المحاضرة (٤)

تابع التوزيعات الإحتمالية

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

مثال :-

إذا كان احتمال إصابة الهدف لشخص ما هو $\frac{1}{5}$ أتيحت له فرصة الرماية في 10 محاولات

1- ما هو احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر

2- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة

الحل

X متغير عشوائي يمثل عدد مرات النجاح فى إصابة الهدف فى 10 محاولات

$n = 10,\ p = 1/5,\ q = 4/5\ ;\quad x = 0, 1, 2, \ldots, 10$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

1- احتمال إصابة الهدف مرتين على الأكثر:-

أي احتمال x = 0 or x = 1 or x = 2

$$P(X \le 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$

$$= \binom{10}{0}(1/5)^0(4/5)^{10} + \binom{10}{1}(1/5)^1(4/5)^9 + \binom{10}{2}(1/5)^2(4/5)^8$$

$$= (0.8)^{10} + 2(0.8)^9 + 1.8(0.8)^8 = 0.6778$$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

2- احتمال إصابة الهدف مرة واحدة

أي احتمال x = 1

$$P(X = 1) = \binom{10}{1}(1/5)^1(4/5)^9$$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

مثال :-

ألقيت عملة ثلاث مرات. فإذا كان X يمثل عدد ظهور الصور فأوجد التوزيع الاحتمالي وكذلك التوقع والتباين

الحل

احتمال النجاح (ظهور صورة) p = 0.5

احتمال الفشل (ظهور كتابة) q = 0.5

عدد الرميات المستقلة n = 3

X متغير عشوائي يمثل عدد الصور يأخذ القيم 0, 1, 2, 3

ويكون له توزيع ذي الحدين:

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

$$p(X=x)=\binom{3}{x}(0.5)^{x}(0.5)^{3-x}\quad,\quad x=0,1,2,3$$

$$p(X=0)=\binom{3}{0}(0.5)^{0}(0.5)^{3-0}=\frac{3!}{0!(3-0)!}(1)(1/8)$$

$$=\frac{1}{8}$$

$$p(X=1)=\binom{3}{1}(0.5)^{1}(0.5)^{3-1}=\frac{3!}{1!(3-1)!}(1/2)(1/2)^{2}$$

$$=\frac{3\times 2\times 1}{1\times 2\times 1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

$$p(X=2)=\binom{3}{2}(0.5)^2(0.5)^{3-2}=\frac{3!}{2!(3-2)!}(1/2)^2(1/2)^1$$
$$=\frac{3\times2\times1}{2\times1\times1}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$p(X=3)=\binom{3}{3}(0.5)^3(0.5)^{3-3}=\frac{3!}{3!(3-3)!}(1/2)^3(1/2)^0$$
$$=\frac{3\times2\times1}{3\times2\times1\times0!}\times\frac{1}{8}\times1=\frac{1}{8}$$

التوقع $E(X) = np = 3(0.5) = 1.5$

التباين $Var(X) = npq = 3(0.5)(0.5) = 0.75$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

مثال:-

وجد في إنتاج أحد المصانع أنه من بين 1000 وحدة إنتاج يوجد 150 وحدة معيبة. أخذت عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

١- الوحدات المختارة كلها سليمة

٢- على الأكثر توجد واحدة معيبة

٣- على الأقل توجد وحدتان معيبتان

٤- القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

الحل

احتمال النجاح (الحصول على وحدة معيبة) $p = 150/1000 = 0.15$

احتمال الفشل (عدم الحصول على وحدة معيبة) $q = 1-p = 1-0.15 = 0.85$

عدد المحاولات (عينة بإرجاع مكونة من 5 وحدات) $n = 5$

X متغير عشوائي يمثل عدد الوحدات المعيبة يأخذ القيم $0, 1, 2, 3, 4, 5$

ويكون له توزيع ذي الحدين:

