أسم المقرر :**الاحصاء في الادارة**

استاذ المقرر:**د/ أحمد فرحان**

المحاضرة (١)

المجموعات

تعريف المجموعة :-

يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b ,c , ...

تابع تعريف المجموعة :-

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة $a \in A$

أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { ٢،٠،١،٤}

B= { a , b ,c , d }

C= { ١ , ٢ , ٣ .....}

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل١ ٢ ٣ ٤وهكذا)

D = { ١, ٢ , ٣,.....,١٠٠}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من ١ إلى ١٠٠ و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-
ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

$A = \{ x :$ عدد زوجي $x \}$

$B = \{ x :$ طالب بمقرر الاحصاء في الادارة $x \}$

$C = \{ x :$ طالب بنظام التعليم عن بعد $x \}$

$D = \{ x : -3 \le x \le 1$ عدد صحيح $x \}$

$X = \{ x : 0 \le x \le 12$ عدد صحيح $x \}$

أنواع المجموعات:

المجموعة الخالية :-
هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ(فاي) أو { } .

أمثلة :-

$A = \{ x :$ عدد طبيعي زوجي و فردي $x \}$

$B = \{ x :$ دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية $x \}$

المجموعة المنتهية :-
المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

$A = \{ 2 , 4 , 6 , 8 \}$

$B = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots\ldots\ldots , 100 \}$

$C = \{ x , y , s, t\ u \}$

المجموعة غير المنتهية :-
المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

$A = \{ x :$ عدد طبيعي فردي $\}$

$B = \{ 10, 20 , 30 ,\ldots\ldots\ldots \}$

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2 , 4 , 6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فإن $A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A$ ≫≫≫≫ $A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{1, 5, 7 , 9\}$, $B = \{9 , 7 ,5 ,1\}$

2- $A= \{2 ,5 ,9\}$, $B = \{a , s , d\}$

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B(A U B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما.

مثال :-

إذا كان $A = \{١ , ٢ , ٣ , ٧\}$ و $B= \{٢ , ٤ , ٦ , ٨\}$ أوجد (AUB) ؟

الحل

(AUB) = {١ ,٢ , ٣, ٤, ٥, ٦, ٧, ٨}

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B(A∩B) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان A = { -١ , ٠ , ١ , ٢ , ٣} وB = {٠،٢،٤،٦,} أوجد A ∩ B

الحل

(A ∩ B) = {٠ , ٢ }

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A={2,4,6,8,10}
أوجد

الحل

$\overline{A}$ = {1,3,5,7,9}

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={١،٢،٣,x,y} و B={٣،٤،٥,x,w} أوجد A-B

الحل: A-B = { ١ , ٢ , y }

مثال :-
إذا كانت
A={1,2,3,x,y} و
B={3,4,5,x,w}
و المجموعة الكلية
U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}
فأوجد :-

1- A∪B
2- A ∩ B
3- B – A
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A}$ ∪ $\overline{B}$
7- $\overline{A}$ ∩ $\overline{B}$
8- $\overline{A}$ ∪ A
9- $\overline{A}$ ∩ A

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{\ \}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتيللمجموعتين A ، B (A×B)بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت A={-٢،١} و B ={-٣،١،٤}

فأوجد A × B و B × A

الحل

A × B ={(-٢,-٣) , (-٢،١) , (-٢،٤) , (١,-٣) , (١،١) , (١،٤)}

B × A = {(-٣,-٢) , (-٣،١) ,(١,-٢) , (١،١) ,(٤,-٢) , (٤،١)}

مثال :-

أنشئ A × B و B × A، علماً بأن :-

A={١،٢} و B = { w , x , y }

الحل

A × B ={(١,w) ,(١,x) , (١,y) , (٢,w) , (٢,x) , (٢,y)}

B × A = {(w,١),(w,٢),(x,١),(x,٢),(y,١),(y,٢)}

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني، $(y_1=y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1 , y - \frac{1}{2}) = (4, \frac{3}{2})$

الحل

$X+1 = 4$ >>>>>>>>>> $x = 4-1 = 3$

$y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ >>>>>>>>>> $y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = {a , b , c}

الحل

P(s) = { {a} , {b} , {c} ,{a,b} , {a,c} , {b,c} ,{a,b,c} ,Ø }

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي ٢^n .

