تابع أنواع المجموعات :-

أمثلة :-

1- إذا كانت { 2 , 4 , 6} = A و {1,2,3,4,5,6,7,8 } = B فإن A $\subset$ B.

2- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تابع أنواع المجموعات :-

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \quad \gg\gg\gg\gg\gg \quad A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

تابع أنواع المجموعات :-

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {1, 5, 7 , 9 } , B = {9 , 7 ,5 ,1 }

2- A= { 2 ,5 ,9 } , B = { a , s , d }

الحل

1 – A = B

2 – A ≡ B

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B (A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان {A = { 1 , 2 , 3 , 5 , 7 و {B= { 2 , 4 , 6 , 8 أوجد (AUB) ؟

الحل

(AUB) = {1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8}

تابع العمليات على المجموعات :-

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B (A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان $A = \{ -1 , 0 , 1 , 2 , 3\}$ و $B = \{0,2,4,6,\}$ أوجد $A \cap B$

الحل

$$(A \cap B) = \{0 , 2 \}$$

تابع العمليات على المجموعات :-

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A={2,4,6,8,10}
أوجد

الحل

$$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$$

تابع العمليات على المجموعات :-

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت $A=\{1,2,3,x,y\}$ و $B=\{3,4,5,x,w\}$ أوجد A-B

الحل

$A-B = \{ 1 , 2 , y \}$

تابع : العمليات على المجموعات :-

1- A∪B

2- A ∩ B

3- B – A

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

مثال :-

إذا كانت

A={1,2,3,x,y} و

B={3,4,5,x,w}

و المجموعة الكلية

U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}

فأوجد :-

تابع : العمليات على المجموعات :-

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$

2- $A \cap B = \{3, X\}$

3- $B - A = \{4, 5, w\}$

4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$

5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$

8- $\overline{A} \cup A = U$

9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

مجموعات الاعداد :-

1- مجموعة الاعداد الطبيعية :و هي تحتوى على الاعداد الصحيحة الموجبة N = {1,2,3,4,.....}

2- مجموعة الاعداد الصحيحة: وهى مجموعة الاعداد الموجبة و السالبة بالإضافة الى الصفر I = { ..... ,

3- مجموعة الاعداد النسبية : و العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على صورة $\frac{a}{b}$ و تحتوي مجموعة الاعداد الصحيحة بالإضافة الى الكسور مثل $\frac{9}{1}$, $\frac{2}{3}$.

4- مجموعة الاعداد غير النسبية : و هي الاعداد التي لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{a}{b}$ مثل جذور الاعداد التي ليست مربع كامل $\sqrt{6}$.

5- مجموعة الاعداد الحقيقية : وهي تحتوى على الاعداد النسبية و غير النسبية و يرمز لها بالرمز **R** و تمثل بخط الاعداد و الذي يمتد من $-\infty$ إلى ∞ و منتصفه الصفر

الفترة :-

و الفترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية و هي الاعداد التي تمتد من النقطة a إلى النقطة b و تكتب حسب نوعها كالآتي :-

1- الفترة المفتوحة : $(a , b) : \{ x \in R : a < x < b \}$

2-الفترة نصف المغلقة (نصف المفتوحة) :

$[a , b) : \{ x \in R : a \leq x < b \}$

3-الفترة المغلقة : $[a , b] : \{ x \in R : a \leq x \leq b \}$

تابع الفترة :-

مثال :-

اذا كانت الفترات B = [1 , 4] و A = [-2 , 3) فاحسب ما يلي :

1- A ∩ B

2- A ∪ B

3- A – B

4 – B - A

الحل :-

1- A ∩ B = [1 , 3)

2- A ∪ B = [-2, 4]

3- A – B = [-2 , 1)

4 – B - A = [3 , 4]

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل

P(s) = { {a} , {b} , {c} ,{a,b} , {a,c} , {b,c} ,{a,b,c} ,Ø }

تابع : مجموعة المجموعات :-

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

P(S) = { {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} ,{b,c} ,{a,b,c} , Ø }

$2^3 = 8$

تمارين :-

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عدد سالب و موجب x }

(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }

(c) C = {x: دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية x }

(d) D = { 2 , 4 , 6 , ……..,100}

(e) E = { 100 , 200 , 300 ,…….}

(f) F = { w , e , r , t }

تمارين :-

2- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

3- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

تابع التمارين :-

4- اذا كانت U= {0 , 1, 2, 3,.....,10} وكانت C = { 6, 7,8, 9,10} ، B = { 1 , 2 ,3 ,4 ,5 } ، A = { 2, 4 ,6 ,8 ,10}
فجد ما يلي:-

1- $A \cup B$

2- $A \cap C$

3- $\overline{A} \cap \overline{B}$

4- $B \cup C$

5- $A \cap \overline{C}$

6- $A - (B \cap C)$

7- $(\overline{A} \cup B) - C$

8- $\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})}$

تابع التمارين :-

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$

2- $A \cap C = \{6, 8, 10\}$

3- $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{0, 7, 9\}$

4- $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

5- $A \cap \overline{C} = A - C = \{2, 4\}$

6- $A - (B \cap C) = B \cap C = \emptyset$

$A - (B \cap C) = A - (\emptyset) = A$

تابع التمارين :-

7- $(\bar{A} \cup B) - C$

$\bar{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$

$\bar{A} \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$(\bar{A} \cup B) - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

8- $(\overline{\bar{B} \cap \bar{C}}) = \overline{(B \cup C)} = B \cup C$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

تمارين :-

5- إذا كانت

A={8,10,12,r,m} و
B={4,6,10,o,r}

أوجد المجموعة الكلية

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- $B - A$

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

تمارين :-

6- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {2 , 5 , 8} ؟

7- إذا احتوت المجموعة S على 5 من العناصر ، فأوجد عدد عناصر P(S) ؟

تمت بحمد الله

جامعة الملك فيصل

عمادة التعلم الإلكتروني والتعليم عن بعد

اسم المقرر

مبادئ الرياضيات

QM.0606-105

استاذ المقرر

د/ أحمد محمد فرحان

المحاضرة (2)

المجموعات والاقترانات

ثانياً : الاقترانات (الدوال) Functions :-

1- إقتران كثير الحدود : ويكون على الصورة :-

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + a_1 x + a$$

و تكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران .

مثال :-

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x - 4$

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$

تابع المثال :-

1- $f(x) = 3$

الدرجة الصفرية و يسمى أيضاً اقتران ثابت .

2- $f(x) = 3x - 4$

الدرجة الأولى ويسمى اقتران خطي .

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

الدرجة الثانية أو اقتران تربيعي .

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

الدرجة السابعة .

5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$

الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبي .

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

1- الجمع و الطرح :-

يتم الجمع أو طرح كثيرات الحدود بجمع أو طرح معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس .

مثال (1) :-

1-$(3x^3 – 4x^2 + 6) + (x^4 – 2 x^3 – 4 x + 3)$

الحل :-

$(3x^3 – 4x^2 + 6) + (x^4 – 2 x^3 – 4 x + 3) = x^4 + x^3 – 4 x^2 – 4x + 9$

مثال (2) :-

2- $(6x^5 + 3x^3 – 4 x + 5)- (3x^5 + x^4 – 2x^2 – 4x + 7)$

الحل :-

$(6x^5 + 3x^3 – 4 x + 5)- (3x^5 + x^4 – 2x^2 – 4x + 7)= 3x^5 – x^4 + 3x^3 + 2x^2$ -2

تابع العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

2- الضرب :-

مثال :-

اذا كان $f(x) = (3x^2 - 5x + 4)$ ، وكان $h(x) = (x^2 + 2x - 1)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x) = (3x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 1)$$

$$= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10x^2 + 5x + 4x^2 + 8x - 4$$

$$= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4$$

تابع العمليات الحسابية على كثيرات الحدود :

2- الضرب :-

مثال :-

اذا كان $f(x) = (2x^2 + 3x)$ ، وكان $h(x) = (x^3 + 5x - 8)$ فجد $(f.h)(x)$.

الحل :-

$$(f.h)(x) = (x^3 + 5x - 8)(2x^2 + 3x)$$

$$= 2x^5 + 10x^3 - 16x^2 + 3x^4 + 15x^2 - 24x$$

$$= 2x^5 + 3x^4 + 10x^3 - x^2 - 24x$$

1- الاقتران النسبي :-

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيري حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود .

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$, g(x) , h(x) كثيري حدود

مثال :-

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

تابع الاقتران النسبي :-

الحل :-

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

نساوي المقام بالصفر فيكون (X-1 = 0) إذاً X=1 إذا المجال R\ {1}

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

يكون الاقتران معرف عندما يكون $X^2-4 > 0$ ، ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $X^2-4=0$ و نبحث في اشارة الاقتران $X^2 = 4$ ، $X = \pm 2$ ، ويكون مجال الاقتران موجب على R \ [-2 , 2]> ، وهذا هو مجال الاقتران النسبي .

1- الاقتران النسبي :-

مثال :-

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{4x+11}{x-12}$

2- $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{4x^2-16}}$

3- $f(x) = \frac{12x^2}{5x^2+10}$

تابع الاقتران النسبي :-

الحل :-

1- $f(x) = \frac{4x+11}{x-12}$

نساوي المقام بالصفر فيكون (X-12 = 0) إذاً X=12 إذا المجال R\ {12}

2- $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{4x^2-16}}$

يكون الاقتران معرف عندما يكون $4X^2-16 > 0$ ، ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $4X^2-16=0$ و نبحث في اشارة الاقتران $X^2 = 4$ ، $X = \pm 2$ ، ويكون مجال الاقتران موجب على <[2 , -2] \ R ، وهذا هو مجال الاقتران النسبي .

