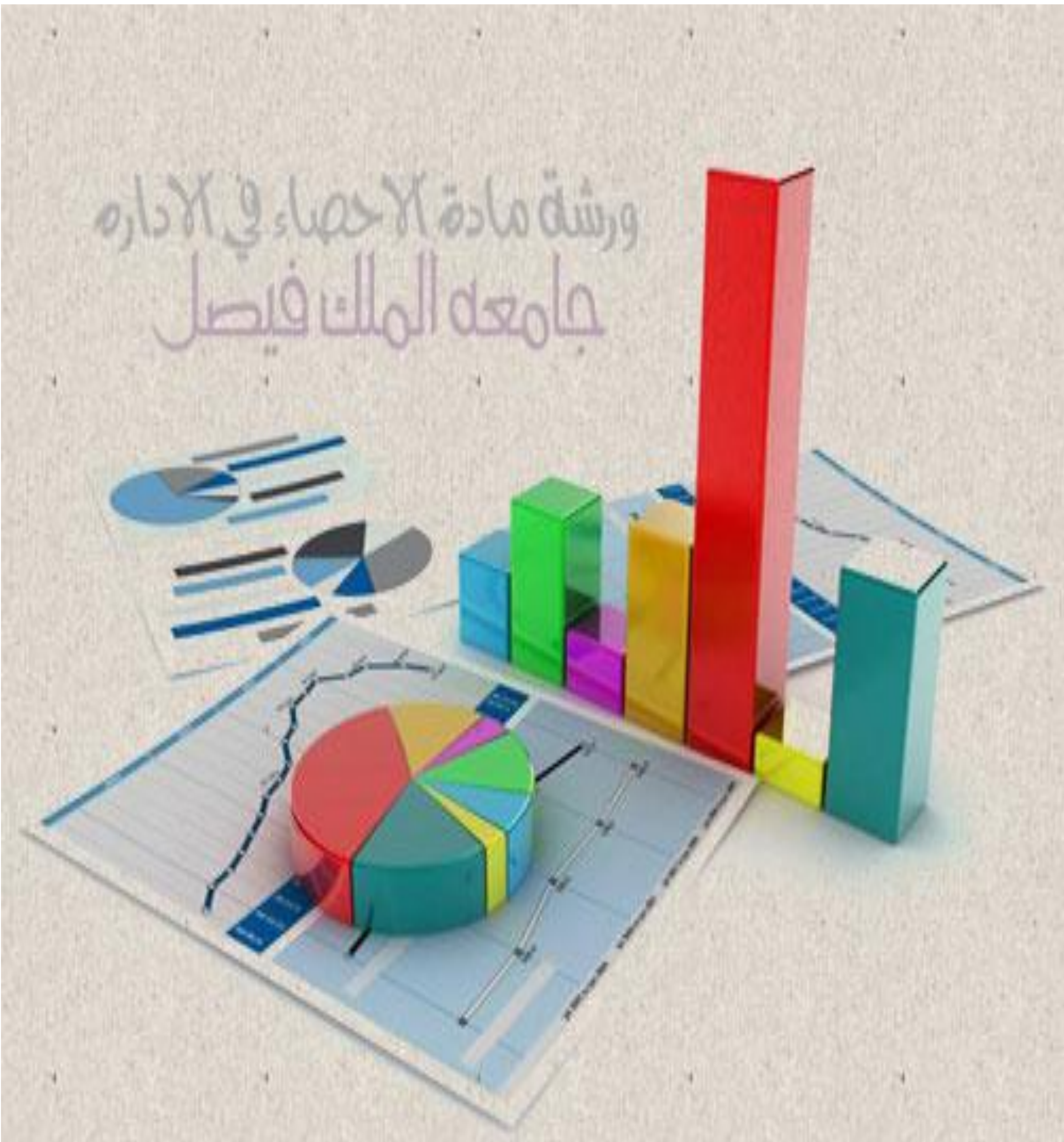
جامعه الملك فيصل / كليه اداره الاعمال

ملخص الإحصاء في الإداره ١٤٣٥

د/ ملفي الرشيدي



المحاضرة الاولى

الدالة :

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو تتعين بواسطة) كمية أخرى .

