المحاضرة الثانية – طرق العد

مقدمة:

قبل البدء بدراسة مفهوم الاحتمال النسبي ولاعتماده بشكل أساسي على عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية ,فلا بد من معرفة الطرق التي تساعدنا على ذلك .وهنالك أربعة طرق للعد سنتعرف عليها على النحو الآتي:

أولا :قاعدة الضرب

إذا كانت التجربة E1 تحدث في n1 الطرق وكانت التجربة E2 تحدث في n2 من الطرق ,فإن التجربتين معا تحدثان في n1n2من الطرق.

مثال :إذا أراد طالب أن يسجل في مقررين احدهما في قسم الإحصاء والآخر من قسم المحاسبة ,فإذا كان عدد المقررات لقسم الإحصاء هو 3 وعدد المقررات من قسم المحاسبة هو ,4 فما عدد الطرق التي يمكن أن يسجل الطالب فيها؟

الحل :عدد الطرق= 3×4=12 طريقة

ملاحظة :يمكن تعميم القاعدة لتشمل k من التجارب.

مثال :كم هاتفا يمكن تركيبه في مدينة الدمام إذا تألف رقم الهاتف من أربعة أرقام بشرط أن يكون الرقم الأول من اليسار أوله العددين 8 أو9؟

الحل :عدد الهواتف = 10×10×10×2= طريقة

(لاحظ أن العدد الأول له طريقتان فقط لاختياره أما باقي المنازل فله 10طرق لاختيارهم هي عبارة عن الأعداد من 0 إلى 9).

ثانيا :قاعدة الجمع

إذا كانت تجربة ما تحدث في n1 من الطرق وكانت تجربة أخرى تحدث في n2 من الطرق بحيث كان من المعلوم أن التجربتين لا تحدثان معا(مانعتان لبعضهما البعض)فإن واحدة منهم أو الأخرى تحدث في n1+n2 من الطرق.

مثال :أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الإحصاء أو قسم المحاسبة ,بحيث كان عدد المقررات في قسم الإحصاء 3وفي قسم المحاسبة ,4 فما عدد الاختيارات لديه؟

الحل: عدد الطرق = 3+4=7 طرق

ملاحظة :يمكن تعميم قاعد الجمع لتشمل k من التجارب.

الشرح :-
المثال المعطى في السؤال هو الذي يحدد القاعدة المطلوبة ، مثلاً : في المثال الأول التجربتين تحدثان معًا فقمنا باستخدام قاعدة الضرب ، والمثال الثاني أحد التجربتين تكون مانعة للتجربة الأخرى فقمنا باستخدام قاعدة الجمع .

مثال :- أراد طالب أن يسجل مقرر واحد إما من قسم الإحصاء أو قسم المحاسبة أو قسم الرياضيات ، حيث أن عدد المقررات في قسم الإحصاء 4 والمحاسبة 6 والرياضيات 4 فما عدد الاختيارات لديه ؟

الحل :- حاصل جمع عدد مقررات القسم الأول **+** حاصل جمع عدد مقررات القسم الثاني **+** حاصل جمع مقررات القسم الثالث

عدد الطرق = $4 + 6 + 4 = 14$ طريقة .

ثالثاً:التباديل Permutations

التباديل هي طرق ترتيب جميع أو بعض عناصر مجموعة ما.

مثال :ما عدد طرق ترتيب جميع الأحرف a,b,c؟

الحل :لاحظ أنه لدينا ثلاثة أماكن لنملأها من الأحرف الثلاثة حيث يمكن اختيار ثلاثة أحرف للمكان الأول أما المكان الثاني فيتبقى لدينا حرفان لملء المكان وأخيرا يبقى حرف واحد لملء المكان الأخير وبتطبيق قاعدة الضرب نحصل على:

عدد الطرق= **$3\times2\times1=6$ طرق**

الشرح :-

- يشترط قانون التباديل (الترتيب) . حينما يُذكر في السؤال كلمة ترتيب نطبق قانون التباديل على المعطيات الموجودة في السؤال .
- يمكن استخراج ناتج التباديل من الآلة الحاسبة بالضغط على الأزرار التالية : SHIFT + X

وبشكل عام ,لدينا الحالات الثلاث التالية:

-1 يمكن ترتيب **n** من العناصر المختلفة بطرق عددها
$nPn = n! = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 3\times2\times1$
وهذا هو عدد تباديل **n** من العناصر المميزة.

(ملاحظة تسمى العملية !n بمضروب العدد n وهو عبارة عن $n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\ldots\times3\times2\times1$ **ومثال عليها ($4!=4\times3\times2\times1=24$)**

مثال :بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة" تقوى "؟
الحل :عدد الطرق يساوي
$4P4 = 4\times3\times2\times1 = 24$

الشرح :-
- نطبق القاعدة الأولى في حالة العناصر المختلفة ، حيث أحرف كلمة (تقوى) لايوجد بها أي حرف مكرر (متشابه) .

2- في حالة وجود لدينا n من العناصر فيها n1 من العناصر المتماثلة و n_2 من العناصر المتماثلة والمختلفة عن الأولى وهكذا لغاية k من العناصر المتماثلة ,فإن عدد التباديل في هذه الحالة يصبح على النحو الآتي:

nPn =$\frac{n_1}{n_{1!}\, n_{2!\ldots nk1!}}$

مثال :ما عدد تباديل أحرف كلمة" سلسبيل"؟

الحل :عدد الطرق يساوي

$$6p6\,\frac{6!}{2!\times 2!}=\frac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1\times 2\times 1}=180$$

لاحظ أن حرف" س "تكرر مرتين وكذلك حرف" ل "أما بقية الأحرف فتكررت مرة واحدة.