3- $f(x) = \frac{12x^2}{5x^2+10}$

يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذ الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر إذاً مجال الاقتران R .

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

1- الجمع والطرح :-

مثال اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X+1}{2X-5}+\frac{3X+1}{X-2}=\frac{(X+1)(X-2)}{(2X-5)(X-2)}+\frac{(3X+1)(2X-5)}{(X-2)(2X-5)}=$$

$$\frac{(X^2-X-2)+(6X^2-13X-5)}{(X-2)(2X-5)}=\frac{7X^2-14X-7}{2X^2-9X+10}$$

العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :-

1- الجمع والطرح :-

مثال اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}$$

الحل :-

$$\frac{X}{3X+2}+\frac{5X^2+2}{2X-2}=\frac{(X)(2X-2)}{(3X+2)(2X-2)}+\frac{(5X^2+2)(3X+2)}{(2X-2)(3X+2)}=$$

$$\frac{(2X^2-2X)+(15x^3+10X^2+6X+4)}{(3X+2)(2X-2)}=\frac{15x^3+12X^2+4X+4}{6X^2-2X-4}$$

2- الاقتران الأسي :-

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الأعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة أي $f: R \rightarrow R^+$ حيث $f(x)=a^x$

حيث a عدد حقيقي موجب و يسمى a الاساس و x الاس

(كمثال $f(x)= 10^x$) .

اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي

$$f(x)= e^x$$

واذا كان الاساس = 10 فان الاقتران يسمى الاس العشري

$$f(x) =10^x$$

2- الاقتران الأسي :-

قوانين الاسس :-

1- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

2- $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

3- $(a^x)^y = a^{xy}$

4- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5- $a^0 = 1$

6- $a^{\frac{1}{x}}_{\bar{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

تابع الاقتران الاسي :-

مثال :-

حل المعادلات الاسية التالية :-

1- $3^{2x-1} = 243$

2- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

تابع الاقتران الاسي :-

الحل :-

1- $3^{2x-1} = 243$

$3^{2x-1} = 3^5$

$2x - 1 = 5$

$2x = 6$

$x = 3$

تابع الاقتران الاسي :-

تابع حل المثال :-

$$2\text{-}\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \mp 2$$

3- الاقتران اللوغاريتمي :-

الاقتران اللوغاريتمي هو الاقتران المعكوس للاقتران الاسي و بالتالي يكون الاقتران اللوغاريتمي معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة إلى مجموعة الاعداد الحقيقية .

فإذا كانت :-

$f(x) = \log_a x$

$y = a^x$

$x = \log_a y$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

مثال :-

أوجد الاقتران المعكوس (اللوغاريتمي) للاقترانات التالية :-

1- $f(x) = 2^x$

2- $f(x) = e^x$

3- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4- $f(x) = 10^x$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

الحل :-

1- $f(x) = 2^x$

$f^{-1}(x) = \log_2 x$

2- $f(x) = e^x$

$f^{-1}(x) = \log_e x$

ويسمى المقدار الاخير اللوغاريتم الطبيعي و يكتب على الصورة

$Ln(x)$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

تابع حل المثال :-

3- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4- $f(x) = 10^x$

$f^{-1}(x) = \log_{10} x = \log x$

وهذا المقدار يسمى اللوغاريتم العشري .

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

قوانين اللوغاريتمات :-

1- $\log_a x.y = \log_a x + \log_a y$

2- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3- $\log_a x^y = y \log_a x$

4- $\log_a a = 1$

5- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

6- $\log_a 1 = 0$

7- $\log_a a^x = a^{\log a^x} = x$

8- $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

مثال :-

بسط ما يلي إلى ابسط صورة

1- $\frac{\log 10+\log 100+\log 1000}{\log 1000}$

2- $\frac{\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9}{\log_2 4}$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

الحل :-

$$1-\frac{\log 10+\log 100+\log 1000}{\log 1000}$$

$$=\frac{1+\log 10^2+\log 10^3}{\log 10^3}=\frac{1+2+3}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$2-\frac{\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9}{\log_2 4}$$

$$=\frac{\log_2 3.6-\log_2 9}{\log_2 2^2}=\frac{\log_2 \frac{18}{9}}{2\log_2 2}=\frac{\log_2 2}{2}=\frac{1}{2}$$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

مثال :-

حل المعادلة اللوغارتمية التالية :-

$$\log (x - 1)^3 = \log (2) + \log (32)$$

الحل

$$\log (x - 1)^3 = \log (2) . (32) = \log 64$$

$$3 \log (x - 1) = \log (4^3) = 3 \log 4$$

$$\log (x-1) = \log 4$$

$$x-1 = 4$$

$$x = 5$$

تابع الاقتران اللوغاريتمي :-

مثال :-

حل المعادلة اللوغارتمية التالية :-

$$\text{Log}\,(x + 1)^4 = \log (4) + \log (64)$$

الحل

$$\text{Log}\,(x + 1)^4 = \log (4) \,.\, (64) = \log 256$$

$$4\,\text{Log}\,(x + 1) = \log (4^4) = 4 \log 4$$

$$\log (x+1) = \log 4$$

$$x+1 = 4$$

$$x = 3$$

تمارين واجب :-

1- أوجد :-

a- $(16x^6 + 30x^4 - 20x^2 + 15x) - (12x^5 + 5x^4 - 6x^3 - 4x + 2)$

b- $(9x^3 + 5x^2 + 12) \times (2x^2 - 5x - 10)$

2- ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية :-

1- $f(x) = \frac{20x^2+10}{x-10}$

2- $f(x) = \frac{2x+15}{\sqrt{5x^2-125}}$

3- $f(x) = \frac{30x^4}{12x^2+120}$

تابع تمارين واجب :-

3- اوجد ناتج ما يلي :-

$$\frac{2X+3}{X-5} - \frac{4X^2-6}{3X+1}$$

4- حل المعادلات الاسية التالية :-

$$4^{3x+2} = 1024$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2} = \frac{16}{81}$$

تابع تمارين واجب :-

5- أوجد الاقتران المعكوس (اللوغاريتمي) للاقترانات التالية :-

$f(x) = 3^x$

$f(x) = e^{-x}$

$f(x) = \left(\frac{2}{5}\right)^{3x}$

$f(x) = 10^x$

تابع تمارين واجب :-

6- أكمل ما يلي :-

$\log_2 \ldots\ldots = \log_2 6 + \log_2 8$

$\log_5 64 = \log_5 2 + \log_5 \ldots\ldots$

$\log_2 \ldots\ldots = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{5}{7}$

$\log_3 \ldots\ldots = \log_3 15 - \log_3 5$

$\log_3 30 = \log_3 15 - \log_3 \ldots\ldots$

$\log_4 x^5 = \ldots\ldots \log_4 \ldots\ldots$

$\log_8 8 = \ldots\ldots$

$\log_{10} 1 = \ldots\ldots$

$\log_6 6^x = \ldots\ldots\ldots\ldots$

تابع تمارين واجب :-

7- بسط ما يلي إلى ابسط صورة

$$\frac{4\log 100 - \log 100 + 6\log 10}{2\log 1000}$$

$$\frac{\log_3 5 + \log_3 8 - \log_3 10}{\log_3 4}$$

$$\frac{\log_2 6 + \log_2 12 - \log_2 18}{\log_2 8}$$

8- حل المعادلة اللوغارتمية التالية :-

$$\text{Log}\,(2x+1)^3 = \log(5) + \log(25)$$

تمت بحمد الله

المحاضرة (3)

المعادلات والمتباينات

أولاً : المعادلات :-

يحتل موضوع المعادلات مكانه كبيرة في علم الرياضيات هو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث ، وفي هذه الوحدة سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية و التربيعية بالإضافة إلى حل انظمة معادلتين بمجهولين ونظام ثلاث مجاهيل ، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات في المعادلة .

أ – حل المعادلات الخطية :-

أن المعادلة الخطية هي معادلة في متغير واحد ومن الدرجة الاولى أي أن أكبر أس في المعادلة هو واحد و الشكل العام للمعادلة الخطية هو :-

$$ax + b = 0$$

مثال :-

حل المعادلة الخطية التالية :-

$$2x - 3 = 0$$

الحل :-

$$2x - 3 = 0$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2}$$

ب – المعادلة التربيعية :-

و المعادلة التربيعية يكون أكبر أس فيها هو أثنين و تأخذ الصورة :-

$$ax^2 + bx + c = 0$$

وهناك العديد من الطرق لحل هذه المعادلة ولكننا سوف نعتمد على القانون العام للحل ، حيث أنه من أسرع هذه الطرق و أكثرها دقة و يأخذ القانون العام الشكل التالي :-

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ و هو ما أسفل الجذر بالمميز .

تابع المعادلة التربيعية :-

و هناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة و هي :-

1 – الحالة الأولى : اذا كان المميز $(\Delta > 0)$ فيوجد حلين للمعادلة . $(x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \ , \ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a})$.

2- الحالة الثانية : اذا كان المميز $(\Delta = 0)$

فيوجد حل وحيد للمعادلة $x = \frac{-b}{2a}$.

3- الحالة الثالثة : اذا كان المميز $(\Delta < 0)$فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة .