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

$$p(X=x)=\binom{5}{x}(0.15)^x(0.85)^{5-x}\quad,\quad x=0,1,2,3,4,5$$

$$p(X=0)=\binom{5}{0}(0.15)^0(0.85)^{5-0}=\frac{5!}{0!(5-0)!}(1)(0.85)^5=0.4437$$

$$p(X\le 1)=\binom{5}{0}(0.15)^0(0.85)^5+\binom{5}{1}(0.15)^1(0.85)^4$$

$$=0.4437+\frac{5!}{1!4!}(0.15)(0.522)$$

$$=0.4437+5\times 0.0783=0.4437+0.3915=0.8352$$

تابع توزيع ثنائي الحدين :-

$$p(X=x)=\binom{5}{x}(0.15)^x(0.85)^{5-x}\quad,\quad x=0,1,2,3,4,5$$

٣- على الأقل توجد وحدتان معيبتان يعن أن $X \ge 2$

$$P(X\ge 2)=1-p(X<2)$$

$$=1-[p(X=0)+p(X=1)]$$

$$=1-0.8325=0.1648$$

٤ – القيمة المتوقعة و التباين للوحدات المعيبة .

القيمة المتوقعة $= \hat{n}.P = 5\times 0.15 = 0.75$

ب - توزيع بواسون:-

توزيع بواسون هو توزيع احتمالي منفصل آخر يستخدم لتحديد احتمال وقوع عدد معين من النجاحات في وحده الزمن، وذلك عندما تكون الأحداث أو "النجاحات " مستقلة عن بعضها البعض وعندما يبقى متوسط عدد النجاحات ثابتاً لوحدة الزمن . عندئذ :

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$x = 0,1,2,\ldots$

حيث : x =العدد المعين من النجاحات.

P(x) =احتمال عدد x من النجاحات.

e =أساس نظام اللوغاريتمات الطبيعي وتوجد في بعض الآلات الحاسبة، وقيمتها هي: $e = 2.718$ تقريبا، ويمكن حساب قيمتها باستخدام الآلة الحاسبة.

$x!$ = مضروب العدد x " ويساوي: $x! = x(x-1)(x-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$

μ = المتوسط

تابع توزيع بواسون:-

- يشتق توزيع بواسون من توزيع ذي الحدين عندما يكون :-
  - عدد المحاولات n كبير جدا
  - بينما يكون احتمال النجاح p صغير بحيث تبقى np قيمة ثابتة معتدلة
- يوصف متغيرات عشوائية متقطعة تعبر عن عدد كبير من الحوادث مثل:
  - عدد حوادث السيارات في الشهر داخل مدينة كبيرة
  - عدد الكرات الحمراء في عينة الدم
  - عدد الأخطاء المطبعية في الصفحات المختلفة للكتاب
  - عدد القطع التالفة في الإنتاج الكلى لسلعة معينة

توزيع بواسون فانXإذا كان للمتغير

التوقع $E(X) = \lambda$

التباين $Var(X) = \lambda$

تابع توزيع بواسون:-

مثال :-

في كمية كبيرة من القطع المصنعة، وكان معلوما أن بها نسبة 0.3% من القطع المعيبة. أخذت منه عينة بإرجاع عشوائية حجمها 350 قطعة. احسب الاحتمالات الآتية:

١) وجود قطعة معيبة
٢) وجود قطعتان معيبتان
٣) عدم وجود أية قطع معيبة
٤) وجود على الأكثر وحدتن معيبتان

عملية سحب العينة تمثل سلسلة عددها n=350
واحتمال أن تكون القطعة معيبة (النجاح) p=0.003
واضح n كبيرة و p صغيرة

$\lambda = np = 350(0.003) = 1.05$

تابع توزيع بواسون:-

بفرض أن X يمثل عدد القطع المعيبة في العينة له توزيع بواسون

$$p(X = x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-1.05}\frac{1.05^x}{x!} \qquad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