تمرين :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

P(S) = { {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} ,{b,c} ,{a,b,c} , Ø }

$٢^٣$ = ٨

تمارين:

1- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عددx سالب و موجب }
(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }
(c) C = {x: دولةx أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية }
(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}
(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}
(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت { A = {3 , 5 , 7 و {B = { 1,2,3,4,5,6,7,8 فهل يمكن القول أن $A \subset B$ ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }

2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

1- $A \cup B$

2- $A \cap B$

3- B – A

4- $\overline{A}$

5- $\overline{B}$

6- $\overline{A} \cup \overline{B}$

7- $\overline{A} \cap \overline{B}$

8- $\overline{A} \cup A$

9- $\overline{A} \cap A$

4- إذا كانت

A={8,10,12,r,m} و

B={4,6,10,o,r}

المجموعة الكلية

U = {4,6,8,10,12,o,r,m,p}

ثم أوجد :-

٥- إذا كانت {A={-5,7 و {B ={-6,4,9

فأوجد A × B و B × A ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة

(x+1 , y - 10) = (2x , 15) ؟

٧- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة {٨ , ٥ , ٢} = S ؟

٨- إذا احتوت المجموعة S على ٥ من العناصر ، فأوجد عدد عناصر P(S)؟

المحاضرة(٢)

الدوال

الدالة:-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ,وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو(تتوقف على) أو (تتعين بواسطة) كمية أخرى.

ملاحظة :-

اذا كانت F دالة من A الى B فأن A تسمى مجال الدالة وتسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون F دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة

- **واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور.**
- **مثال :**
- اذا $A = \{١،٢،٣\}$ و $b = \{٤،٨،١٢\}$
- و $f_١ = \{(١،٤) , (٢،٤) , (٣،١٢)\}$
- $F_٢ = \{ (١،٤) , (٢،٨) \}$
- $F_٣ = \{(١،٤) , (١،٨) , (٢،٤) , (٣،١٢) \}$
- فهل $f_١ , f_٢ , f_٣$ دوال من A الى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل
$f_1 =\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل
$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

تمرين: أي من العلاقات التالية تمثل الدالة

1- R =\{(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)\}
2- R =\{(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) \}
3- R =\{(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) \}
4- R =\{(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)\}
5- R =\{0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)\}
6- R =\{(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)\}

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :

إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- $f(2)$

2- $f(-1)$

3- $f(a)$

4- $f(x+1)$

مثال :

إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- $f(-3)$

2- $f(1/2)$

3- $f(a)$

تمارين:-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب $f(2)+f(-1)+f(3)$.

٣- للدالة $f(x)=x+4$ أحسب $2f(4)+3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب $f(3)-f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

- دالةكثيرةالحدود :

هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$$
$$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)
2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)
3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)
4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)
5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$ مثال :

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$
$= f(x) + f(g)$
$= 3x+5 + x^2+1$
$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$\begin{aligned}2-(f - g)(x) &= \\ &= f(x) - g(x) \\ &= (3x+5) - (x^2+1) \\ &= 3x+5 -x^2-1 \\ &= -x^2 + 3x +4\end{aligned}$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$

فأوجد:

$$\begin{aligned}3- (f \times g)(x) &= \\ &= f(x) \times g(x) \\ &= (3x+5) \times (x^2+1) \\ &= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5 \\ &= 3x^3 + 5x^2 + 3x +5\end{aligned}$$

مثال : إذا كانت $f(x) = ٣x \times ٥x$ و $g(x) = x^{٢}+١$

فأوجد :

$$4- \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

أيجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - -3}{3 - 1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(3,2) و B(5,2) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 2}{5 - 3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{2 - 2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

ax + by + c = 0

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال:-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته:-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$
$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$
$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال :

هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$
$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$
$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5,-3)$ و ميله يساوي -2 .