تابع المعادلة التربيعية :-

مثال :-

حل المعادلات التربيعية التالية :-

1- $x^2 + 2x - 3 = 0$

2- $3x^2 - 4x + 5 = 0$

3- $x^2 - 2x + 1 = 0$

4- $x^2 - 5x + 3 = 0$

تابع المعادلة التربيعية :-

الحل :-

1- $x^2 + 2x - 3 = 0$

a = 1 , b = 2 , c = -3

$$\Delta = (2)^2 - 4 \times 1 \times -3 = 16 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$$

$$, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1$$

تابع المعادلة التربيعية :-

تابع حل المثال :-

2- $3x^2 - 4x + 5 = 0$

a = 3 , b = -4 , c = 5

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 5 = -44 < 0$$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة .

تابع المعادلة التربيعية :-

تابع حل المثال :-

3- $x^2 - 2x + 1 = 0$

a = 1 , b = -2 , c = 1

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 4 - 4 = 0$$

∴يوجد حل وحيد للمعادلة هو : -

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{--2}{2\times1} = \frac{2}{2} = 1$$

تابع المعادلة التربيعية :-

تابع حل المثال :-

4- $x^2 - 5x + 3 = 0$

a = 1 , b = -5 , c = 3

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 3 = 13 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) + \sqrt{13}}{2 \times 1} = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

تابع المعادلة التربيعية :-

مثال :-

حل المعادلات التربيعية التالية :-

1- $4x^2 + 5x = -6$

2- $5x^2 - 2x = 0$

3- $3x^2 - 6x = -3$

4- $3\text{-}2x^2 + 3\,x = 0$

تابع المعادلة التربيعية :-

الحل :-

1- $4x^2 + 5x + 6 = 0$

a = 4 , b = 5 , c = 6

$$\Delta = (5)^2 - 4 \times 4 \times 6 = -71 < 0$$

∴ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة .

تابع المعادلة التربيعية :-

تابع حل المثال :-

2- $5x^2 - 2x = 0$

a = 5 , b = -2 , c = 0

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 \times 0 = 4 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - \sqrt{4}}{2\times5} = \frac{2 - \sqrt{4}}{10} = 0$$

$$, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + \sqrt{4}}{2 \times 5} = \frac{2 + \sqrt{4}}{10} = 0.4$$

تابع المعادلة التربيعية :-

تابع حل المثال :-

3- $3x^2 - 6x + 3 = 0$

a = 3 , b = -6 , c = 3

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 36 - 36 = 0$$

∴يوجد حل وحيد للمعادلة هو : -

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{--6}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$$

تابع المعادلة التربيعية :-

تابع حل المثال :-

4- $3 - 2x^2 + 3x = 0$

$-2x^2 + 3x + 3 = 0$

a = -2 , b = 3 , c = 3

$$\Delta = (3)^2 - 4 \times -2 \times 3 = 9 + 24 = 33 > 0$$

∴يوجد حلين للمعادلة هما :-

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) - \sqrt{4}}{2 \times -2} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

$$, x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(3) + \sqrt{4}}{2 \times -2} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$$

جـ - حل أنظمة المعادلات الخطية :-

1- حل نظام معادلتين بمجهولين :-

يمكن حل هذا النوع من المعادلات باستخدام طريقة الحذف ،حيث نجعل معاملات أحد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن بإشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في أحدى المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول .

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة الحذف :-

$$2x + 3y = 7$$

$$3x + 2y = 8$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية :-

الحل :-

نضرب المعادلة الأولى في (3) و الثانية في (2) لحذف المتغير xفتصبح المعادلتين :-

$$6x + 9y = 21$$

$$- \quad 6x + 4y = 16 \qquad \text{نطرح}$$

$$5y = 5$$

$$y = 1$$

نعوض بقيمة y في المعادلة الثانية :-

$$3x + 2(1) = 8$$

$$3x + 2 = 8$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية :-

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة الحذف :-

$$3x + 4y = 9$$
$$2x + 3y = 7$$

الحل :-

حتى يتم توحيد معاملات أحد المتغيرين و ليكن المتغير x يمكن ضرب أحد المعاملات في قيمة المتغير الأخر .

$$(3x + 4y = 9) \times 2$$
$$(2x + 3y = 7) \times 3$$

$$6x + 8y = 18$$
$$6x + 9y = 21 \quad \text{نطرح}$$
$$y = 3$$

نعوض في المعادلة الأولى :-

$$3x + 4(3) = 9$$
$$3x + 12 = 9$$
$$3x = -3 \quad , \quad X = -1$$

ثانياً : المتباينات :-

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية (<) أقل من (>) أكبر من ، (≤) أكبر من أو يساوي ، (≥) أقل من أو يساوي
و من الأمثلة على المتباينات :-

$x < 2$

$x + 1 \leq -3$

$x^2 + 2x + 5 \geq 0$

ثانياً : المتباينات :-

تعريف : تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها بمجموعة التعويض ، وهذه المجموعة تعطى في السؤال و تكون عادة إحدى مجموعات الاعداد و في كل امثلتنا في هذه الوحدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الحقيقية **"R"** .

تعريف : تسمى مجموعة قيم X التي تجعل المتباينة صحيحة (أي التي تكون حلاً للمتباينة) مجموعة الحل للمتباينة .

مجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

تابع المتباينات :-

مثال :-

أوجد مجموعة الحل للمتباينة التالية :-

$$3X - 2 > X + 1$$

تابع المتباينات :-

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

$$3X - 2 > X + 1$$

$$3X - X > 1 + 2$$

$$2X > 3$$

$$X > \frac{3}{2}$$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{3}{2} , \infty)$

تابع المتباينات :-

مثال :-

أوجد مجموعة الحل للمتباينة التالية :-

$$6X - 5 > X + 3$$

تابع المتباينات :-

الحل :-

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

$$6X - 5 > X + 3$$

$$6X - X > 3 + 5$$

$$5X > 8$$

$$X > \frac{8}{5}$$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $(\frac{8}{5}, \infty)$

المتتاليات
Sequences

المتتاليات :-

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية N إلى مجموعة الاعداد الحقيقية R و تكتب على الصورة :-

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = a_1 , a_2 , a_3 , \dots\dots\dots , a_n$$

و تسمى العناصر المتتاليةبينما بحدود المتتالية $a_1 , a_2 , a_3 , \dots\dots\dots , a_n$

يسمى الحد a_n الحد العام للمتتالية .

وتكتب المتتالية بدلاله حدها a_n .

تابع المتتاليات :-

مثال :-

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتاليات التالية :-

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{3n - n^3\}$

3- $\{2n + 4\}$

4- $\{2^n\}$

تابع المتتاليات :-

الحل :-

الحدود الاربعة الاولى هي a_1 , a_2 , a_3 , a_4

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}_{n=1}^{4} = \left\{\frac{1^2}{2}\right\} , \left\{\frac{2^2}{2}\right\} , \left\{\frac{3^2}{2}\right\} , \left\{\frac{4^2}{2}\right\} = a_1 = \frac{1}{2} , a_2 = 2 , a_3 = \frac{9}{2} , a_4 = 8$

2- $\{3n - n^3\}_{n=1}^{4} = \{3.1 - 1^3\}, \{3.2 - 2^3\}, \{3.3 - 3^3\}, (3.4 - 3^3\}$

$= a_1 = \{2\} , a_2 = \{-2\} , a_3 = \{-18\}, a_4 = \{-52\}$

تابع المتتاليات :-

تابع الحل :-

3- $\{\ 2n+4\ \}_{n=1}^{4}$ $=\{\ 2.1+4\ \}\{\ 2.2+4\ \}\{\ 2.3+4\ \}\{\ 2.4+4\ \}$

$= a_1 = 6\ , a_2 = 8\ , a_3 = 10\ , a_4 = 12$

4- $\{2^n\}_{n=1}^{4} = \{2^1\}, \{2^2\}, \{2^3\}, \{2^4\} =\ \ a_1 = 2\ , a_2 = 4\ , a_3 = 8\ , a_4 = 16$

تابع المتتاليات :-

مثال :-

أوجد الحد الخامس و الحد الثامن للمتتالية :-

$$\left\{\frac{n^2+1}{3n-2}\right\}$$

الحل

الحد الخامس $a_5 = \frac{5^2+1}{3.5-2} = \frac{26}{13} = 2$

الحد الثامن $a_8 = \frac{8^2+1}{3.8-2} = \frac{63}{22}$

المحاضرة (4)

تابع المتتاليات
Sequences

1- المتتالية الحسابية :-

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية و يرمز له بالرمز d ، أي اذا كانت $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots \dots a_n$ متتالية حسابية فإن :-

$$a_2 = a_1 + d \;\gg\gg\gg\gg\; d = a_2 - a_1$$
$$a_3 = a_2 + d \;\gg\gg\gg\gg\; d = a_3 - a_2$$
$$a_4 = a_3 + d \;\gg\gg\gg\gg\; d = a_4 - a_3$$

.

.

$$a_n = a_{n-1} + d \;\gg\gg\gg\gg\; d = a_n - a_{n-1}$$

تابع المتتالية الحسابية :-

مثال :-

أي المتتاليات التالية حسابية واذا كانت فما هو اساسها :-

1- 2,4,8,16,.....

2- 1,4,7,10,.....

3- 1,4,9,16,25,..

4- 5,3,1,-1,.....

5-6,6,6,6,6,.....

6- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

تابع المتتالية الحسابية :-

الحل :-

1- 2,4,8,16,..... (4-2=2 , 8-4=4 , الفرق ليس ثابت)

∴ليست حسابية .

2- 1,4,7,10,.....(4-1 = 3 , 7-4 = 3 , الفرق ثابت)

∴ حسابية و أساسها = 3 .

3- 1,4,9,16,25,.. (4-1 = 3 , 9 -4 = 5 , الفرق ليس ثابت)

∴ليست حسابية .

تابع المتتالية الحسابية :-

الحل :-

4- 5,3,1,-1,..... (3-5 = -2 , 1-3=-2, الفرق ثابت)

∴ حسابية و أساسها = -2 .

5-6,6,6,6,6,.....(6-6=0 , 6-6=0 , الفرق ثابت)

∴ حسابية و أساسها =صفر .

6- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..$ $(\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$ الفرق ليس ثابت)

∴ليست حسابية .

الحد العام للمتتالية الحسابية :-

اذا كانت (a_n) متتالية حسابية حدها الأول a_1 و اساسها d فإن :-

$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$
$$a_5 = a_1 + 4\,d$$

.

$$a_n = \ a_1 + (\,n - 1\,)d$$

∴ الحد العام للمتتالية الحسابية هو :-

$$\boldsymbol{a_n = \ a_1 + (\,n - 1\,)d}$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (2) و أساسها (5)ثم أوجد الحد الخامس عشر للمتتالية .

الحل :-

$$a_1 = 2$$

d = 5

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 2 + (n-1)(5)$$

$$\therefore \quad a_n = 5n - 3$$

الحد الخامس عشر :-

$$a_{15} = 5(15) - 3$$

$$= 75 - 3 \quad = 72$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التي حدها الأول (-5) و أساسها (3)ثم أوجد الحد العاشر للمتتالية .

الحل :-

$$a_1 = -5$$

d = 3

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

= -5 + (n – 1) (3)

$$\therefore \quad a_n = 3n - 8$$

الحد العاشر :-

$$a_{15} = 3(10) - 8$$

= 30 – 8 = 22

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

إذا علمت أن الحد الحادي عشر من متسلسلة حسابية يساوي 35 و الحد الاول يساوي 5 أوجد أساس هذه المتتالية ثم أود الحد العاشر ؟

الحل :-

$$a_1 = 5$$

d = ?

$$a_{11} = 35$$

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

35 = 5 + (11 – 1) (d)

$$\therefore \ 30 = 10\,d$$

$$d = \frac{30}{10} = 3$$

الحد العاشر :-

$$a_{15} = 3(10) - 8$$

= 30 – 8 = 22

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

إذا علمت أن الحد السادس عشر من متسلسلة حسابية يساوي 85 و أساس هذه المتتالية يساوي 5 أوجد الحد الأول لهذه المتتالية ؟

الحل :-

$$a_1 = ?$$

d = 5

$$a_{16} = 85$$

∴ يكون الحد العام هو :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$85 = a_1 + (16 - 1)(5)$$

$$\therefore \quad 85 = 75 + a_1$$

$$a_1 = 85 - 75 = 10$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية :-

1- 3 , 6 , 9 , 12 , ...

2- 10 , 8 , 6 , 4 , ...

3- $1 , \frac{3}{2} , 2 , \frac{5}{2} , 3 , ...$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

الحل :-

نجد في البداية الحد الأول و الأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام .

1- $a_1 = 3 \ , \ d = 3$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_n = 3 + (n-1)(3)$$
$$a_n = 3 + 3n - 3 = 3n$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

تابع الحل :-

نجد في البداية الحد الأول و الأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام .

2- $a_1 = 10 \ , \ d = -2$

$$\therefore a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_n = 10 + (n - 1)(-2)$$

$$a_n = 10 - 2n + 2 = 12 - 2n$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

تابع الحل :-

نجد في البداية الحد الأول و الأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام .

3- $a_1 = 1 \ , \ d = \frac{1}{2}$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = 1 + (n-1)\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}n = \frac{n+1}{2}$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 3 \ , \ a_5 = 19$ أوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين .

الحل :-

تكون الاوساط الحسابية مع العددين متتالية حسابية على الصورة $a_1, a_2, a_3, a_4 \ , a_5$ و تكون الاوساط هي a_2, a_3, a_4

حيث $a_1 = 3 \ , \ a_5 = 19$

$$a_5 = a_1 + (4)d$$

$$19 = 3 + 4d \quad >>>>> \quad d = \frac{(19-3)}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$\therefore \quad a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$$

$$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$$

$$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

إذا علمت أن $a_{12} = 45$, $a_5 = 10$ أوجد أربع أوساط حسابية بين العددين .

الحل :-

تكون الاوساط الحسابية مع العددين متتالية حسابية و تكون الاوساط هي $a_6, a_7, a_8\ a_9$

حيث $a_{12} = 45$, $a_5 = 10$

$$a_{12} = a_5 + (7)d$$

$$45 = 10 + 7d \quad \gg\gg\gg \quad d = \frac{(45-10)}{7} = \frac{35}{7} = 5$$

$$\therefore \quad a_6 = a_5 + d = 10 + 5 = 15$$

$$a_7 = a_6 + d = 15 + 4 = 20$$

$$a_8 = a_7 + d = 20 + 5 = 25$$

$$a_9 = a_8 + d = 25 + 5 = 30$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها الرابع = 13 و حدها العاشر = 25 أوجد حدها العام .

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{10} = a_4 + 6d$$
$$25 = 13 + 6 \times d$$
$$d = \frac{(25-13)}{6} = \frac{12}{6} = 2$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_4 = a_1 + 3\,d$$
$$13 = a_1 + 3 \times 2$$
$$a_1 = 13 - 6 = 7$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\therefore\ a_n = 7 + (n-1)2$$
$$\therefore\ a_n = 7 + 2n - 2$$
$$\therefore\ a_n = 2n + 5$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها السابع = 30 و حدها الثاني عشر = 45 أوجد حدها العام .

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{12} = a_7 + 5d$$

$$45 = 30 + 5 \times d$$

$$d = \frac{(45-30)}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_7 = a_1 + 6\,d$$
$$30 = a_1 + 6 \times 3$$
$$a_1 = 30 - 18 = 12$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$\therefore\ a_n = 12 + (n-1)3$$
$$\therefore\ a_n = 12 + 3n - 3$$
$$\therefore\ a_n = 3n + 9$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها الثاني = - 4 و حدها السادس = 4 أوجد حدها العام .

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_6 = a_2 + 4d$$

$$4 = -4 + 4 \times d$$

$$d = \frac{(4-(-4))}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_6 = a_1 + 5\,d$$

$$4 = a_1 + 5 \times 2$$

$$a_1 = 4 - 10 = -6$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\therefore\ a_n = -6 + (n-1)2$$

$$\therefore\ a_n = -6 + 2n - 2$$

$$\therefore\ a_n = 2n - 8$$

تابع الحد العام للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها السابع = - 12 و حدها العاشر = - 3 أوجد حدها العام .

الحل :-

أولاً نجد قيمة d :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_{10} = a_7 + 3d$$

$$-3 = -12 + 3 \times d$$

$$d = \frac{(-3-(-12))}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

ثانياً نجد قيمة a_1 :-

$$a_7 = a_1 + 6\,d$$

$$-12 = a_1 + 6 \times 3$$

$$a_1 = -12 - 18 = -30$$

ثالثاً نعوض في معادلة الحد العام :-

$$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\therefore\ a_n = -30 + (n-1)3$$

$$\therefore\ a_n = -30 + 3n - 3$$

$$\therefore\ a_n = 3n - 33$$

مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

أول ن حد من حدود هو :-

$$a_1 , a_2 , \dots\dots\dots , a_n$$

و مجموعها هو :-

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots\dots + a_n$$

$$\gg \quad S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots\dots + a_n$$

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + (a_1+3d) + \dots\dots + (a_1+(n-1)d)$$

$$S_n = n\,a_1 + d + 2d + 3d \dots\dots + (n-1)d$$

$$S_n = n\,a_1 + d(1 + 2 + 3 + \dots\dots + (n-1))$$

$$S_n = n\,a_1 + d\frac{n(n-1)}{2}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\,(2\,a_1 + (n-1)d)}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_1 + (n-1)d)}$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)}$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها الأول = -3 ،واساسها (4) أوجد مجموع أول (20) حد منها .

الحل

$$a_1 = -3 , \qquad d = 4$$

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2} (2\, a_1 + (n - 1) d)}$$

$$S_{20} = \frac{20}{2} (2 (-3) + (19)(4))$$

$$= 10 (-6 + 76)$$

$$= (10) (70) = 700$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها الأول = 3 ،واساسها (5) أوجد مجموع أول (10) حد منها .

الحل

$$a_1 = 3 , \qquad d = 5$$

$$\mathbf{S_n = \frac{n}{2} (2\, a_1 + (n - 1) d)}$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2\,(3) + (9)(5))$$

$$= 5 (6 + 45)$$

$$= (5) (51) = 255$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) احسب مجموعها .

الحل :

$$a_1 = 3 \ , \qquad a_{16} = 39 \ , \qquad n = 16$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2} \left(a_1 + a_n \right)}$$

$$S_{16} = \frac{16}{2} \left(3 + 39 \right)$$

$$= \left(8 \right) \ (42)$$

$$S_{16} = 336$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية عدد حدودها (8) حدها الأول (-5) وحدها الأخير (25) احسب مجموعها .