١) **وجود قطعة معيبة في العينة**

$$p(X = 1) = e^{-1.05}\frac{1.05^1}{1!} = (0.3499)(1.05) = 0.367$$

٢) **وجود قطعتان معيبتان في العينة**

$$p(X = 2) = e^{-1.05}\frac{1.05^2}{2!} = (0.3499)(0.55125) = 0.193$$

٣) **عدم وجود أي قطع معيبة في العينة**

$$p(X = 0) = e^{-1.05}\frac{1.05^0}{0!} = 0.350$$

تابع توزيع بواسون:-

٤) وجود على الأكثر وحدتان معيبتان

$$P(X \leq 2) = p(X=0) + p(X=1) + p(X=2)$$
$$= 0.350 + 0.367 + 0.193$$
$$= 0.91$$

تابع توزيع بواسون:-

مثال :-

إذا كان عدد الأخطاء المطبعية في كتاب يتكون من 600 صفحة هو 50 خطأ فإذا كانت الأخطاء تتوزع توزيعا عشوائيا. فما احتمال إذا اختيرت 10 صفحات عشوائيا أن لا تحتوى على أخطاء.

الحل

بفرض أن X يمثل عدد الأخطاء في كل صفحة وأن عدد المحاولات (الصفحات) تمثل سلسلة من محاولات برنولي عددها $n = 10$

ونسبة الخطأ (النجاح) هي

$$p = \frac{50}{600} = 0.083$$

وعليه فإن

$$\lambda = np = 10(0.083) = 0.83$$

وبالتالي فإن لـ X توزيع بواسون:

تابع توزيع بواسون:-

$$p(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-0.83}\frac{0.83^k}{k!}$$

k = 0, 1, 2, 3, ...

احتمال أن لا يوجد أخطاء يساوى

$$P(X=0)=\frac{e^{-0.83}\,0.83^0}{0!}$$

= 0.436

مثال:-

إذا كان من المعلوم أن عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر تتبع توزيع بواسون بمتوسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف المتغير العشوائي x بأنه عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

المطلوب:

- ما نوع المتغير العشوائي؟
- اكتب شكل دالة الاحتمال لهذا المتغير.
- احسب الاحتمالات التالية:
  - احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتين خلال الشهر؟
  - احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟
- احسب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد الوحدات المستهلكة.
- حدد شكل التوزيع.

الحل:-

عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة متغير كمي منفصل، ومدى هذا المتغير في هذه الحالة هو:

$$X : \{x = 0,1,2,3,..\}$$

شكل دالة الاحتمال:

بما أن متوسط عدد الوحدات التي تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\,\mu^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3}\,3^{x}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,..$$

حساب الاحتمالات:

حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتين خلال الشهر، $p(2)$

$$P(2) = \frac{e^{-3}\,3^{2}}{2!} = \frac{0.0498 \quad (9)}{2 \times 1} = 0.22404$$

تابع الحل:-

احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:

$$P(X \le 3) = p(3) + p(2) + p(1) + p(0)$$

$$= \left[\frac{3^{3}}{3!} + \frac{3^{2}}{2!} + \frac{3^{1}}{1!} + \frac{3^{0}}{0!}\right]\left[\frac{0.0498}{1}\right]$$

$$= [0.0498]\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498 \quad (13) = 0.6474$$

حساب الوسط الحسابي، والانحراف المعياري لعدد حالات الاستجابة:

الوسط الحسابي (μ) في حالة التوزيع بواسون هو معلمة معطاة هي: $\mu = 3$

في هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط الحسابي: أي أن: $\sigma^{2} = \mu = 3$

ومن ثم يكون الانحراف المعياري هو: $\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$

ويمكن حساب معامل الاختلاف النسبي، بتطبيق المعادلة التي سبق استخدامها ، وهو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

تحديد شكل التوزيع:

دائما توزيع بواسون موجب الالتواء

مثال:-

يتلقى قسم شرطة فى المتوسط **5** مكالمات في الساعة فيكون احتمال تلقى مكالمتين في ساعة مختارة عشوائياً هو :

$$P(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-5}5^{x}}{x!} = \quad , \quad x = 0,1,2,\ldots$$

$$= \frac{(25)(0.00674)}{(2)(1)} = 0.08425$$

التوزيع الإحصائي :-

و هو الشكل الذي تأخذه مجموعة البيانات، وشكل البيانات مهم جدا في تحليلها ووصفها وكخطوة تسبق قرار استخدام أي اسلوب احصائي .

