

جامعة الملك فيصل - كلية ادارة الاعمال

ملخص مقرر الاحصاء في الادارة

د . ملفي الرشيد

تجميع المحاضرات
نداء الايام

تنسيق الشكل النهائي والشرح و اضافات اخرى
turki1400

المحاضرة الاولى❖ الدالة :

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ، وكلمة دالة تعبر عن مفهوم (أن كمية ما تعتمد على) أو (تتوقف على) أو (تتبعين بواسطة) كمية أخرى .

ملاحظة :-

- ❖ إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و B تسمى بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .
- ❖ حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحدة فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

❖ دالة كثيرة الحدود :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) .

(وهذه امثلة على شكلها):

1- $f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$

2- $f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى بالدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة، وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

$$1- (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2- (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$3- (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$$

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$1- (f + g)(x)$$

$$= f(x) + f(g)$$

$$= 3x+5 + x^2+1$$

$$= x^2+3x+6$$

@ نجمع الدالتين بوضعها على الشكل المقابل - السهم الاول

@ ناتج الجمع نقوم بترتيبه حسب درجة الاس الاكبر ليظهر على الشكل المقابل - السهم الثاني

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$2-(f - g)(x) =$$

$$= f(x) - g(x)$$

$$= (3x+5) - (x^2+1)$$

$$= 3x+5 -x^2-1$$

$$= -x^2 + 3x + 4$$

@ نقوم بفكك الاقواس ولا نهمل اشارة (-) التي بين القوسين - السهم الاول

@ ناتج تفكيك غير اشارة ما بداخل القوس الثاني - السهم الثاني

@ نرتب الدالة حسب درجة الاس الاكبر - السهم الثالث

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد:

$$3- (f \times g)(x) =$$

$$= f(x) \times g(x)$$

$$= (3x+5) \times (x^2+1)$$

$$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$$

$$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$$

نقوم بضرب ما بداخل القوس الاول في ما بداخل القوس الثاني كما هو مبين بالاقواس

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ فأوجد

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

❖ معادلة الخط المستقيم :-

❖ ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$

ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_2 \neq x_1$

مثال(1):-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - (-3)}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

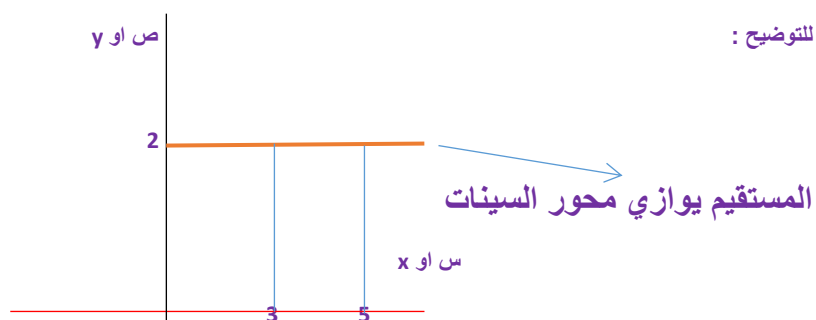
مثال(2) :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(3,2)$ و $B(5,2)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

مهم جداً : إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .



مثال (3) :-

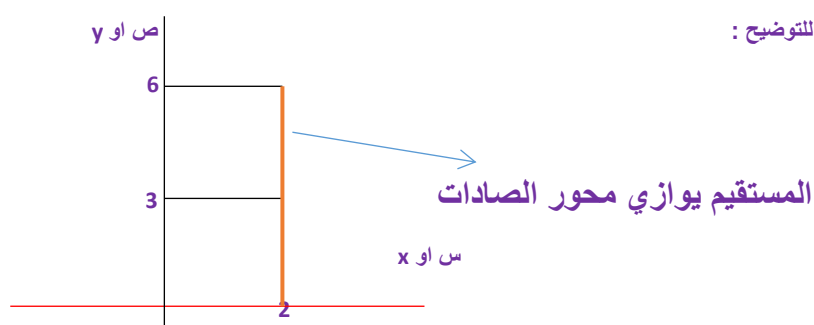
أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6).

