المحاضرة السادسة – الاسبوع الرابع

الفصل الثاني : المتغيرات العشوائية و التوزيعات الاحتمالية المنفصلة

- **التوقع الرياضي للمتغير العشوائي :**

تعريف : التوقع الرياضي للمتغير العشوائي المنفصل الذي اقترانه الاحتمالي $f(x)$ هو المقدار التالي :

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x)$$

مثال : اوجد التوقع الرياضي للمتغير X و الذي توزيعه الاحتمالي موضح في الجدول التالي :

X	f(x)	Xf (x)
3	0.3	0.9
4	0.2	0.8
5	0.2	1.0
6	0.1	0.6
7	0.2	1.4

الحل : من خلال ضرب القيمة x في f(x) كما هو موضح في العمود الثالث و بعملية الجمع نحصل على

$$\mu = E(X) = 4.7$$

مثال : اوجد توقع X اذا كان $x = 1,2,3,4,5$; $f(X) = \frac{x}{15}$ ، لغير ذلك $f(x) = 0$

الحل :

$$\mu = E(X) = \sum_x xf(x) = 1 \times \frac{1}{15} + 2 \times \frac{2}{15} + 3 \times \frac{3}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{5}{15}$$

$$= \frac{1+4+9+16+25}{15} = \frac{55}{15} = \frac{11}{3}$$

- **خواص التوقع الرياضي**

نظرية (1) : لكل متغير عشوائي X , اذا كان a , b عددين ثابتين فان :

$$E(aX + b) = aE(x) + b$$

وهذا يعني انه اذا ضرب المتغير العشوائي بعدد ثابت وليكن a , و اضيف له عدداً ثابتاً آخر وليكن b فان التوقع الرياضي يتأثر بنفس الطريقة فيصبح بعد التعديل مساوياً للتوقع الاصلي مضروبا في a و مضافا اليه العدد b .

مثال : اذا كان $E(X) = 6$, اوجد

1- $E(3X + 5)$

2- $E(0.5X - 2)$

الحل :

1- $E(3X + 5) = 3 \times 6 + 5 = 23$

2- $E(0.5X - 2) = 0.5 \times 6 - 2 = 1$

مثال : اذا كان $E(X) = 10$ وكان $E(ax + 5) = 25$, اوجد قيمة a ؟

الحل :

$$E(ax + b) = aE(X) + b = a \times E(X) + b = a \times 10 + 5 = 25 \rightarrow 10a = 20 \rightarrow a = 2$$

تمرين : اعتماداً على الجدول التالي و الذي يمثل توزيع احتمالي منفصل للمتغير العشوائي x

X	f (x)
1	0.3
2	0.4
3	0.1
4	A

اوجد :

1- قيمة المجهول a

2- المتوقع الرياضي للمتغير العشوائي x

3- $E(2X + 10)$ ؟

- **تباين المتغير العشوائي X**

تعريف : اذا كان μ توقع المتغير العشوائي X تباين X و يعبر عنه بالرمز σ^2 بالصيغة التالية :

$$\sigma^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$$

مثال : جد تباين X اذا كان توزيعه الاحتمالي كما يلي :

X	f (x)
10	$\frac{1}{4}$
20	$\frac{1}{4}$
30	$\frac{1}{4}$
40	$\frac{1}{4}$

الحل : نجد اولا توقع x كما يلي :

$$\mu = E(X) = 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{4} + 30 \times \frac{1}{4} + 40 \times \frac{1}{4} = 25$$

و لحساب التباين ، نجد ان :

$$\sigma^2 = \sum_x (X-\mu)^2 f(x)$$

$$= (10-25)^2 \times \frac{1}{4} + (20-25)^2 \times \frac{1}{4} + (30-25)^2 \times \frac{1}{4} + (40-25)^2 \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{225+25+25+225}{4} = 125$$

اما الجذر التربيعي الموجب للتباين فيسمى الانحراف المعياري و يعبر عنه بالرمز σ حيث نلاحظ ان الانحراف المعياري للمثال السابق هو