ويرتبط التوزيع الاحصائي عادة بنوعين من البيانات المتصلة والمنفصلة، ويناسب النوع المنفصل المقاييس الاسمية والرتبية ، وهناك بعض المقياس المنفصلة ثنائية أي انه لا يوجد بها الا قيميتين، وهي لا تسمي توزيعات طبيعية وانما تسمى توزيعات ثنائية ، ومن أهم مقاييس التوزيعات المنفصلة مقياس ذو الحدين وذلك عاند لان الاجابة على المقياس الاسمي اما نعم أو لا ، ولذلك غالبا ما يرمز لها في الحاسب بصفر (غياب الصفة) [ذكور – لا] أو ١ (وجود الصفة) [اناث – نعم] .

أما التوزيعات الاحصائية المتصلة فهي ذات أهمية كبيرة في العلوم الإحصائية رذلك لأن اغلب الاختبارات الاحصائية تتعامل مع هذا النوع من البيانات.

التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المتصلة:

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية المتصلة لها دوال كثافة احتمال محددة ومنها:

- التوزيع الطبيعي
- التوزيع الطبيعي (القياسي) المعياري
- توزيع t

وسنقوم في هذه المحاضرة بتناول هذه التوزيعات بشيء من التوضيح والتفصيل:

وكما أوضحنا أن **المتغير العشوائي المتصل x** هو ذلك المتغير الذي يمكن أن يأخذ عددا لا نهائياً من القيم المعلومة، واحتمال أن تقع **x** داخل أي فترة يمثلها مساحة التوزيع الاحتمالي (ويسمى أيضاً دالة الكثافة) داخل هذه الفترة، والمساحة الكلية تحت المنحنى (الاحتمال) تساوى **1**

التوزيع الطبيعي

أ- التوزيع الطبيعي:

هو أفضل وأكثر التوزيعات الاحتمالية المتصلة استخداماً في النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات يمكن تقريبها إلى هذا التوزيع .

والتوزيع الطبيعي هو توزيع احتمالي متصل، وهو جرسي الشكل ومتماثل حول الوسط الحسابي، ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول الوسط الحسابي .

خصائص التوزيع الطبيعي:

يعتبر التوزيع الطبيعي من أهم أنواع التوزيعات الاحصائية المتصلة **ومن خصائصه** انه:

- توزيع جرسي أي يشبه الجرس.
- توزيع متصل
- توزيع متماثل حول الوسط
- الالتواء (الاطراف) والتفلطح (القمة) يساوي صفر.
- يحوي منوال ووسط ووسيط واحد وذات قيم متساوية بمعنى أن الجزء الذي على يمين الوسط مطابق للجزء الايسر
- الذيلين الايمن والايسر يقتربان من الخط الافقي ولكن لا تلامسه
- المساحة الكلية تحت المنحنى تساوي واحد صحيح

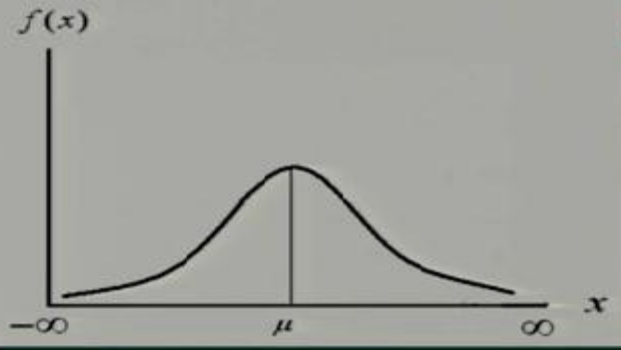
تابع خصائص التوزيع الطبيعي:

•منحنى دالة الاحتمال للتوزيع الطبيعي له خاصية شكل الجرس. ويتحدد شكل الجرس تماماً لأي توزيع طبيعي خاصة إذا علمنا الوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ لهذا التوزيع.