ملاحظة :-

إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

- **دالة كثيرة الحدود :**

هي الدالة التي على الصورة

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots\dots + a_1 x + a$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$

$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

1- $(f + g)(x)$

$= f(x) + f(g)$

$= 3x+5 + x^2+1$

$= x^2+3x+6$

نقوم بجمع الدالتين

$3x+5+x^2+1=3x+6+x^2$

وبعدها نقوم بترتيب حسب الاس =

x^2+3x+6

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

2- $(f - g)(x) =$

$= f(x) - g(x)$

$= (3x+5) - (x^2+1)$

$= 3x+5 -x^2-1$

$= -x^2 + 3x +4$

اولا نقوم بتفكيك مابداخل القوس $3x+5$ تخرج من قوس بدون تغير x^2+1 نضربها بأشاره السالب فتصبح $-x^2-1$

نقوم بجمع المعادلتين مع الانتباه للاشارات

$=3x+5-x^2-1$

$=3x+4-x^2$ مع ترتيب المعادله حسب الاس الاكبر تصبح

$=-x^2+3x+4$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

3- $(f \times g)(x) =$

$= f(x) \times g(x)$

$= (3x+5) \times (x^2+1)$

$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x +5$

عمليه ضرب نضرب مافي الاقواس الاول بالقوس الثاني

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد

4- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$

معادلة الخط المستقيم :-

ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$

ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 x_2 \neq$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - -3}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(3,2)$ و $B(5,2)$.

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(2,3)$ و $B(2,6)$.

الحل /

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a وb لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$2x + 4y - 8 = 0$

الحل /

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$5x = -4y + 10$

الحل /

المعادله غير مرتبه نقوم بترتيبها مع مراعات تبديل الاشارات اثناء نقله من الجهه اليمن لليسري

$5x + 4y - 10 = 0$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل /

هنا نقوم بترتيب المعادله الثانيه قما قمنا بها بمعادله السابقه

والانتباه لتغير الاشاره اثناء نقلها للجهه اليسري

$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$

إذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال :-

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل /

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$m_2 = (-a)/b = -1/3$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$$

تروح ٣ مع المقام ٣

ويبقى الناتج = 1-

المستقيمان متعامدان

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي -2 .

الحل /

$m = -2$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$y = -2x + 7$

النهايات

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $lim_{x \to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a.

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $lim_{x \to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

١- إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $lim_{x \to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت $f(x) = m x + c$ فإن $lim_{x \to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x \to 5} 30$$

$$\lim_{x \to 2} (1 - 2x)$$

$$\lim_{x \to 2} (3x + 4)$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5)$$

الحل

$lim_{x \to 5} 30 = 30$

$lim_{x \to 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 5$

$lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

$lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1$

مثال :

إذا كانت $lim_{x \to 2} f(x) = 5$ و $lim_{x \to 2} g(x) = -8$ و $lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $lim_{x \to 5} [h(x) - f(x)]$

$= lim_{x \to 2} h(x) - lim_{x \to 2} f(x)$

$= 10.5 - 5 = 5.5$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

2- $\lim_{x\to2}[g(x)\times h(x)]$

$= \lim_{x\to2} g(x) \times \lim_{x\to2} h(x)$

$= -8 \times 10.5 = -84$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

3- $\lim_{x\to2} 8 f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to2} f(x) = 8 \times 5 = 40$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

4- $\lim_{x\to2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to2} f(x)}{\lim_{x\to2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$\lim_{x\to1}[3x-1]^6 = [\lim_{x\to1} 3x-1]^6$

$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $lim_{x\to2}(3x^3+5x^2-7)$

$= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$

$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

2- $lim_{x\to3}\frac{3x^2+7}{x-5}$

$= \frac{3 \times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

3- $lim_{x\to2}\frac{2x-1}{5x+3}$

$= \frac{2\times2-1}{5\times2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

4- $lim_{x\to2}e^x$

$= e^2$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

5- $lim_{x\to1}e^{x^2+2x+1}$

$= e^{1^2+2\times1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

6- $lim_{x\to2}log(3x^2+5) = \log(3\times2^2+5)$

$= \log(3\times4+5)$

$= \log(12+5) = \log(17)$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

7- $lim_{x\to 3}\, ln(2x-5)$= ln (2×3-5) = ln (6-5) = ln (1) =0

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3$ = ((3×1^3) + 4 × 1 -2)^3

= (3+4-2)^3 = (5)^3 = 125

9- $lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ = 2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولى (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$

فأوجد :-

1- $lim_{x\to 3} f(x)$(و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$

فأوجد :-

(و نصف تقع في مجال الدالة الاولى) $2-\ lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (\frac{1}{2})^2 + 5 = 3\times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}}$$

فأوجد :-

$$\mathbf{3-\ \lim_{x\to 1} f(x)}$$

الحل

$3-\ \lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to 1^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $lim_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$lim_{x\to 1^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to 1^+} f(x) \neq lim_{x\to 1^-} f(x)$

$lim_{x\to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$lim_{x\to5}\, f(x)$

الحل

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to5^+}\, f(x)$ والنهاية من اليسار $lim_{x\to5^-}\, f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to5^+}\, f(x)$(النهاية من اليمين)

= 6x -10 = 6 × 5 -10 = 20

$lim_{x\to5^-}\, f(x)$= (النهاية من اليسار)

= 20 × $(5)^2$ + 15 = 20 × 25 +15 = 500 +15 = 515

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to5^+}\, f(x) \neq lim_{x\to5^-}\, f(x)$

$lim_{x\to5}\, f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال

تعريف :

يقال للدالة *f(x)* متصلة في النقطة *a* إذا تحققت الشروط التالية :-

١- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى *R*.