الحل :

$$a_1 = -5 \ , \qquad a_8 = 25 \ , \qquad n = 8$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n}{2} \left(a_1 + a_n \right)}$$

$$S_8 = \frac{8}{2} \left(-5 + 25 \right)$$

$$= \left(4 \right) \ (20)$$

$$S_8 = 80$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{12} (5n - 1)$$

الحل :

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (12) حدها الأول (4) واساسها (5)

$$\therefore S_{12} = \frac{12}{2} (2(4) + 11 (5)) = 378$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{10} (6n - 2)$$

الحل :

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (10) حدها الأول (4) واساسها (6)

$$\therefore S_{10} = \frac{10}{2} (2(4) + 9 (6)) = 310$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=6}^{10}(6n - 2)$$

الحل :

$$\sum_{n=6}^{10}(6n - 2) = \sum_{n=1}^{10}(6n - 2) - \sum_{n=1}^{5}(6n - 2)$$

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية حدها الأول (4) واساسها (6)

$$\therefore S_{10} = \frac{10}{2}(2(4) + 9(6)) = 310$$

$$\therefore S_5 = \frac{5}{2}(2(4) + 4(6)) = 80$$

$$\sum_{n=6}^{10}(6n - 2) = 310 - 80 = 230$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=8}^{12}(-2n \ -5)$$

الحل :

$$\sum_{n=8}^{12}(-2n \ -5)=\sum_{n=1}^{12}(-2n \ -5)-\sum_{n=1}^{7}(-2n \ -5)$$

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية حدها الأول (-7) واساسها (-2)

$$\therefore S_{12} = \frac{12}{2} \ (\ 2(-7) + 11 \ (-2) \ ) = -216$$

$$\therefore S_{7} = \frac{6}{2} \ (\ 2(-7) + 6 \ (-2) \ ) = -78$$

$$\sum_{n=8}^{12}(\ 6n \ -2 \ ) = -216 - (-78) = -138$$

تابع مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :-

مثال :-

متتالية حسابية حدها الأول (-60) وحدها الأخير (-2) و مجموع حدودها (-310) أوجد عدد حدودها .

الحل :

نطبق القانون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\gg \frac{n}{2}(-60 + (-2)) = -310$$

$$\frac{n}{2}(-62) = -310$$

n (-31) = -310

n = 10

المحاضرة (5)

تابع المتتاليات
Sequences

2- المتتالية الهندسية :-

المتتالية الهندسية المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتالين ثابتة تسمى اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r .

أي : اذا كانت $\{a_n\} = a_1 , a_2, a_3 , \dots\dots\dots, a_n$

متتالية هندسية فإن :-

$$a_2 = a_1\, r \quad \gg\gg \quad r = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2\, r \quad \gg\gg \quad r = \frac{a_3}{a_2}$$

$$a_4 = a_3\, r \quad \gg\gg \quad r = \frac{a_4}{a_3}$$

$$a_n = a_{n-1}\, r \quad \gg\gg \quad r = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

تابع المتتالية الهندسية :-

مثال :

أي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها .

1 - 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

2 - 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

3 - 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

4 - $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}$, ...

5 - 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , ...

تابع المتتالية الهندسية :-

الحل :-

1 - 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , ...

$\frac{4}{1} = 4 \quad , \frac{9}{4} = 2.25$

∴ ليست هندسية .

2 - 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ...

$\frac{4}{2} = 2 \quad , \frac{8}{4} = 2 \quad , \frac{16}{8} = 2$

∴ متتالية هندسية و اساسها 2 .

3 - 2 , 4 , 6 , 8 , 10 , ...

$\frac{4}{2} = 2 \quad , \frac{6}{4} = 1.5$

∴ ليست هندسية .

تابع المتتالية الهندسية :-

تابع الحل :-

4 - $1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{9} , \frac{1}{27} , \frac{1}{8} , \ldots\ldots$

$\frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3}$, $\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{9}} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$

∴ متتالية هندسية و اساسها $\frac{1}{3}$.

5 - $1 , -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , \ldots..$

$-\frac{1}{1} = -1$, $\frac{1}{-1} = -1$, $-\frac{1}{1} = -1$

∴ متتالية هندسية و اساسها -1 .

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

اذا كانت $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots, a_3$

متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن :-

$$a_2 = a_1\, r$$

$$a_3 = a_2\, r = a_1\, r^2$$

$$a_4 = a_3\, r = a_1\, r^3$$

$$a_5 = a_1\, r^4$$

الحد العام للمتتالية :-

$$\boldsymbol{a_n = a_1\, r^{n-1}}$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (1) و اساسها (2) أوجد حدها العام .

الحل :-

$$a_n = 1 \quad , \quad r = 2$$

$$a_n = a_1 \, r^{n-1}$$

$$= (1)\,(2)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 2^{n-1}$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية :-

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

2- $1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \frac{1}{16} , \ldots \ldots \ldots .$

3- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,.....

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

الحل :-

1- 4 , 16 , 64 , 256 , ...

$$a_1 = 4 \quad , r = 4$$

$$\gg\gg \quad a_n = a_1\, r^{n-1}$$

$$= (4)(4)^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = 4^n$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

تابع الحل :-

2- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\ldots\ldots$

$$a_1 = 1 \ , \ r = \frac{1}{2} \gg\gg a_n = a_1 r^{n-1} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

الحل :-

3- -1 , 1 , -1 , 1 , -1 ,.....

$$a_1 = -1 \ , \ r = -1 \gg\gg a_n = a_1 r^{n-1} = (-1)(-1)^{n-1}$$

$$\therefore \ a_n = (-1)^n$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الرابع (5) ، وحدها السابع $\left(\frac{1}{25}\right)$أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \quad , \quad a_4 = a_1\, r^3 = 5 \quad , \quad a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{25}$$

بالقسمة $\frac{a_7}{a_4}$ <<<<< $\frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{\left(\frac{1}{25}\right)}{5}$

$$>>> \quad r^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3} \quad >>> \quad \therefore r = \frac{1}{5}$$

نعوض في معادلة a_4 لإيجاد a_1

$$a_1\, r^3 = 5 \quad >>> \quad a_1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5 \quad >>> \quad a_1 \frac{1}{125} = 5 \quad >>> \quad a_1 = 625$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها السادس (1215) ، وحدها العاشر 98415 أوجد حدها الأول والاساس .

الحل :-

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \quad , \quad a_6 = a_1\, r^5 = 1215 \quad , \quad a_{10} = a_1 r^9 = 98415$$

بالقسمة $\frac{a_{10}}{a_6} \lll\lll \frac{a_1 r^9}{a_1 r^5} = \frac{98415}{1215}$

$$\gg\gg \quad r^4 = 81 \quad \gg\gg \quad \therefore r = \sqrt[4]{81} \qquad \therefore r = 3$$

نعوض في معادلة a_6 **لإيجاد** a_1

$$a_1\, r^5 = 1215 \quad \gg\gg \quad a_1 (3)^3 = 1215 \quad \gg\gg \quad a_1\, 27 = 1215$$

$$\gg\gg \quad a_1 = \frac{1215}{27} = 45$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 2 \, , a_5 = 1250$ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2 ، 1250

الحل :

$$a_1 = 2 \ , a_5 = 250$$

والمطلوب ايجاد $a_2, a_3 \, , a_4$

$$a_5 = a_1 r^4 \gg\gg \ 1250 = (2)r^4 \ \gg\gg r^4 = \frac{1250}{2} = 625 \ \gg r^4 = 5^4$$

$$\therefore r = 5$$

$$\therefore a_2 = a_1 r = (2)(5) = \ 10$$

$$a_3 = a_2 r = (10)(5) = 50$$

$$a_4 = a_3 r = (50)(5) = 250$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

إذا علمت أن $a_1 = 5 \, , a_{10} = 2560$ ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 5 ، 2560

الحل :

$$a_1 = 5 \ , a_{10} = 2560$$

والمطلوب ايجاد $a_2, a_3 \, , a_4$

$$a_{10} = a_1 r^9 \gg\gg 2560 = (5) r^9 \ \gg\gg r^9 = \frac{2560}{5} = 512 \ \gg r^9 = 2^9$$

$$\therefore r = 2$$

$$\therefore a_2 = a_1 r = (5)(2) = \ 10$$

$$a_3 = a_2 r = (10)(2) = 20$$

$$a_4 = a_3 r = (20)(2) = 40$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (2) وحدها الأخير (486) واساسها (3) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 486 = (2)(3)^{n-1}$$

$$(3)^{n-1} = \frac{486}{2} = 243 \quad \gg \quad (3)^{n-1} = (3)^5$$

$$n - 1 = 5 \quad \gg \quad \therefore \quad n = 6$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (4) وحدها الأخير (2048) واساسها (2) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 2048 = (4)(2)^{n-1}$$

$$(2)^{n-1} = \frac{2048}{4} = 512 \quad \gg \quad (2)^{n-1} = (2)^9$$

$$n - 1 = 9 \quad \gg \quad \therefore \quad n = 10$$

الحد العام للمتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (3) وحدها الأخير (3000) واساسها (10) أوجد عدد حدودها .