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

مهم جداً : إذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

للتوضيح:



ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال (1) :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال (2):-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

هنا نلاحظ ان المعادلة غير مرتبة ولا تتوافق مع الصيغة العامة ومن هنا نقوم بالتالي :

نقوم بنقل الطرف الايمن الى الطرف الايسر مع مراعاة تبديل الاشارات لكي يصبح الطرف الايمن = 0

لتظهر على الشكل الموضح بجوار السهم

ثم نطبق القاعدة بكل سهولة

$$5x + 4y - 10 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

❖ المستقيمات المتوازية :-يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$ مثال :هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

هنا نلاحظ ان المعادلة الثانية غير مرتبة ولا تتوافق مع الصيغة العامة ومن هنا نقوم بالتالي :

نقوم بنقل الطرف الايسر الى الطرف الايمن مع مراعاة تبديل الاشارات لكي يصبح الطرف الايسر = 0

لتظهر على الشكل الموضح بجوار السهم

ثم نطبق القاعدة بكل سهولة

$$4x - y - 2 = 0 , \quad 4x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_1 = m_2$$

إذا المستقيمان متوازيان

❖ المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال :-

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-1}{3}$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$$

إذا المستقيمان متعامدان

❖ تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميله m و يمر بالنقطة $A(x_1, y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ و ميله يساوي -2 .

الحل

$$m = -2 , x_1 = 5 , y_1 = -3$$

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$Y + 3 = -2(x - 5)$$

$$Y + 3 = -2x + 10$$

$$Y = -2x + 10 - 3$$

$$Y = -2x + 7$$

❖ النهايات

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدالة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة

تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

الحل :

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2x + 1$$

$$= 2(2) + 1 = 5$$

يعني إيجاد قيمة الدالة $f(x)$ عندما توّول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

❖ جبر النهايات :

1- إذا كانت $f(x) = c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \text{ لكل عدد حقيقي } a .$$

2- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ma + c \text{ لكل عدد حقيقي } a .$$

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

1- $\lim_{x \rightarrow 5} 30$

2- $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x)$

3- $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4)$

4- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5)$

الحل

1- $\lim_{x \rightarrow 5} 30 = 30$

2- $\lim_{x \rightarrow 2} (1 - 2x) = 1 - (2 \times 2) = 5$

3- $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$

4- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (8x - 5) = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right) - 5 = 4 - 5 = -1$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 5} [h(x) - f(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

$$2- \lim_{x \rightarrow 2} [g(x) \times h(x)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$$

$$= -8 \times 10.5 = -84$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 2} 8 f(x)$$

$$= 8 \times \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 10.5$ ،
فأوجد ما يلي :-

$$4- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} [3x - 1]^6 &= [\lim_{x \rightarrow 1} 3x - 1]^6 \\ &= [3 \times 1 - 1]^6 = [3 - 1]^6 = [2]^6 = 64 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 1- \lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7) \\ &= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7 \\ &= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 2- \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5} \\ &= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3 - 5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 3- \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 1}{5x + 3} \\ &= \frac{2 \times 2 - 1}{5 \times 2 + 3} = \frac{4 - 1}{10 + 3} = \frac{3}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4- \lim_{x \rightarrow 2} e^x \\ &= e^2 \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$\begin{aligned} 5- \lim_{x \rightarrow 1} e^{x^2 + 2x + 1} \\ &= e^{1^2 + 2 \times 1 + 1} = e^{1 + 2 + 1} = e^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6- \lim_{x \rightarrow 2} \log(3x^2 + 5) &= \log(3 \times 2^2 + 5) \\ &= \log(3 \times 4 + 5) \\ &= \log(12 + 5) = \log(17) \end{aligned}$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$7- \lim_{x \rightarrow 3} \ln(2x - 5)$$

$$= \ln(2 \times 3 - 5) = \ln(6 - 5) = \ln(1) = 0$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

$$8- \lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 + 4x - 2)^3 = ((3 \times 1^3) + 4 \times 1 - 2)^3$$

$$= (3 + 4 - 2)^3 = (5)^3 = 125$$

$$9- \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 5} = \sqrt[3]{2^2 + 5} = \sqrt[3]{4 + 5} = \sqrt[3]{9} = 2.08$$