٢- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

٣- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \ 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \ x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل /

f(5) = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x \to 5^+} f(x)$ = 25+2x = 25 +2× 5 = 25 +10 = 35

$lim_{x \to 5^-} f(x)$ = 6x = 6× 5 = 30

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \ 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \ x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

f(10) = 20+4 x = 20 + 4×10 = 20 +40 = 60

$lim_{x \to 10^+} f(x)$ = 20+4x = 20 +4× 10 = 20 +40 = 60

$lim_{x \to 10^-} f(x)$ = $12x^2$ = 12×10^2 = 1200

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \ x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , \ x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

f(8) = $20\ x^2 = 20 \times (8)^2$ = 20 × 64 = 1280

$lim_{x \to 8^+} f(x)$ = 1160 +15x = 1160 +15 × 8 = 1280

$lim_{x \to 8^-} f(x)$ = $20\ x^2 = 20 \times (8)^2$ = 20 × 64 = 1280

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

المحاضرة الثانية

التفاضل وتطبيقاته التجارية ،،

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- :بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :- المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =?????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = 15$

فإن الـمتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$	$\frac{dy}{dx} = 5x^4$
2- $y = 15x^4$	$\frac{dy}{dx} = 60x^3$
3- $y = 10x$	$\frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة :

مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$\frac{dy}{dx}$ = (3 x + 1) (2x -7) + (x2 – 7 x) (3)

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)(3)$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$

مثال :-

$y = \frac{4x+2}{3x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

1 – y = (15x2 + 20)^3

$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$

$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$

القاعدة السابعة :

المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$

(المشتقة الاولى) $\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$

(المشتقة الثانية) $\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$

(المشتقة الثالثة) $\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١- المرونة :-

تعرف مرونة الطلب السعرية :على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية _ فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ١ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < ١ (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب :

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D= 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل /

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D^{/}= -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D= 200 - 10\,x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل /

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D^{/}= -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$\text{م} = \text{المشتقة الاولى لدالة الطلب} \times \frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$$

$$\text{م} = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= 15x-20) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل /

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}$= 15)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (15) × $\frac{100}{1000}$ = 1.5

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٢- الاستهلاك والادخار :-

١- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل.

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

٢- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x -0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل /

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K^{/} = 0.6 - 0.04\ x$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K^{/} = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - .04 = 0.56$

٣-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

= ١ – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٣- النهايات العظمى و الصغرى :-

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

٢ - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

٣ - تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = -\ 0.4x^2 + 300x - 2000$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل/

١- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.8x + 300$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P= 500-0.2x +0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل /

١- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P^{/} = -0.2 + 0.2x$$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P^{//} = 0.2$$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٤- الربح الحدي :-

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

٢- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

٣- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

٤- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

٥- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

٦- = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (١) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x +30$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل /

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^{/}= 36x^2 + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$R^{/}= 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$ ريال

مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

(سعر بيع الوحدة $) = 4x^2 + 6x +5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

الحل /

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

$R =$ (دالة سعر بيع الوحدة) $\times x$

$R = (4x^2 + 6x +5)\times x = 4x^3 + 6x^2 +5x$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/}= 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٥ وحدات إذاً $x=15$

$R^{/}= 12x^2+ 12x +5 = 12\times15^2 + 12\times15 +5=2885$ ريال

مثال (٣) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة $) = 10x^3 -11x^2 +5x -20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل /

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) ×x

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً $x=5$

$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 = 4205$ ريال

مثال (٤) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٠وحدات ؟

الحل /

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

(التكاليف الكلية)$C = 10x^2 - 12x + 15$

(التكاليف الحدية)$C' = 20x - 12$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 15x^2 + 9x - 17$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة ؟

الحل /

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$

$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=30$

$P^/ = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (٧) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 + 3x + 20$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة ؟

الحل /

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(12x^3 +5x^2 - 2x +100)- (10x^2 + 3x +20)$

$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٥ وحدة إذاً $x=25$

$P^/ = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 -5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (١)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$

$C = 13 x^3 - 5x^2 +3 x -20$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

الحل /

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$R = 30 x^4 + 12x^2 - 6 x + 15$

$R^/ =120 x^3 + 24x^2 - 6$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$R^{/} = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

الحل

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة :-

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$C^{/} = 39x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$C^{/} = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

الحل

٣- دالة الربح الكلي :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$

الحل

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$P = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$

$P^{/} = 120x^3 - 39x^2 + 7x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$P^{/} = 120\times12^3 - 39\times12^2 + 7\times12 - 9 = 201819$ ريال

تمرين شامل (٢)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

سعر بيع الوحدة(Selling price) $= 3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

١- دالة الايراد الكلي .