الشرح :-

- في هذا المثال لانستطيع التعويض فقط بالآلة الحاسبة ، بسبب أن لدينا بعض الأحرف المكررة ، تكرر حرف (س) مرتان ، كما أنه تكرر حرف (ل) مرتان ايضًا ، فيكون مجموع احرف الكلمة في البسط مع علامة المضروب (!) ، ويكون في المقام عدد تكرار الأحرف مع اشارة الضرب (x) بينهما كما هو موضح في المثال .

3- في حالة كان لدينا n من العناصر المميزة وأردنا ترتيب جزء من هذه العناصر وليكن r,، ففي هذه الحالة يكتب قانون التباديل على الصورة التالية:

$$npr=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال :ما عدد تباديل حرفين من كلمة" تاريخ"؟

الحل :لاحظ أن عدد أحرف كلمة " تاريخ "هو 5 وبذلك تصبح قيمة n=5 أما r= 2 كما هو مطلوب في السؤال وبذلك تصبح عدد الطرق تساوي

$$5p2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5\times 4\times 3\times 2\times 1}{3\times 2\times 1}=20$$

الشرح :-

- نستخدم هذا القانون حينما يُحدد في السؤال طلب معين ، في هذا المثال كان المطلوب تباديل حرفين فقط من الكلمة ، فيكون 2 هو المميز والذي نُعوض به قيمة r في القانون . و n نعوض بها عدد أحرف الكلمة .

رابعا :التوافيقCombinations

التوافيق هي الطرق التي نختار بها عددا معينا من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب.

- كما يمكن استخراج ناتج التوافيق من خلال الآلة الحاسبة من خلال الضغط على الازرار التالية : SHIFT+÷

مثال :ما عدد الطرق التي نختار بها حرفين من الحروف A, B, C دون الاهتمام بالترتيب؟

الحل :الاختيارات هي {A,B} , {A,C} ,{B,C}وبذلك يكون لدينا 3 طرق.

وبشكل عام ,عدد الطرق التي نختار بها r عنصر من مجموعة فيها n من العناصر بغض النظر عن الترتيب هو عدد توافيق n من العناصر مأخوذة منها r في كل مرة ويعطى بالصيغة التالية:

$$ncr = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

مثال :صف فيه 10 طلاب ,بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من 3 طلاب دون النظر إلى الترتيب؟

الحل:

$$10c3 = \frac{10!}{(10-3)! \times 3!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 120$$

مثال :صندوق فيه 5 كرات حمراء و 7 كرات بيضاء.

أ)بكم طريقة نختار 4 كرات من الصندوق؟

ب) بكم طريقة تختار الكرات الأربع بحيث تكون فيها واحدة حمراء وثلاث كرات بيضاء؟

الحل:

أ)من قاعدة التوافيق ,عدد طرق اختيار 4 كرات من الصندوق يساوي

$$12c4 = \frac{12!}{(12-4)! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8!}{8! \times 4!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

ب) عدد طرق اختيار كرة واحدة من الكرات الحمراء هو

$$5c1 = \frac{5!}{4! \times 1!} = \frac{5 \times 4!}{4!} = 5$$

أما عدد طرق اختيار 3 كرات بيضاء فهو

$$7c3 = \frac{7!}{4! \times 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

إذن ,من قاعدة الضرب ,عدد طرق اختيار كرة واحدة وثلاث كرات بيضاء هو

$$5 \times 35 = 175$$

أمثلة:

1- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI" ؟

الحل: لاحظ أن هذه الكلمة مكونة من 10 أحرف ,منها الحرف S تكرر اربع مرات وكذلك الحرف P تكرر مرتين , الحرف I تكرر ثلاث مرات .وبذلك يكون الحل كما يلي:

$$10P10 = \frac{10!}{4! \times 3! \times 2!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{4! \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 12600 \text{طريقة}$$

أما عدد طرق تكوين كلمة من جميع أحرف كلمة "MISSISSPPI" بغض النظر عن الترتيب فهو طريقة واحدة فقط.

2 - بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159

أ- مع الترتيب؟

ب - بدون ترتيب؟

الحل:

1- لاحظ أن جميع الأرقام المكون منها هذا العدد مختلفة ,وكذلك عدد منازل هذا العدد هو n=4 والمطلوب في السؤال ترتيب رقمين فقط بمعنى , r=2 وبذلك يكون الحل هو $4P2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$:

2- في حال عدم الترتيب ,تصبح صيغة القانون على الشكل التالي

$$4c2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2!} = 6$$

تمارين:

1- **يقدم احد المطاعم 4 أصناف من اللحوم , و 3 أصناف من السلطات , وصنفين من الحلوى كم عدد الاختيارات الممكنة لوجبة غذائية مكونة من صنف واحد من كل نوع ؟**
2- **صندوق فيه 8 كرات مختلفة سحبت 3 كرات الواحدة تلو الأخرى . جد عدد طرق سحب الكرات الثلاث إذا كان السحب:**
أ- دون إرجاع
ب- مع إرجاع

3-
أراد أربعة أشخاص اخذ صورة جماعية بوقوفهم معا في صف واحد بكم طريقة مختلفة يمكن أن يصطف هؤلاء الأشخاص ؟