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x) = \begin{cases} 9x^2 & , x < 5 \\ 15x - 2 & , x > 5 \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلا بد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى 3 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولي أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى 7 مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$= 7x - 2 = (7) \times (3) - 2 = 19$$

نلاحظ ان 3 تقع في مجال الدالة الثانية لان

$3 > 1$ فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 3 عن x

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$2- \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$$

نلاحظ ان $\frac{1}{2}$ تقع في مجال الدالة الاولى لان $\frac{1}{2} < 1$ نطبق على الدالة الاولى وذلك بالتعويض بالقيمة $\frac{1}{2}$ عن x

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 = 3 \times \frac{1}{4} + 5 = \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , x < 1 \\ 7x - 2 & , x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

الحل

$$3- \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \text{(النهاية من اليسار)}$$

$$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3 + 5 = 8$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , x < 5 \\ 6x - 10 & , x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

الحل

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$$(\text{النهاية من اليمين}) \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

$$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$$

$$(\text{النهاية من اليسار}) \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) =$$

$$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$$

هذه النهاية غير موجودة $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

❖ الاتصال

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

- 1- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R .
- 2- لابد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .
- 3- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها - النهاية من اليمين - النهاية من اليسار

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

$$f(5) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 25 + 2x = 25 + 2 \times 5 = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 6x = 6 \times 5 = 30$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند $x=5$.

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

$$f(10) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 20 + 4x = 20 + 4 \times 10 = 20 + 40 = 60$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 12x^2 = 12 \times 10^2 = 1200$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند $x=10$.

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$$f(8) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15 \times 8 = 1280$$

$$\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = 20x^2 = 20 \times (8)^2 = 20 \times 64 = 1280$$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند $x=8$.

تمارين الواجب :-

تمرين 1 :- الحلول مجهود شخصي

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

1- $\lim_{x \rightarrow 0} 5 = 5$

2- $\lim_{x \rightarrow 5} (10 - 2x + x^2) = (10 - 2(5) + 5^2) = 10 - 10 + 25 = 25$

3- $\lim_{x \rightarrow 12} (3x + 6) = (3(12) + 6) = 36 + 6 = 42$

4- $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} (9x - 2) = (9(\frac{2}{3}) - 2) = \frac{18}{3} - 2 = 6 - 2 = 4$

تمرين 3 :-

أوجد :-

1- $\lim_{x \rightarrow 1} [5x - 2]^2 = [\lim_{x \rightarrow 1} 5x - 2]^2 = [5 \times 1 - 2]^2 = [5 - 2]^2 = [3]^2 = 9$

2- $\lim_{x \rightarrow 2} [10 - 2x]^2 = [\lim_{x \rightarrow 2} 10 - 2x]^2 = [10 - 2 \times 2]^2 = [10 - 4]^2 = [6]^2 = 36$

تمرين 4 :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^3 - 2x^2 - 50)$

$$= (2(5)^3 - 2(5)^2 - 50) = 2(125) - 2(25) - 50 = 150$$

2- $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x) = (1 - e^0) = 1 - 1 = 0$

3- $\lim_{x \rightarrow 1} \log(10x^4 + 15)$

$$= \log(10(1)^4 + 15) = \log(25) = 1.3979$$

4- $\lim_{x \rightarrow 2} e^{2x^2 + 3x + 2} = e^{2(2)^2 + 3(2) + 2} = e^{8 + 6 + 2} = e^{16}$

5- $\lim_{x \rightarrow 3} \ln(20x^2 - 5x + 10)$

$$= \ln(20(3)^2 - 5(3) + 10) = \ln(20(9) - 15 + 10) = \ln(175) = 5.1647$$

تمرين 5 :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , x < 2 \\ 5x - 2 & , x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$1- \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5x - 2 = 5(3) - 2 = 15 - 2 = 13$$