الحل:-

$$m = -2 \quad , \quad x_1 = 5 \quad , \quad y_1 = -3$$
$$y - (-3) = -2(x-5)$$
$$Y + 3 = -2(x-5)$$
$$y = -2x + 7$$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 =\{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2=\{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و$f_3=\{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R =\{(1,4) ,(2,4) ,(3,3) ,(4,5)\}$

2- $R =\{(2,4) ,(3,1) ,(3,2) ,(4,1) ,(5,2) \}$

3- $R =\{(-1,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) \}$

٣- للدالة $f(x)= 2x^3 + 10 x^2 -15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت $f(x)=6x+3$ و $g(x)=10$ فأوجد:

$(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f\times g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$-5x + 3y - 8 = 0$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$12x = -9y + 30$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y - 4 = 0$ و $4y = 16x + 4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y - 12x - 6 = 0$ ، $8y + 2x - 30 = 0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي -5 ؟

المحاضرة(٣)

النهايات و الاتصال

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a .

مثال :-

إذا كانت f(x) = ٢x +١ فإن $lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى ٢ وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي ٥ .

جبر النهايات :

١- إذا كانت f(x)=c (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت f(x) = m x + c فإن $lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :

$$\lim_{x\to 5} 30$$

$$\lim_{x\to 2}(1-2x)$$

$$\lim_{x\to 2}(3x+4)$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$$

الحل

$lim_{x\to 5} 30$ = ٣٠

$lim_{x\to 2}(1-2x)$ = ١ – (٢ × -٢) = ٥

$lim_{x\to 2}(3x+4)$ = ٣ × ٢ +٤ = ٦+ ٤ = ١٠

$lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x-5)$ = ٨ × ١/٢ -٥ = ٤ – ٥ = -١

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

١- $\lim_{x\to 5}[h(x) - f(x)]$

$= \lim_{x\to 2} h(x) - \lim_{x\to 2} f(x)$

= ١٠,٥ - ٥ = ٥,٥

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

٢- $\lim_{x\to 5}[g(x) \times h(x)]$

$= \lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x)$

= -٨ × ١٠,٥ = -٨٤

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

٣- $\lim_{x\to 2} 8 f(x)$

$= 8 \times \lim_{x\to 2} f(x)$ = ٨ × ٥ = ٤٠

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

٤- $\lim_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

$= \frac{\lim_{x\to 2} f(x)}{\lim_{x\to 2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن :-

$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

مثال :

$lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = [lim_{x\to 1} 3x-1]^{٦}$

$= [٣\times١-١]^{٦} = [٣-١]^{٦} = [٢]^{٦} = ٦٤$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

١- $lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7)$

$= ٣ \times ٢^{٣} + ٥ \times ٢^{٢} - ٧$

$= ٣ \times ٨ + ٥ \times ٤ - ٧ = ٣٧$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٢- $lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5}$

$= \frac{3\times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -١٧$

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٣- $lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{5x+3}$

$= \frac{2\times 2-1}{5\times 2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$

٤- $lim_{x\to 2} e^x$

$= e^2$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٥- $lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1}$

$= e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

٦- $lim_{x\to 2} log(3x^2+5) = \log(٣\times٢^{٢}+٥)$

$= \log(٣\times٤+٥)$

$= \log(١٢+٥) = \log(١٧)$


أمثلة

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٧- $lim_{x\to 3}\, ln(2x-5)$ = ln (٢×٣-٥) = ln (٦-٥) = ln (١) = ٠

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

٨- $lim_{x\to 1}(3x^3+4x-2)^3$ = ((٣×١^{٣}) + ٤ × ١ -٢)^{٣}

= (٣+٤-٢)^{٣} = (٥)^{٣} = ١٢٥

٩- $lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ = ٢,٠٨

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x)=\begin{cases} 9x^2 & , x < ٥ \\ 15x-2 & , x > ٥ \end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , x < ١ \\ 7x-2 & , x > ١ \end{cases}$$

فأوجد :-

١- $lim_{x\to 3} f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= ٧x -٢ = ٧ × ٣ -٢ = ١٩

مثال :

إذا كانت $f(x)=\begin{cases} 3x^2+5 & , x < ١ \\ 7x-2 & , x > ١ \end{cases}$

فأوجد :-

٢- $lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

$= ٣x^{٢} + ٥ = ٣ \times (\frac{1}{2})^{٢} + ٥ = ٣ \times \frac{1}{4} + ٥ = \frac{3}{4} + ٥ = \frac{3}{4} + \frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \ x < ١ \\ 7x - 2 & , \ x > ١ \end{cases}$$

فأوجد :-

٣- $lim_{x\to 1} f(x)$

الحل

٣- $\lim_{x\to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $lim_{x\to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= ٧x - ٢ = ٧ \times ١ - ٢ = ٥$