الحل :-

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \gg \quad 3000 = (3)(10)^{n-1}$$

$$(10)^{n-1} = \frac{3000}{3} = 1000 \quad \gg \quad (10)^{n-1} = (10)^3$$

$$n - 1 = 3 \quad \gg \quad \therefore \quad n = 4$$

مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مجموع أول n حد من المتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1 واساسها r هو :-

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_n$$

$$\gg \quad S_n = \ a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1} \ldots (1)$$

بالضرب في r تصبح

$$r\, S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح (1) من (2) تصبح :-

$$r\, S_n - S_n = (a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots \ldots\ldots + a_1 r^n) \ - \ (\ a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \ldots\ldots + a_1 r^{n-1})$$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$$r\, S_n \ - S_n = a_1 r^n \ a_1 \qquad \gg \qquad S_n\,(r-1) = a_1\,(r^n - 1\,)$$

∴ مجموع أول n حد هو : -

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}}$$

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (8) واساسها (2) احسب مجموع أول خمسة حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 8 \ , \ \ r = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{(8)(2^5 - 1)}{r - 1} = 8(32 - 1)$$

$$= 248$$

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها (5) احسب مجموع أول ثمانية حدود منها .

الحل :

$$a_1 = 10 \ , \ \ r = 5$$

$$S_8 = \frac{a_1(r^8 - 1)}{r - 1} = \frac{(10)(5^8 - 1)}{5 - 1} =$$

$$= 976560$$

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها $(\frac{1}{4})$ والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7-1\right)}{\frac{1}{4}-1} = \left(\frac{1}{4^7}-7\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = \left(\frac{1}{16384}-1\right)\left(\frac{4}{-3}\right) = -\frac{16383}{16384}\times\frac{4}{-3}$$

$$S_7 = \frac{5461}{409}$$

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{10}(5)^{n-1}$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها 5 والمطلوب ايجاد مجموع أول عشر حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_{10} = \frac{1((5)^{10}-1)}{5-1} = 2441406$$

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{5}(2.(3)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (2) واساسها 3والمطلوب ايجاد مجموع أول خمس حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_5 = \frac{2((3)^5-1)}{3-1} = 242$$

تابع مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :-

مثال :-

أوجد المجموع التالي :-

$$\sum_{n=1}^{8}(10.(5)^{n-1})$$

الحل :-

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (10) واساسها 5والمطلوب ايجاد مجموع أول أربع حدود .

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_8 = \frac{10((5)^8-1)}{5-1} = 976560$$

تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة في نهاية المدة على شكل متتالية حسابية و تحسب بالقانون .

$$a_n = a_1 + (n)d$$

حيث أن :-

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات = n

الفائدة السنوية على المبلغ = d

نسبة الفائدة × a_1 = d

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

مثال :-

أودع شخص مبلغ (10000) ريال لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً ، أحسب جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

n = 8

$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$

المبلغ في نهاية السنة الثانية = a_8

$a_8 = 10000 + (8)(750)$

$= 10000 + 6000 = 16000$ SAR

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

مثال :-

أودع شخص مبلغ ما لمدة (4.75) سنة بفائدة بسيطة 2% ربع سنوي ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 5520 ريال أحسب أصل المبلغ .

الحل :-

a_1 = ?

n = 4.5

d = $\frac{8}{100} \times a_1 = 0.08\, a_1$

المبلغ في نهاية المدة = $a_{4.75}$

$$a_{4.75} = a_1 + (4.75)(0.08\, a_1) = 5520$$

$$a_1(1+4.75\times 0.08) = 5520$$

$$a_1(1.38) = 5520$$

$$a_1 = \frac{5520}{1.38} = 4000 \quad \text{SAR}$$

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

مثال :-

أودع شخص مبلغ 1000 ريال لمدة ما بفائدة بسيطة 10% سنوياً ،فوجد أن جملة ما له في نهاية المدة قد بلغ 1250 ريال أحسب مدة الاستثمار .

الحل :-

$a_1 = 1000$

n = ?

$d = \frac{10}{100} \times 1000 = 100$

المبلغ في نهاية المدة = $a_?$

$a_? = 1000 + (n)(100) = 1250$

$1250 - 1000 = n.100$

$250 = n.100$

$n = \frac{250}{100} = 2.5$ سنة

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحسب بالقانون :-

$$a_n = a_1 r^n$$

حيث جملة المبلغ في نهاية المدة = a_n

المبلغ في بداية المدة = a_1

نسبة الفائدة r = 1+

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

مثال :-

ادخر شخص مبلغ 8000 ريال بفائدة مركبة 9% لمدة خمس سنوات ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 8000$

r = 1+ 0.09 = 1.09

n = 5

$$a_5 = 8000\ (1.09)^5 = 12308.9 \text{ SAR}$$

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

مثال :-

ادخر شخص مبلغ 10000 ريال بفائدة مركبة 5% نصف سنوي لمدة 3.5 سنة ، فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة .

الحل :-

$a_1 = 10000$

$r = 1 + 0.10 = 1.10$

$n = 3.5$

$$a_{3.5} = 10000\ (1.10)^{3.5} = 13959.65 \text{ SAR}$$

تابع تطبيقات المتتالية في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :-

مثال :-

ادخر شخص مبلغ ما بفائدة مركبة 4% نصف سنوي لمدة 6 سنوات ، فوجد أن جملة المبلغ في نهاية المدة 15868.74322 ريال أوجد أصل المبلغ .

الحل :-

a_1 = ?

r = 1+ 0.08 = 1.08

n = 6

$$a_{3.5} = a_1 \ (1.08)^6$$

$$15868.74322 = a_1 \ (1.08)^6$$

$$a_1 = \frac{15868.74322}{1.08^6} = 10000 \text{ SAR}$$

المحاضرة (6)

المصفوفات والمحددات

MATRICES AND DETERMINANTS

1 – المصفوفات :-

المصفوفة : هي عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف واعمدة وتسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة A,B,C,..., ومن الأمثلة على المصفوفة .

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 12 & 3 \\ -5 & 5 & -6 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 2 \\ 0 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

تابع المصفوفات :-

رتبة المصفوفة :-

رتبة المصفوفة تساوي عدد الصفوف × عدد الاعمدة .

مثال :

رتبة المصفوفة A هي 3×4 وتكتب على الصورة $A_{3\times4}$.

رتبة المصفوفة Bهي 4×2وتكتب على الصورة $B_{4\times2}$.

رتبة العنصر :-

رتبة العنصر a هي موقعه في الصف والعمود

أي العنصر في الصف i والعمود j = a_{ij}

تابع المصفوفات :-

مثال :-

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{21} , a_{32} , a_{24}

الحل :-

العنصر a_{21} : العنصر في الصف الثاني العمود الأول a_{21} =-5

العنصر a_{32} : العنصر في الصف الثالث العمود الثاني a_{32} =-6

العنصر a_{24} : العنصر في الصف الثاني العمود الرابع a_{24} =7

أنواع المصفوفات :

1- المصفوفة الصفرية :-

المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار .

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

مصفوفة صفرية رتبتها 2×3

تابع أنواع المصفوفات :

2- المصفوفة المربعة :

المصفوفة المربعة هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة.

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 9 & -1 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة 2×2 (أي من الرتبة الثانية)

المصفوفة Bمصفوفة مربعة من الرتبة 3×3(أي من الرتبة الثالثة)

تابع أنواع المصفوفات :

3- المصفوفة القطرية :-

المصفوفة المربعة التي يكون جميع العناصر فيها غير القطر الرئيسي أصفار .

مثال :-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تابع أنواع المصفوفات :

4- المصفوفة المحايدة :

المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي تساوي واحد و يرمز لها بالرمز $\mathbb{I}_n$ حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها)

مثال :-

$$\mathbb{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbb{I}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تابع أنواع المصفوفات :

5- المصفوفة المثلثية :-

وتقسم إلى قسمين :

أ – المصفوفة المثلثية العليا :-

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار .

مثال :-

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 9 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

ب – المصفوفة المثلثية السفلى :-

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار .

مثال :-

$$\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 \\ 4 & 7 & 10 & 8 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المبدلة (Transpose of matrix):-

منقول المصفوفة أو مبدل المصفوفة هي تبديل الصفوف بالأعمدة و الاعمدة بالصفوف و يرمز لها بالرمز A^T .

مثال :-

أوجد منقول كل من المصفوفات التالية :

$$1\text{- } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2.3} \qquad 2 - B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3.3}$$

الحل

$$1\text{- } A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad 2 - B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة (Symatric matrix) :-

تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت $A = A^T$

مثال :-

اي من المصفوفات التالية متماثلة :

$$1\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad 2\text{-}\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل

$$1\text{-}\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\ ,\quad A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\ ,\ A \neq A^T$$

∴ Aليست متماثلة

$$2\text{-}\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix},\ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}\ ,\ B = B^T$$

∴ B متماثلة

العمليات على المصفوفات :

1- الجمع والطرح :

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة .

مثال :

أوجد ناتج ما يلي :-

1- $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

2- $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3}$

الحل

1- $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2\times3}$

2- $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3\times3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3\times3}$

تابع العمليات على المصفوفات :

2- الضرب بعدد ثابت :-

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد .

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي :-

1) 3A
2) 2B
3) 3A – 2B

تابع العمليات على المصفوفات :

الحل :-

1) $3A = 3 \times \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$

2) $2B = 2 \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$

3) $3A - 2B = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$

تابع العمليات على المصفوفات :

3- ضرب المصفوفات :-

عند ضرب مصفوفتين يجب أن تكون عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية وعند الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر a_{ij} في المصفوفة الناتجة .