نلاحظ ان 3 تقع في مجال الدالة الثانية لان

 $3 > 2$ فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 3 عن x

$$2- \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 30x^2 + 15 = 30(1)^2 + 15 = 30 + 15 = 45$$

نلاحظ ان 1 تقع في مجال الدالة الاولى لان

 $1 < 2$ فنطبق على الدالة الثانية وذلك بالتعويض بالقيمة 1 عن x

تمرين 6 :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

$$f(10) = 3 + x^2 = 3 + (10)^2 = 3 \times 100 = 300$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = 3 + x^2 = 3 + (10)^2 = 3 \times 100 = 300$$

$$\lim_{x \rightarrow 10^-} f(x) = 2x = 2(10) = 20$$

حيث أن النتائج غير متساوية إذن فهذه الدالة غير متصلة عند $x=10$.

المحاضرة الثانية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلاً:

إذا كان الربح مثلاً يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

❖ قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الآخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y = 5x + 9$

المطلوب :- المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx} = \text{????}$

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً **صفر** فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$$y = 15$$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يؤثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

❖ القاعدة الثانية : تفاضل x^n تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

$$1- y = x^5 \quad \frac{dy}{dx} = 5 x^4$$

$$2- y = 15 x^4 \quad \frac{dy}{dx} = 60 x^3$$

$$3- y = 10 x \quad \frac{dy}{dx} = 10$$

❖ القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$$1- y = 5 x^4 + 6 x^3 + 8 x^2 + 3 x$$

$$\frac{dy}{dx} = 20 x^3 + 18 x^2 + 16 x + 3$$

$$2- y = 20 x^5 + 10 x^3 - 5 x^2 + 15 x + 30$$

$$\frac{dy}{dx} = 100 x^4 + 30 x^2 - 10 x + 15$$

❖ القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي $\times$ مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي $\times$ مشتقة الدالة الاولى

مثال :-

$$1- y = (3 x + 1) (x^2 - 7 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (3 x + 1) (2x - 7) + (x^2 - 7 x) (3)$$

$$2- y = (10 x^3 - 12) (5 x^2 + 2 x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (10 x^3 - 12) (10 x + 2) + (30 x^2) (5 x^2 + 2 x) (3)$$

❖ القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

$$\text{مشتقة حاصل قسمة دالتين} = \frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$$

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x - 6}{9x^2}$$

❖ القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

$$\text{مشتقة القوس المرفوع لأس} = \text{تفاضل القوس} \times \text{تفاضل ما بداخله}$$

مثال :-

$$1 - y = (15x^2 + 20)^3$$

$$\frac{dy}{dx} = 3 (15x^2 + 20)^2 (30x)$$

$$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$$

$$\frac{dy}{dx} = 5 (10x^3 - 12x^2 + 5)^4 (30x^2 - 24x)$$

❖ القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5 \quad (\text{المشتقة الاولى})$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40 \quad (\text{المشتقة الثانية})$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72 \quad (\text{المشتقة الثالثة})$$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

1- المرونة :-

تعرف مرونة الطلب السعرية :

على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها :

مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > 1 (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة $= 1$ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < 1 (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهاية المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (1):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 100 وحدة عند سعر يساوي 10 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

$$م = (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (2):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 200 - 10x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 200 وحدة عند سعر يساوي 20 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -10)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

$$م = (-10) \times \frac{20}{200} = -1$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (3):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 15x - 20)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي 1000 وحدة عند سعر يساوي 100 ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = 15)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

$$م = (15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمارين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي $(D = 1.5x + 20)$ أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبة هي 600 وحدة عند سعر 200 ريال ؟

الحل : حل شخصي

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = 1.5)$

ثانياً التعويض في القانون :-

$$م = \frac{\text{المشتقة الاولى لدالة الطلب}}{\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}} \times$$

$$م = (1.5) \times \frac{200}{600} = 0.5$$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الإشارة) لمعامل المرونة اصغر من الواحد الصحيح إذا فالطلب قليل المرونة أو غير مرن

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

2- الاستهلاك والادخار :-

1- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .
قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