•تدل قيمة μ على مكان مركز الجرس، كما تدل σ على كيفية الانتشار.

•القيمـــة الصغـــيرة لـ σ تعني أن لدينا جرس طويل مدبب، والقيمة الكبيرة لـ σ تعني أن الجرس قصير ومفرطح.

والشكل التالي يوضح ذلك:



تابع خصائص التوزيع الطبيعي:

والتوزيع الطبيعي وتطبيقاته الاحصائية ليس موضوعا جديدا بل عرف منذ القرن السابع عشر الميلادي ومن ابرز الدراسات المعروفة تلك الدراسة البريطانية التي اخذت اطوال ٨٥٨٥ من الافراد البريطانيين في القرن التاسع عشر وعمل هذا المنحنى وبالتالي تم اعتبار هذه العينة تمثل التوزيع الطبيعي.

معالم هذا التوزيع:

توجد معلمتين لهذا التوزيع هما :

الوسط الحسابي : $E(x) = \mu$ والتباين : $\text{var}(x) = \sigma^2$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير بالرموز : $x \sim N(\mu, \sigma^2)$ ويعني ذلك أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ ، وتباين σ^2 .

التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) :-

- احتمال وقوع أية مشاهدة على بعد انحراف معياري واحد من الوسط الحسابي هو 0.6827
- احتمال وقوع أي مفردة على بعد إنحرافين معياريين من الوسط الحسابي هو 0.9545
- احتمال وقوع أية مفردة على بعد ثلاثة انحرافات معيارية من الوسط الحسابي هو 0.9973

والشكل التالي يوضح ذلك:

العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي القياسي

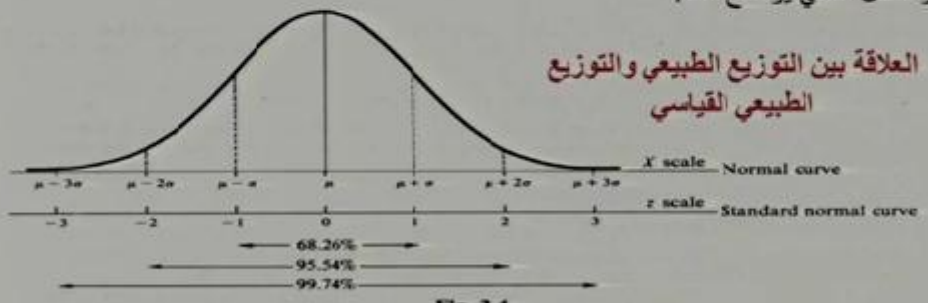


Fig. 3-4

مثال :-

تم دراسة متوسط طول الطالب في كلية إدارة الأعمال هو ١٨٠ سم و ذلك بانحراف معياري ١٠ سم تم اختيار أحد الطالب عشوائياً فإذا علمت أن هذه الظاهرة تتبع التوزيع الطبيعي فأوجد :-

١-احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٧٠ سم و ١٩٠ سم ((p(170<x<190)).

٢-احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٦٠ سم و ٢٠٠ سم ((p(160<x<200)).

٣-احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٥٠ سم و ٢١٠ سم ((p(150<x<210)).

٤- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٩٠ سم ((p(x<190)).

٥- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من ١٩٠ سم ((p(x>190)).

٦-احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من ١٥٠ سم ((p(x>150)).

٧-احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٦٠ سم ((p(x<160)).