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{125}$$

- **خواص التباين :**

اذا كان X متغيرا عشوائيا منفصلا معدله μ وتباينه σ_X^2 وكان لدينا التحويل $Y = aX + b$ حيث b,a ثابتان فان

$$\sigma_y^2 = a^2\, \sigma_x^2$$

اما الانحراف المعياري للمتغير Y فهو

$$\sigma_y = |a|\sigma_y$$

مثال : اذا كان للمتغير X, $\mu_2 = 50$, $\sigma_X^2 = 16$ اوجد معدل Y وتباينه و انحرافه المعياري اذا كان $Y = 3X - 4$ ؟

الحل :

$$\mu_Y = E(3X-4) = 3\mu_X - 4 = 3 \times 50 - 4 = 146$$

$$\sigma_Y^2 = 3^2 \times \sigma_X^2 = 9 \times 16 = 144$$

$$\sigma_Y = \sqrt{144} = 12$$

- **توزيعات احتمالية خاصة :**

هنالك كثير من المتغيرات العشوائية التي شاع استعمال توزيعاتها الاحتمالية بحيث من المفيد دراسة كل منها على حده ، ومن هذه التوزيعات

1- توزيع ذات الحدين Binomial Distribution :

في كثير من التجارب تكون النتيجة احد الامرين اما نجاح او فشل , وتتألف هذه التجارب من تكرار و اعادة المحاولات المستقلة عن بعضها البعض , فمثلا في تجربة القاء قطعة نقد فان النتيجة اما ظهور صورة او كتابة و تكون نتيجة أي محاولة مستقلة عن الاخرى وهكذا . ان هذه المحاولات تسمى محاولات بيرنوللي

تعريف : محاولات بيرنوللي Bernoulli Trials :

كل تجربة تحقق الشروط التالية تسمى محاولات بيرنوللي :

1- نتيجة كل محاولة احد الأمرين , نسمي "احدها" نجاح و الأخرى "بالفشل"
2- نتيجة كل محاولة مستقلة عن أي المحاولة الأخرى
3- احتمال النجاح في كل محاولة عدد ثابت يرمز له بالرمز P وبذلك فان احتمال الفشل هو q = 1-p

<u>ومن الامثلة على هذه التجارب :</u> فحص مجموعة من المصابيح الكهربائية , فحص مجموعة من الطلاب لمعرفة حاجته الى نظارات طبية

تعريف : اذا اجريت تجربة بيرنوللي n من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة p وكان x يمثل عدد النجاحات في المحاولات كلها فان :

$$\mathbf{P\ (X = x) = \ nCx \times p^{x} \times (1 - p)^{n - x}; x = 0, 1, 2, \ldots, n}$$

وهذا هو التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين ويرمز له بالرمز b(x;n;p) .

مثال : رميت قطعة نقد متزنة اربع مرات , جد التوزيع الاحتمالي لهذه التجربة ثم اوجد احتمال ظهور الصورة اربع مرات ؟

الحل : ان هذه التجربة تحقق شروط تجربة ذات الحدين حيث ان $n = 4$, $p = \frac{1}{2}$, ومنها

$$b\left(x; 4; \frac{1}{2}\right) = p(X = x) = 4Cx \times (\frac{1}{2})^{x} \times (1 - \frac{1}{2})^{4-x}; x = 0,1,2, \ldots$$

وعند X = 4 ، ينتج ان :

$$b\left(4; 4; \frac{1}{2}\right) = \ p(x = 4) = \ 4C4 \ \times (\frac{1}{2})^{4} \ \times (1 - \frac{1}{2})^{4-4} = 1 \times (\frac{1}{2})^{4} \times (\frac{1}{2})^{0} = \ \frac{1}{16}$$

ويمكن حساب احتمال عدم ظهور الصورة (P (X=0 او ظهور الصورة مرة واحدة (P(X=1 وهكذا .