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٤- دالة الربح الكلي .

٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) ×x

$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

الحل

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

الحل

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

الحل

٤- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

الحل

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P^{/} = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$P^{/} = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180$ ريال

المحاضرة (٣)

التكامل
وتطبيقاته التجارية

التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،
حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز ∫ و هو رمز التكامل
و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب
$\int f(x).dx$
أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكامل x المرفوعه للأس n :

أجمع على الاس واحد واقسم على الاس الجديد :

$$\int X^n.dx=\frac{1}{n+1}X^{n+1}+C$$

مثال

$\int X^6.dx$

نسوي تكامل لـ X^6 بضافه واحد للاس ٦ وتصبح سبعه ونقسمها على الاس الجديد ٧ وتصبح $\frac{X^7}{7}$ لو طبقنا القانون راح يطلع نفس الناتج $\int X^n.dx=\frac{1}{n+1}X^{n+1}+C$

$\frac{1}{6+1}X^{6+1}+C$

$\frac{X^7}{7}+C$

القاعدة الثانيه :

$\int K\ .dx=kx+c$

تكامل أي عدد ثابت يسوي العدد الثابت مع الاكس

مثال /

$\int 5.dx =5x+c$

القاعدة الثالثه /

$\int\ .dx=x+c$

و هذا c ثابت التكامل ... والتكامل هو عكس التفاضل

عشان نعرف c ليه نكتبه بتكامل وتكون ثابته بمعادلات التكامل

نرجع للتفاضل ونعرف التفاضل عكس التكامل

لو اجيب مثال للتفاضل

$Y=X^4+5$

ووتفاضل الخمسه بصفر

طيب راح نعمل لمعادله الي نتجت لنا تكامل

$X^4 = \int \frac{4X^4}{4}$ تروح ٤ مع ٤ ويبقي X^4

طلع لنا الناتج X^4 ما رجعت لنا معادله التفاضل الي هي X^4+5

وحنا قلنا التفاضل عكس التكامل لم عملت للمعادله تفاضل كان تفاضل الخمسه صفر

وطلع لنا الناتج $Y`=4X^3$

وعملنا تكامل للمعادله وطلع لنا $X^4 =$ وين الخمسه قلنا حنا عمليه عكسيه

لهذا نضيف c ثابت التكامل

فتصبح X^4+c يعني c قيمه التفاضل المجهوله لانه غير معلومه....((هذه اضافه))

مثال :-

1- $\int x^3\ .dx\ =\ \frac{1}{4}x^4+c$

2- $\int x^5\ .dx\ =\ \frac{1}{6}x^6+c$

3- $\int 6\ .dx\ =\ 6x+c$

4- $\int 3x^4\ .dx\ =\ \frac{3}{5}x^5+c$

مثال :-

أوجد :-

$\int x^5+4x^3-2x^2+3x+8\ .dx$

الحل

$y=\frac{1}{6}x^6+\frac{4}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+8x+c$

$y=\frac{1}{6}x^6+x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+8x+c$

٢- تكامل e^x :-

$$\int e^x . dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} . dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9x^2 - 10x + 15 . dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$y = \frac{9}{3}x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$

$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15x4 + c$

$1 = 3×64 - 5 \times 16 + 60 + c$

$1 = 172 + c$

$c = -171$

التطبيقات التجارية للتكامل

١- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

٢- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R^{/} = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

٢- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

الايراد الكلي= $(5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 = 150$ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C^{/} = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R^{/} = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C^{/} = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .
٣- دالة الربح الحدي .
٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
٥- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$

$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$ ريال

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C' = 36x^2 + 40x - 10$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة يتم التعويض عن قيمة x=25 كما يلي :-

$C = 12\times(25)^3 + 20\times(25)^2 - 10\times(25) = 199750$ ريال

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P' = R' - C'$

$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$

$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P^{/} = 8x^{3} - 12x^{2} - 52x + 30$$

$$P = 2x^{4} - 4x^{3} - 26x^{2} + 30x$$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^{4} + 8x^{3} - 6x^{2} + 20x) - (12x^{3} + 20x^{2} - 10x)$$

$$= 2x^{4} - 4x^{3} - 26x^{2} + 30x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^{4} - 4x^{3} - 26x^{2} + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=10$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2\times(10)^{4} - 4\times(10)^{3} - 26\times(10)^{2} + 30\times(10)$$

$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700 \text{ ريال}$$