$lim_{x\to 1^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= ٣x^{٢} + ٥ = ٣ \times (١)^{٢} + ٥ = ٣+٥ = ٨$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to 1^+} f(x) \neq lim_{x\to 1^-} f(x)$

$lim_{x\to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \ x < 5 \\ 6x - 10 & , \ x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$$\lim_{x\to 5} f(x)$$

الحل

$$\lim_{x \to 5} f(x)$$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $lim_{x\to 5^+} f(x)$ والنهاية من اليسار $lim_{x\to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$lim_{x\to 5^+} f(x)$(النهاية من اليمين)

= ٦x -١٠ = ٦ × ٥ -١٠ = ٢٠

$lim_{x\to 5^-} f(x) =$(النهاية من اليسار)

= ٢٠ × (٥)^{٢} + ١٥ = ٢٠ × ٢٥ +١٥ = ٥٠٠ +١٥ = ٥١٥

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار لا

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$lim_{x\to 5^+} f(x) \neq lim_{x\to 5^-} f(x)$

$lim_{x\to 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

١- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

٢- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

٣- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة(٤)

الجزء الاول : تابع الاتصال

الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

الاتصال :-

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \ ٠ < x < ٥ \\ 25 + 2x & , \ x \geq ٥ \end{cases}$$

متصلة في $x = ٥$ ؟

الحل

f(٥) = ٢٥+٢x = ٢٥ +٢× ٥ = ٢٥ +١٠ = ٣٥

$lim_{x\to 5^+} f(x)$ = ٢٥+٢x = ٢٥ +٢× ٥ = ٢٥ +١٠ = ٣٥

$lim_{x\to 5^-} f(x)$ = ٦x = ٦× ٥ = ٣٠

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=٥ .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \ ٠ < x < ١٠ \\ 20 + 4x & , \ x \geq ١٠ \end{cases}$$

متصلة في $x = ١٠$ ؟

الحل

f(١٠) = ٢٠+٤ x = ٢٠ + ٤×١٠ = ٢٠ +٤٠ = ٦٠

$lim_{x\to 10^+} f(x)$ = ٢٠+٤x = ٢٠ +٤× ١٠ = ٢٠ +٤٠ = ٦٠

$lim_{x\to 10^-} f(x)$ = ١٢x٢ = ١٢× ١٠٢ = ١٢٠٠

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=١٠ .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \ x \leq ٨ \\ 1160 + 15x & , \ x > ٨ \end{cases}$$

متصلة في ٨ = x ؟

الحل

$f(٨) = ٢٠ x^{٢} = ٢٠ \times (٨)^{٢} = ٢٠ \times ٦٤ = ١٢٨٠$

$lim_{x\to 8^+} f(x) = ١١٦٠ + ١٥x = ١١٦٠ + ١٥ \times ٨ = ١٢٨٠$

$lim_{x\to 8^-} f(x) = ٢٠ x^{٢} = ٢٠ \times (٨)^{٢} = ٢٠ \times ٦٤ = ١٢٨٠$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=٨ .

تمارين الواجب :-

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 0} 5$$

$$\lim_{x\to 5}(10 - 2x + x^2)$$

$$\lim_{x\to 12}(3x + 6)$$

$$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x - 2)$$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $lim_{x\to 5} f(x) = 20$ و $lim_{x\to 5} g(x) = -15$ و $lim_{x\to 5} h(x) = 18.5$ ،

فأوجد ما يلي :-

١- $lim_{x\to 5}[h(x) + f(x)]$

٢- $lim_{x\to 5}[h(x) - g(x)]$

٣- $lim_{x\to 5}[g(x) \times f(x)]$

٤- $lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

١- $lim_{x\to 1}\lceil 5x-2\rceil^2$

٢- $lim_{x\to 2}\lceil 10\ -2x\rceil^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

١- $lim_{x\to 5}(2x^3-2x^2-50)$

٢- $lim_{x\to 0}(1-e^x)$

٣- $lim_{x\to 1}\, log(10x^4+15)$

٤- $lim_{x\to 2}\, e^{2x^2+3x+2}$

٥- $lim_{x\to 3}\, ln(20x^2-5x+10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}30x^2+15 & ,\ x<2\\ 5x-2 & ,\ x>٢\end{cases}$$

فأوجد :-

١- $lim_{x\to 3} f(x)$

٢- $lim_{x\to 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x)=\begin{cases} 2x & , \ ٠ < x < ١ \\ 3+x^2 & , \ x \geq ١ \end{cases}$$

متصلة في $x = ١٠$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلاً:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل :

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= ٥x + ٩$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx}$ =?????