2- الميل الحدي للادخار = المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل
قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك

$$\text{الميل الحدي للاستهلاك} + \text{الميل الحدي للادخار} = 1$$

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = 15 + 0.6x - 0.02x^2)$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

1- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$$K' = 0.6 - 0.04x$$

2- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - 0.04 = 0.56$$

3-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي 1 ريال هو :-

$$= 1 - \text{الميل الحدي للاستهلاك} = 1 - 0.56 = 0.44$$

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

3- النهايات العظمى و الصغرى :-

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

1 - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

2 - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

3 - تحديد نوع النهاية (عظمى - صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة

∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (1) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = -0.4x^2 + 300x - 2000$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمى أم صغرى ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P' = -0.8x + 300$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = -0.8$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (2) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$$P = 500 - 0.2x + 0.1x^2$$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

1- المشتقة الاولى للدالة :-

$$P' = -0.2 + 0.2x$$

2- المشتقة الثانية للدالة :-

$$P'' = 0.2$$

3- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغري .

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

4- الربح الحدي :-

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

2- الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

3- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

4- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

5- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

6 = الايراد الحدي - التكلفة الحدية .

مثال (1) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x + 30$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R' = 36x^2 + 40x - 10$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$R' = 36x^2 + 40x - 10 = 36 \times 10^2 + 40 \times 10 - 10 = 3990 \text{ ريال}$$

مثال (2) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$\text{سعر بيع الوحدة} = 4x^2 + 6x + 5$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 15 وحدة ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = x \times (\text{دالة سعر بيع الوحدة})$$

$$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R' = 12x^2 + 12x + 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 15 وحدات إذاً $x=15$

$$R' = 12x^2 + 12x + 5 = 12 \times 15^2 + 12 \times 15 + 5 = 2885 \text{ ريال}$$

مثال (3) :-

في إحدى شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = x \text{ (دالة سعر بيع الوحدة)}$$

$$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$$

2- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدات إذاً $x=5$

$$R' = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$$

$$R = 40 \times 5^3 - 33 \times 5^2 + 10 \times 5 - 20 = 4205 \text{ ريال}$$

مثال (4) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 - 12x + 15$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$$C = 10x^2 - 12x + 15 \text{ (التكاليف الكلية)}$$

$$C' = 20x - 12 \text{ (التكاليف الحدية)}$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدات إذاً $x=10$

$$C' = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188 \text{ ريال}$$

مثال (6) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 30 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$

$$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=30$

$$P' = 6x^2 - 21x + 1 = 6 \times 30^2 - 21 \times 30 + 1 = 4771 \text{ ريال}$$

مثال (7) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع 25 وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 25 وحدة إذاً $x=25$

$$P' = 36x^2 + 30x - 5 = 36 \times 25^2 + 30 \times 25 - 5 = 23245 \text{ ريال}$$

تمرين شامل (1)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الإيرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة .

3- دالة الربح الكلي .

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$R' = 120x^3 + 24x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$R' = 120 \times 10^3 + 24 \times 10^2 - 6 = 122394 \text{ ريال}$$

الحل

2- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 12 وحدة :-

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$C' = 39x^2 - 10x + 3$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$C' = 39 \times 12^2 - 10 \times 12 + 3 = 5499 \text{ ريال}$$

الحل

3- دالة الربح الكلي :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$P = 30x^4 - 13x^3 + 7x^2 - 9x + 35$$

$$P' = 120x^3 - 39x^2 + 7x - 9$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 12 وحدة إذاً $x=12$

$$P' = 120 \times 12^3 - 39 \times 12^2 + 7 \times 12 - 9 = 201819 \text{ ريال}$$

تمرين شامل (2)

لإعتبرت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

$$\text{Selling price (سعر بيع الوحدة)} = 3x^2 + 25x - 18$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