و يتم الضرب : صف (صف من المصفوفة الأولى) في عمود (عمود من المصفوفة الثانية)

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4,3} , \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3,2}$$

احسب :-

1) AB
2) BA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4,3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3,2}$$

الحل :-

1)AB =

$$\begin{bmatrix} (1\times 2+4\times 3\pm 1\times -1) & (1\times 0+4\times 1\pm 1\times 4) \\ (5\times 2+6\times 3+2\times -1) & (5\times 0+6\times 1+2\times 4) \\ (2\times 2+1\times 3+7\times -1) & (2\times 0+1\times 1+7\times 4) \\ (3\times 2+0\times 3+4\times -1) & (3\times 0+0\times 1+4\times 4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4\times 2}$$

2) BA

لا تجوز عملية الضرب لأن عدد أعمدة الأولى لا تساوي عدد صفوف الثانية

تابع العمليات على المصفوفات :

ملاحظة :-

1- اذا كانت A_{mn} وكانت B_{nk} فإن $(AB)_{mk}$.

مثال :-

اذا كانت $A_{3\times5}$, $B_{5\times6}$ فأوجد رتبة AB.

الحل :-

$$A_{mn} \times B_{nk} = AB_{mk}$$

$$A_{3\times5} \times B_{5\times6} = AB_{3\times6}$$

و نستنتج من هذا المثال أن :-

$$AB \neq BA$$

تابع العمليات على المصفوفات :

مثال :-

اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فأوجد A^2

الحل :

$$A^2 = A \times A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (2 \times 2 + 4 \times 6) & (2 \times 4 + 4 \times 5) \\ (6 \times 2 + 5 \times 6) & (6 \times 4 + 5 \times 5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}$$

تابع العمليات على المصفوفات :

مثال :-

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت $C = AB \ , \ D = BA$

فأوجد ما يلي :-

$$C_{12} , C_{33} , D_{21} , D_{13}$$

تابع العمليات على المصفوفات :

الحل :-

1) حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة $C_{12} = B$

$$\therefore C_{12} = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 5 = 3 + 8 + 25 = 36$$

2) $C_{33} = 6 \times -1 + 4 \times 6 + 7 \times 0 = -6 + 24 + 0 = 18$

3) $D_{21} = 4 \times 3 + 2 \times 2 + 6 \times 6 = 12 + 4 + 36 = 52$

4) $D_{13} = \ 1 \times 5 + 1 \times 0 + -1 \times 7 = = 5 + 0 - 7 = -2$

عمليات الصف البسيط :

هي مجموعة من العمليات تقام على صفوف وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هي :-

1- ضرب صف بعدد ثابت .

2- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر .

3- تبديل صف مكان صف .

مثال :-

في المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب .

1- أضرب الصف الثاني بالعدد 2 .

2- اضرب الصف الاول بالعدد (-1) واجمعه الى الصف الثالث .

3- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث .

عمليات الصف البسيط :

هي مجموعة من العمليات تقام على صفوف وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هي :-

1- ضرب صف بعدد ثابت .

2- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر .

3- تبديل صف مكان صف .

مثال :-

في المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب .

1- أضرب الصف الثاني بالعدد 2 .

2- اضرب الصف الاول بالعدد (-1) واجمعه الى الصف الثالث .

3- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث .

تابع عمليات الصف البسيط :

الحل :-

$$1)\ 2r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2)\ -1r_1 + r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 4 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3)\ r_2 \leftrightarrow r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -5 \\ 12 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة و سوف نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .

خطوات إيجاد معكوس المصفوفة :-

تأخذ المصفوفة الشكل التالي :-

$$\begin{bmatrix} \text{العنصر الرابع} & \text{العنصر الأول} \\ \text{العنصر الثالث} & \text{العنصر الثاني} \end{bmatrix}$$

يتم وضع مصفوفة الوحدة بجانب المصفوفة الأصلية كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} \text{العنصر الرابع} & 1 & 0 & \text{العنصر الأول} \\ \text{العنصر الثالث} & 0 & 1 & \text{العنصر الثاني} \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

الهدف هو تحويل العناصر الأربعة إلى مصفوفة الوحدة .

ثم يتم ضرب الصف الأول في مقلوب العنصر الأول أي يتم ضرب في $\frac{1}{\text{العنصر الأول}}$ وبذلك نكون قد حولنا العنصر الأول إلى واحد .

ثم يتم ضرب الصف الأول الجديد في سالب العنصر الثاني و جمعة على الصف الثاني وبذلك نكون قد حولنا العنصر الثاني إلى صفر.

ثم يتم ضرب الصف الثاني في مقلوب العنصر الثالث أي يتم الضرب في $\frac{1}{\text{العنصر الثالث}}$ وبذلك نكون قد حولنا العنصر الثالث إلى واحد .

ثم يتم ضرب الصف الثاني الجديد في سالب العنصر الرابع و جمعة على الصف الأول وبذلك نكون قد حولنا العنصر الرابع إلى صفر.

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

سوف نعتمد على عملية الصف البسيط في ايجاد معكوس المصفوفة و سوف نرمز الي معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1} .

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل :-

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1} .

تابع معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \frac{1}{3}r_1 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 6 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \rightarrow -\frac{1}{3}r_2 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\rightarrow -\frac{4}{3}r_2 + r_1 \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \therefore A^{-1} = \left[\begin{array}{cc} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

تابع معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

للتحقق من الحل : $AA^{-1} = I$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{15}{9} + \frac{8}{3} & \frac{12}{9} - \frac{4}{3} \\ -\frac{30}{9} + \frac{10}{3} & \frac{24}{9} + \frac{-5}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{15}{9} + \frac{24}{9} & \frac{12}{9} - \frac{12}{9} \\ -\frac{30}{9} + \frac{30}{9} & \frac{24}{9} + \frac{-15}{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تابع معكوس المصفوفة :-

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & \frac{-3}{2} & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-5}{2} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -1 \end{array}\right]$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل :-

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1} .

تابع معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -3r_1 + r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{2}{9}r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{1}{2}r_2 + r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{12}{18} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{18} & \frac{-1}{9} \\ -\frac{3}{9} & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

مثال :-

أوجد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل :-

لإيجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 و تتحول I_2 إلى A^{-1} .

تابع معكوس المصفوفة (مقلوب المصفوفة) :-

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{22}{4} & -\frac{6}{4} & 1 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{4}{22}r_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6}{22} & -\frac{4}{22} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{-2}{22} & \frac{5}{22} \\ 0 & 1 & \frac{6}{22} & -\frac{4}{22} \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{22} & \frac{5}{22} \\ \frac{6}{22} & -\frac{4}{22} \end{bmatrix}$$

المحاضرة (7)

تابع المصفوفات والمحددات

MATRICES AND DETERMINANTS

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

اذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية :-

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

نعرف المصفوفات التالية :-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} , \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

حيث تسمى A مصفوفة المعاملات X مصفوفة المتغيرات ، B مصفوفة الثوابت ، وبالتالي يمكن التعبير عن نظام المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتي :-

$$AX = B$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

ولحل هذا النظام باستخدام عمليات الصف البسيط نستخدم الخطوات التالية :

1- نضع المصفوفة $[A|B]$.

2- نطبق عليها عمليات الصف البسيط .

3- ينتج $[I|C]$ حيث C تمثل مصفوفة الحل و تكون X = C .

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط .

$$3x + 2y = 7$$
$$4x - y = 2$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -4r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & -\frac{11}{3} & -\frac{22}{3} \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{3}{11}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

x=1 , y=2

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط .

$$5x + 2y = 23$$
$$6x + 10y = 58$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 23 \\ 58 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 23 \\ 6 & 10 & 58 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{5} r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 6 & 10 & 58 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & \frac{38}{5} & \frac{152}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{5}{38} r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{23}{5} \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{2}{5} r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{x=3 , y=4}$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

مثال :-

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط .

$$-5\,x + \frac{1}{3}\,y = -18$$

$$\frac{1}{2}\,x + 2y = 14$$

الحل :-

لابد من التخلص من الكسور أولاً عن طريق ضرب المعادلة كلها في مقام الكسر و من ثم تضرب المعادلة الاولى في 3 و الثانية في 2 و تصبح على الشكل :-

$$-15\,x + y = -54$$

$$x + 4y = 28$$

تابع حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط :-

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} -15 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} -54 \\ 28 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} -15 & 1 & -54 \\ 1 & 4 & 28 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{1}{15}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 1 & 4 & 28 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -1r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 0 & \frac{61}{15} & \frac{474}{15} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{15}{61}r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{15} & \frac{54}{15} \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \frac{1}{15}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \text{x=4 , y=6}$$

التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

تنتج شركة النجاح نوعين من الدفاتر المدرسية النوع الأول (دفتر 60 ورقة) و يباع بسعر 2 ريال و يحتاج إلى 3 ساعات عمل في قسم القص و 2 ساعة عمل في قسم التجميع ، و النوع الثاني (دفتر 120 ورقة) يباع بسعر 3 ريال و يحتاج إلى 2 ساعة عمل في قسم القص و 4 ساعات عمل في قسم التجميع ، فإذا علمت أن الساعات المتاحة في قسم القص هي 35 ساعة ، و 50 ساعة في قسم التجميع ، المطلوب باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن .

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتج / اقسام التشغيل	قسم القص	قسم التجميع	ثمن البيع
دفتر 60 ورقة (x)	3	2	2
دفتر 120 ورقة (y)	2	4	3
الطاقة المتاحة لكل قسم	35	50	

2- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- دالة الهدف (الربح / ثمن البيع) :- $p = 2x + 3y$

ب- القيود :-

$$3x + 2y = 35$$

$$2x + 4y = 50$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 35 \\ 50 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 35 \\ 2 & 4 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{3} r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 2 & 4 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{80}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{3}{8} r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{35}{3} \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow -\frac{2}{3} r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$ x=5 , y=10

ربح النموذج :-

p = 2 x + 3 y = $2 \times 5 + 3 \times 10 = 40\ SAR$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

تنتج شركة الفهد نوعين من المنتجات (x , y) و تستخدم نوعين من المواد الخام الخشب و الحديد فإذا علمت أن النوع الأول من المنتجات يستخدم 8 م من الخشب و 2 كجم من الحديد و النوع الثاني من المنتجات يستدم 10 م من الخشب و 4 كجم من الحديد ، و يبلغ ربح الوحدة من النوع الأول بسعر 100 ريال و النوع الثاني بسعر 150 ريال ، فإذا علمت أن كمية الخشب المتوافرة في المخزن هي 280 م من الخشب و 100 كجم من الحديد ، المطلوب : باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن .

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتجات / المواد الخام	الخشب	الحديد	الربح
x	8	2	100
y	10	4	150
الطاقة المتاحة	280	100	

2- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- الهدف (الربح) :- $p = 100x + 150y$

ب- القيود :-

$$8x + 10y = 280$$

$$2x + 4y = 100$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 280 \\ 100 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 8 & 10 & 280 \\ 2 & 4 & 100 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{8}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 2 & 4 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & \frac{12}{8} & \frac{240}{8} \end{bmatrix} \rightarrow \frac{8}{12}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{10}{8} & \frac{280}{8} \\ 0 & 1 & 20 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow -\frac{10}{8}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \end{bmatrix}$ x=10 , y=20

ربح النموذج :-

p = 100 x + 150 y = $100 \times 10 + 150 \times 20 = 4000\ SAR$

التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

تنتج شركة الأحلام للثلاجات نوعين من الثلاجات هما ثلاجة 10 قدم وثلاجة 12 قدم فإذا علمت أن كل نوع من هذه الثلاجات يمر بمرحلتين إنتاجيتين هما مرحلة التصنيع ومرحلة التشطيب. فإذا فرض أن الثلاجة 10 قدم تحتاج 4 ساعات عمل في مرحلة التصنيع وساعتين في مرحلة التشطيب، وأن الثلاجة 12 قدم تحتاج إلى 5 ساعات عمل في مرحلة التصنيع و 3 ساعات في مرحلة التشطيب. مع العلم بأن عدد الساعات المتاحة لهذا المصنع هي 2400 ساعة لمرحلة التصنيع، 1300 ساعة لمرحلة التشطيب فإذا كانت سياسة الإنتاج في المصنع هي استخدام كافة الطاقات المتاحة فالمطلوب تحديد عدد الوحدات المنتجة من كل نوع.

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :-

يمكن تلخيص بيانات المشكلة في الجدول التالي :-

النوع / مرحلة الانتاج	التصنيع	التشطيب
10 قدم (x)	4	2
12 قدم (y)	5	3
الساعات المتاحة	2400	1300

وبفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 10قدم = x وحدة

وبفرض أن عدد الوحدات المنتجة من الثلاجة 12قدم = y وحدة

ومن ثم يمكن صياغة المشكلة الرياضية السابقة كنظام للمعادلات كما يلي :-

$$4\,x + 5\,y = 2400$$

$$2\,x + 3\,y = 1300$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 2400 \\ 1300 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2400 \\ 2 & 3 & 1300 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 2 & 3 & 1300 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -2r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & \frac{1}{2} & 100 \end{bmatrix} \rightarrow 2r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & 600 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 200 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \end{bmatrix}$$ x=350 , y=200

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

الجدول التالي يوضح تلخيص لإحدى مشاكل التي تواجه إدارة الانتاج بإحدى الشركات :-

المنتجات / المواد الخام	النحاس	الحديد	الربح
x	4	6	200
y	5	2	300
الطاقة المتاحة	230	180	

المطلوب :-

باستخدام اسلوب المصفوفات أوجد الكمية المثلى من الانتاج و التي تحقق أعلى ربح ممكن .

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :-

1- صياغة المشكلة رياضياً :-

أ- الهدف (الربح) :- $p = 200x + 300y$

ب- القيود :-

$$4x + 5y = 230$$

$$6x + 2y = 180$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 230 \\ 180 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 230 \\ 6 & 2 & 180 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{4}r_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{230}{4} \\ 6 & 2 & 180 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -6r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{230}{4} \\ 0 & -\frac{22}{4} & -165 \end{bmatrix} \rightarrow -\frac{4}{22}r_2 \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{230}{4} \\ 0 & 1 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -\frac{5}{4}r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 30 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$ x=20 , y=30

ربح النموذج :-

$$p = 200x + 300y$$

$$P = 200 * 20 + 300 * 30 = 4000+9000 = 13000 \text{ SAR}$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

تنتج شركة صناعية نوعين من المنتجات. وكل نوع له 3 أحجام صغير، متوسط، كبير. والجدول التالي يبين الإنتاج (بالآلاف) في المصنع الأول.

الحجم / النوع	صغير	متوسط	كبير
الأول	20	28	30
الثاني	16	22	20

كما يبين الجدول التالي مستوى الإنتاج (بالآلاف) في المصنع الثاني.

الحجم / النوع	صغير	متوسط	كبير
الأول	30	40	36
الثاني	24	20	28

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

والمطلوب :

(1) أكتب المصفوفة التي تعبر عن مستوى الإنتاج الكلى في كلا المصنعين.

(2) إذا قررت الشركة أن تفتتح مصنعاً ثالثاً بطاقة إنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثاني. أكتب المصفوفة التي تعبر عن مستوى الإنتاج في المصنع الثالث.

(3) حدد المصفوفة التي تعبر عن حجم الإنتاج الكلى في الشركة.

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :

(1) مستوى الإنتاج في المصنعين معاً يساوى إنتاج المصنع الأول مضافاً إليه إنتاج المصنع الثاني.

$$\begin{bmatrix} 66 & 68 & 50 \\ 48 & 42 & 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 & 28 & 20 \\ 20 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

أي ينتج المصنعين معاً :

50 وحدة حجم صغير من النوع الأول.

68 وحدة حجم متوسط من النوع الأول.

66 وحدة حجم كبير من النوع الأول.

40 وحدة حجم صغير من النوع الثاني.

42 وحدة حجم متوسط من النوع الثاني.

48 وحدة حجم كبير من النوع الثاني.

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

(2) حيث أن المصنع الثالث طاقته الإنتاجية تزيد 20% عن طاقة المصنع الثاني فإنه لإيجاد طاقة المصنع الثالث الإنتاجية نضرب مستوى إنتاج المصنع الثاني في (1.20).

الطاقة الإنتاجية للمصنع الثالث

$$\begin{bmatrix} 36 & 40 & 30 \\ 28 & 20 & 24 \end{bmatrix} 1.20 = \begin{bmatrix} 43.2 & 48 & 36 \\ 33.6 & 24 & 28.8 \end{bmatrix}$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

مثال :-

- تقوم شركة أثاثكو بتصنيع عدة منتجات من الأخشاب، يتمثل أهمها في الكراسي والطاولات، حيث يبلغ ثمن الكرسي الواحد في السوق 10$ ،ويحتاج إلى ساعة عمل واحدة في قسم النشر، وساعة عمل واحدة في قسم التجميع، بينما يبلغ ثمن الطاولة 40$ ، وتحتاج إلى ساعتين عمل في قسم النشر، وخمسة ساعات عمل في قسم التجميع ، وفي اللحظة التي يستوعب فيها السوق جميع المنتجات من كلا المنتجين، لا يستطيع مدير الشركة الحصول شهريا على أكثر من مائة ساعة عمل في قسم النشر، كما لا يستطيع الحصول على أكثر من مائة وخمسين ساعة عمل في قسم التجميع. وفي هذه الحالة يحتاج مدير الشركة إلى أن يحدد مزيج الإنتاج من الكراسي والطاولات الذي يحقق لمؤسسته أعلى عائد .

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

الحل :-

1- جدول تمهيد الحل :-

المنتجات / المواد	النشر	التجميع	ثمن البيع
الكراسي x	1	1	10
الطاولات y	2	5	40
الطاقة القصوى	100	150	

2- صياغة المشكلة على شكل معادلات :-

أ- دالة الربح :- $p = 10x + 40y$

ب- القيود :-

$$x + 2y = 100$$

$$x + 5y = 150$$

تابع التطبيقات التجارية للمصفوفات :-

تابع الحل :-

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ مصفوفة المتغيرات

$B = \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \end{bmatrix}$ مصفوفة الثوابت

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 1 & 5 & 150 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -1r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 0 & 3 & 50 \end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{3}r_2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & \frac{50}{3} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow -2r_2 + r_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{200}{3} \\ 0 & 1 & \frac{50}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{200}{3} \\ \frac{50}{3} \end{bmatrix} \text{x=}\frac{200}{3}, \quad \text{y=}\frac{50}{3}$$

ربح النموذج :-

$$p = 10\,x + 40\,y = 10 \times \frac{200}{3} + 40 \times \frac{50}{3} = \frac{4000}{3} \quad SAR$$