الحل :-

١-احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٧٠ سم و ١٩٠ سم
-:(p(170<x<190))

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{170 - 180}{10} < z < \frac{190 - 180}{10}$$

$$-1 < z < 1$$

$$P = 68.26\%$$

الحل :-

٢-احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٦٠ سم و ٢٠٠ سم
-: (p(160<x<200))

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{160 - 180}{10} < z < \frac{200 - 180}{10}$$

$$-2 < z < 2$$

$$P = 95.45\%$$

الحل :-

٣-احتمال أن ينحصر طول الطالب بين ١٥٠ سم و ٢١٠ سم (p(150<x<210)):-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$\frac{150 - 180}{10} < z < \frac{210 - 180}{10}$$

$$-3 < z < 3$$

$$P = 99.74\%$$

الحل :-

٤- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٩٠ سم (p(x<190)) :-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z < \frac{190 - 180}{10}$$

$$z < 1$$

$$P = (0.6826/2) + 0.5 = 84.13\%$$

الحل :-

٥- احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من ١٩٠ سم ((p(x>190)):-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z > \frac{190 - 180}{10}$$

$$z > 1$$

$$P = 0.5 - (0.6826/2) = 15.87\%$$

الحل :-

٦-احتمال أن يكون طول الطالب أكبر من ١٥٠ سم ((p(x>150)) :-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z > \frac{150 - 180}{10}$$

$$z > -3$$

$$z < 3$$

$$P = (0.9974/2) + 0.5 = 99.87\%$$

الحل :-

٧- احتمال أن يكون طول الطالب أقل من ١٦٠ سم ((p(x<160)):-

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$z < \frac{160 - 180}{10}$$

$$z > -2$$

$$z > 2$$

$$P = 0.5 - (0.9545/2) = 0.02275 = 2.275\ \%$$

Tables of the Normal Distribution

Probability Content from -oo to Z

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9343	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

استخدامات التوزيع الطبيعي القياسي:-

يستخدم التوزيع الطبيعي القياسي في التعامل مع الكثير من المشاكل العملية وإيجاد القيم الاحتمالية لها وإليك بعض الأمثلة على ذلك:

مثال:

افترض أن إدارة المرور بالأحساء وضعت جهازا للرادار على طريق الدمام عند مدخل المبرز وذلك لضبط السيارات المسرعة في فترة معينة من اليوم، افترض أن X تمثل السرعة في الساعة للسيارات التي تمر بمدخل المبرز في فترة عمل الرادار، إذا كانت X تتوزع توزيعا معتدلا وسطه الحسابي 60 ميلا وتباينه 25 ميلا، أوجد التالي:

- نسبة السيارات التي تقل سرعتها عن 50 ميلا في الساعة .
- نسبة السيارات التي تزيد سرعتها عن 65 ميلا في الساعة.
- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 60 ميلا و 70 ميلا في الساعة .
- عدد السيارات التي تكون سرعتها بين 60 ميلا و 77.45 ميلا من بين 10000 سيارة .

الحل :-

١- نسبة السيارات التي تقل سرعتها عن ٥٠ ميلا في الساعة :

$$P(X < 50) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} < \frac{50-60}{\sqrt{25}}) = P(Z < -2) = 0.5 - (0.9545 \ / 2) = 0.02275$$

٢- نسبة السيارات التي تزيد سرعتها عن 65 ميلا في الساعة :

$$P(X > 65) = P(\frac{x-\mu}{\sigma} > \frac{65-60}{\sqrt{25}}) = P(Z > 1) = 1 - P(Z \leq 1) = 0.5 - (0.6826 \ / 2) = 0.1587$$

تابع الحل :-

٣- نسبة السيارات التي تكون سرعتها بين 60 ميلا و 80 في الساعة :

$$P(60 \le X \le 77.45) = P(\frac{60-60}{\sqrt{25}} \le Z \le \frac{70-60}{\sqrt{25}})$$

$$= P(0 \le Z \le 2) = P(Z \le 2) - P(Z \le 0)$$

$$= (0.9545 \ / \ 2) = 0.4772$$

٤- عدد السيارات المتوقع سرعتها بين 60 ميلا و 80 ميلا من بين 10000 سيارة :

10000(0.47725)=4772