المطلوب :-

- 1- دالة الايراد الكلي .
- 2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات .
- 3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة .
- 4- دالة الربح الكلي .
- 5- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة $\times$ سعر بيع الوحدة

$$R = x \times (\text{دالة سعر بيع الوحدة})$$

$$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$$

$$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

الحل

2- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع 5 وحدات :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$R' = 9x^2 + 50x - 18$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 5 وحدة إذاً $x=5$

$$R' = 9 \times 5^2 + 50 \times 5 - 18 = 1457 \text{ ريال}$$

الحل

3- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$C' = 20x + 2$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 20 وحدة إذاً $x=20$

$$C' = 20 \times 20 + 2 = 402 \text{ ريال}$$

الحل

4- دالة الربح الكلي :-

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$

$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

$$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

الحل

4- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

$$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$$

$$P' = 9x^2 + 30x - 20$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو 10 وحدة إذاً $x=10$

$$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180 \text{ ريال}$$

المحاضرة الثالثة❖ التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ،

حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز $\int$ و هو رمز التكامل

و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل $f(x)$ و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x) . dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

❖ قواعد التكامل :-

1- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n . dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k . dx = kx + c$$

$$\int 1 . dx = x + c$$

مثال :-

$$1- \int x^3 . dx = \frac{1}{4} x^4 + c$$

$$2- \int x^5 . dx = \frac{1}{6} x^6 + c$$

$$3- \int 6 . dx = 6x + c$$

$$4- \int 3x^4 . dx = \frac{3}{5} x^5 + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \cdot dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4x^3 - 30x^2 + 20x + 3 \cdot dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4} x^4 - \frac{30}{3} x^3 + \frac{20}{2} x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - 10x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

2- تكامل e^x :-

$$\int e^x \cdot dx = e^x + c$$

3- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9x^2 - 10x + 15 \cdot dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة $(4,1)$ ؟

الحل

$$y = \frac{9}{3} x^3 - \frac{10}{2} x^2 + 15x + c$$

$$y = 3x^3 - 5x^2 + 15x + c$$

حيث أن قيمة $x = 4$ و قيمة $y = 1$ فإن :-

$$1 = 3(4)^3 - 5(4)^2 + 15(4) + c$$

$$1 = 3 \times 64 - 5 \times 16 + 60 + c$$

$$1 = 172 + c$$

$$c = -171$$

التطبيقات التجارية للتكامل :-

- 1- الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .
- 2- التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .
- 3- الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .
- 4- الربح الكلي = الايراد الكلي - التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R' = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3} x^3 + \frac{6}{2} x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

2- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع 5 وحدات أي أن $x=5$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$\text{ريال} \quad 150 = 5^3 + 3 \times 5^2 - 10 \times 5 = \text{الايراد الكلي}$$

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات ؟

الحل

1- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

2- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع 10 وحدات أي أن $x=10$ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

$$\text{ريال} \quad 10000 = 30000 - 20000 + 400 - 400 = C \text{ التكاليف الكلية}$$

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة .

2- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع 25 وحدة .

3- دالة الربح الحدي .

4- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

5- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع 10 وحدات .

الحل

1- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع 20 وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كمايلي:-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع 20 وحدة يمكن التعويض عن قيمة $x=20$ كما يلي :-

$$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$$

$$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000 \text{ ريال}$$

2- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$$

وللوصول إلى حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع 25 وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=25$ كما يلي :-

$$C = 12(25)^3 + 20(25)^2 - 10(25) = 199750 \text{ ريال}$$

3- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي - التكاليف الحدية

$$\begin{aligned}
 P' &= R' - C' \\
 &= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10) \\
 &= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30
 \end{aligned}$$

4- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$\begin{aligned}
 P' &= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30 \\
 P &= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x
 \end{aligned}$$

حل آخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي - التكاليف الكلية

$$\begin{aligned}
 P &= R - C \\
 &= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x) \\
 &= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x
 \end{aligned}$$

5- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع 10 وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$$\begin{aligned}
 P &= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x \\
 &\text{وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة } x=10 \text{ في المعادلة السابقة كما يأتي :-} \\
 P &= 2(10)^4 - 4(10)^3 - 26(10)^2 + 30(10) \\
 &= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700 \text{ ريال}
 \end{aligned}$$