تمرين 1: رميت زهرة نرد منتظمة ثلاث مرات , ما احتمال عدم ظهور العدد 6 فيها , ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرات ؟

تمرين 2 : في تجربة ذات الحدين , اذا كان $n = 15$, $p = 0.1$ اوجد $p(x \leq 2)$ حيث X يمثل عدد النجاحات ؟

- **خواص التوقع الرياضي و التباين العشوائي الذي يتبع توزيع ذات الحدين :**

نظرية : اذا كان X متغيرا عشوائيا يتبع توزيع ذات الحدين (b(x; n; p فان :

1) توقع X هو $\mu = E(X) = np$

2) تباين X هو $\sigma^{2} = npq$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و التباين لمتغير ذات الحدين اذا كان $n = 60$, $p = \frac{2}{3}$

الحل : $\mu = E(X) = 60 \times \frac{2}{3} = 40$

$$\sigma^{2} = npq = 60 \ \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{40}{3}$$

2- توزيع بواسون :

ان التجارب التي تعطينا عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة تسمى بواسون . و الفترة الزمنية قد تكون دقيقة او يوما او اسبوعا او شهرا او غير ذلك اما المنطقة المحددة فقد تكون صفحة كتاب او مترا مربعا او غير ذلك

وبشكل عام تجربة بواسون تحقق الشروط التالية :

1- معدل النجاحات التي تحدث في فترة زمنية معينة او منطقة محددة معلوم وليكن λ

2- احتمال حدوث نجاح حادث واحد في فترة زمنية قصيرة او منطقة زمنية صغيرة يتناسب مع طول تلك الفترة او مساحة تلك المنطقة .

3- احتمال حدوث نجاحين او اكثر في فترة زمنية قصيرة او منطقة صغيرة مهمل .

4- حدوث النجاحات في أي فترة زمنية مستقل عن حدوث أي نجاحات اخرى في عدة فترات زمنية منفصلة .

تعريف : توزيع بواسون

التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي بواسون X الذي يمثل عدد النجاحات في فترة زمنية معينة او منطقة محددة هو

$$P(x; \lambda) = \ P(X = x) = \ \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}; x = 0,1,2, \ldots$$

حيث λ هي معدل النجاحات في الفترة الزمنية المعينة او المنطقة المحددة e= 2.718

مثال : تصل المكالمات الهاتفية الى مقسم احد المستشفيات بمعدل مكالمة واحدة في الدقيقتين

ما احتمال وصول كل من الحوادث التالية :

أ) صفر مكالمة في اربع ؟

ب) 4 مكالمات في فترة اربع دقائق ؟

الحل : نفرض ان X = عدد المكالمات في فترة اربع

اذن $\lambda = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

ان X يتبع توزيع بواسون الذي معدله $\lambda = 2$ وينتج ان

أ) عدم وصول أي مكالمة في اربع دقائق هو :

$$P(0;2) = P(X=0) = \frac{e^{-2}2^{0}}{0!} = e^{-2} = 0.1353$$

ب) وصول اربع مكالمتا في اربع دقائق هو :

$$p(4;2) = p(x=4) = \frac{e^{-2}2^{4}}{4!} = \frac{16}{24}e^{-2} = 0.0902$$

تمرين : معدل حوادث السيارات عند اشارة ضوئية 3 في الاسبوع الواحد . ما احتمال عدم حدوث أي حادث في اسبوع معين ، ما احتمال حادثين او اقل في اسبوع معين ؟

- **خواص التوقع الرياضي و التباين للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون :**

نظرية : اذا كان X متغير بواسون العشوائي الذي توزيعه الاحتمالي $P(x;\lambda)$ حيث λ معدل عدد الحوادث في فترة زمنية معينة فان توقع X هو $E(X) = \lambda$ وتباين X هو $\sigma = \frac{2}{x} = \lambda$

مثال : ما هو التوقع الرياضي و الانحراف المعياري لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون اذا كان $\lambda = 25$ ؟

الحل : $E(X) = 25 , \sigma_X = 5$ .. لاحظ ان الانحراف المعياري هو الجذر التربيعي للتباين .