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = ١٥$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$$\frac{dy}{dx} = ٠$$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

١- $y = x^٥$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dx} = ٥\,x^٤$

$٢- \ y = ١٥ \, x^{٤}$ $\frac{dy}{dx} = ٦٠ \, x^{٣}$

$٣- \ y = ١٠ \, x \quad \frac{dy}{dx} = ١٠$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$١- \ y = ٥ \, x^{٤} + ٦ \, x^{٣} + ٨ \, x^{٢} + ٣ \, x$

$\frac{dy}{dx} = ٢٠ \, x^{٣} + ١٨ \, x^{٢} + ١٦ \, x + ٣$

$٢- \ y = ٢٠ \, x^{٥} + ١٠ \, x^{٣} - ٥ \, x^{٢} + ١٥ \, x + ٣٠$

$\frac{dy}{dx} = ١٠٠ \, x^{٤} + ٣٠ \, x^{٢} - ١٠ \, x + ١٥$

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

$١- \ y = ٥ \, x^{٤} + ٦ \, x^{٣} + ٨ \, x^{٢} + ٣ \, x$

$\frac{dy}{dx} = ٢٠ \, x^{٣} + ١٨ \, x^{٢} + ١٦ \, x + ٣$

$٢- \ y = ٢٠ \, x^{٥} + ١٠ \, x^{٣} - ٥ \, x^{٢} + ١٥ \, x + ٣٠$

$\frac{dy}{dx} = ١٠٠ \, x^{٤} + ٣٠ \, x^{٢} - ١٠ \, x + ١٥$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

$١- \ y = (٣ \, x + ١) (x^{٢} – ٧ \, x)$

$\frac{dy}{dx} = (٣ \, x + ١) (٢x - ٧) + (x^{٢} – ٧ \, x) (٣)$

$٢- \ y = (١٠ \, x^{٣} - ١٢) (٥ \, x^{٢} + ٢ \, x)$

$\frac{dy}{dx} = (١٠ \, x^{٣} - ١٢)(١٠ \, x + ٢) + (٣٠ \, x^{٢}) (٥ \, x^{٢} + ٢x)$

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{البسط مشتقة} - \text{البسط} \times \text{المقام مشتقة}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4)-(x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9\,x^2} = \frac{9x-6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

١ – $y = (١٥x^٢ + ٢٠)^٣$

$$\frac{dy}{dx} = ٣\,(١٥x^٢ + ٢٠)^٢\,(٣٠x)$$

٢ – $y = (١٠\,x^٣ - ١٢x^٢ + ٥)^٥$

$$\frac{dy}{dx} = ٥\,(١٠\,x^٣ - ١٢x^٢ + ٥)^٤\,(٣٠x^٢ - ٢٤x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = ١٥\,x^٤ + ١٢\,x^٣ + ٢٠\,x^٢ - ٥\,x + ١٢$$

(المشتقة الاولى) $\frac{dy}{dx} = ٦٠\,x^٣ + ٣٦\,x^٢ + ٤٠\,x - ٥$

(المشتقة الثانية) $\frac{d^2y}{dx^2} = ١٨٠\,x^٢ + ٧٢\,x + ٤٠$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = ٣٦٠\,x + ٧٢$$

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١ ـ المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخليةفتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ١ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < ١ (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= ٨٠ – ٦x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -٦)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (-٦) × $\frac{10}{100}$ = -٠,٦

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= ٢٠٠ – ١٠ x) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= -١٠)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (-١٠) × $\frac{٢٠}{٢٠٠}$ = -١

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي (D= ١٥x-٢٠) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب (D/= ١٥)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = (١٥) × $\frac{100}{1000}$ = ١,٥

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي (D = ١,٥x +٢٠) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي ٦٠٠ وحدة عند سعر ٢٠٠ ريال ؟

المحاضرة(٥)

تابع التفاضل و تطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٢- الاستهلاك والادخار

١- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .

قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

٢- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل

قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = ١٥ + ٠,٦x - ٠,٠٢x^٢$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = ٠,٦ - ٠,٠٤\ x$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K' = ٠,٦ - ٠,٠٤\ x\ ١ = ٠,٦ - ٠,٠٤ = ٠,٥٦$

٣-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

= ١ – الميل الحدي للاستهلاك = ١- ٠,٥٦ = ٠,٤٤

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = ١٨ + ٠,٨\ x - ٠,١٥x^٢$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = ٠,٨ - ٠,٣\ x$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K' = ٠,٨ - ٠,٣\ x\ ١ = ٠,٨ - ٠,٣ = ٠,٥$

٣-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال = ١ – الميل الحدي للاستهلاك = ١- ٠,٥ = ٠,٥

٣- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .

٢ - يتم إيجاد المشتقة الثانية .

٣ - تحديد نوع النهاية (عظمى–صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= -٠,٤x^{٢} + ٣٠٠x - ٢٠٠٠$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

١ - المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -٠,٨x + ٣٠٠$

٢ - المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -٠,٨$

٣ - نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= ٥٠٠ - ٠,٢x + ٠,١x^{٢}$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

١ - المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -٠,٢ + ٠,٢x$

٢ - المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = ٠,٢$

٣ - نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

٤ - الربح الحدي

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

٢- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

٣- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

٤- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

٥- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

٦- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (١) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$$R = ١٢x^{٣} + ٢٠x^{٢} - ١٠x + ٣٠$$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$$R' = ٣٦x^{٢} + ٤٠x - ١٠$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x = ١٠$

$R' = ٣٦x^{٢} + ٤٠x - ١٠ = ٣٦ \times ١٠^{٢} + ٤٠ \times ١٠ - ١٠ = ٣٩٩٠$ ريال

مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price (سعر وحدة البيع) $= ٤x^{٢} + ٦x + ٥$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة ×x)

$$R = (١٠x^{٣} - ١١x^{٢} + ٥x - ٢٠) \times x = ١٠x^{٤} - ١١x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢٠x$$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$$R' = ٤٠x^{٣} - ٣٣x^{٢} + ١٠x - ٢٠$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً x=٥

$R^{/} = ١٢x^{٢} + ١٢x + ٥ = ١٢\times١٥^{٢} + ١٢\times١٥ + ٥ = ٢٨٨٥ r.s$

مثال (٣) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $١٠x^{٣} - ١١x^{٢} + ٥x - ٢٠$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) ×x

$R = (١٠x^{٣} - ١١x^{٢} + ٥x - ٢٠)\times x = ١٠x^{٤} - ١١x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢٠x$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = ٤٠x^{٣} - ٣٣x^{٢} + ١٠x - ٢٠$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً x=٥

$R^{/} = ٤٠x^{٣} - ٣٣x^{٢} + ١٠x - ٢٠$

$= ٤٠\times٥^{٣} - ٣٣\times٥^{٢} + ١٠\times٥ - ٢٠$

٤٢٠٥ريال

مثال (٤) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = ١٠x^{٢} - ١٢x + ١٥$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٠وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

(التكاليف الكلية) $C = ١٠x^{٢} - ١٢x + ١٥$

$C^{/} = ٢٠x - ١٢$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=١٠$

$C^{/} = ٢٠x - ١٢ = ٢٠ \times ١٠ - ١٢ = ١٨٨ r.s$

مثال (٥) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$C = (٥x^{٢} - ٣x + ١٥)^{٣}$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (٥x^{٢} - ٣x + ١٥)^{٣}$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = ٣\times(٥x^{٢} - ٣x + ١٥)^{٢}\times(١٠x - ٣)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=٢٠$

$C^{/} = ٣\times(٥x^{٢} - ٣x + ١٥)^{٢}\times(١٠x - ٣)$

$= ٣\times(٥\times٢٠^{٢} - ٣\times٢٠ + ١٥)^{٢}\times(١٠\times٢٠ - ٣)$

$= ٣\times (٥\times٤٠٠ - ٦٠ + ١٥)^{٢} \times(٢٠٠-٣)$

$= ٣\times(١٩٥٥) \times(١٩٧) = ١١٥٥٤٠٥ \ r.s$

مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = ٢x^{٣} - ٦x^{٢} + ١٠x - ١٥$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = ١٥x^{٢} + ٩x - ١٧$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(٢x^{٣} - ٦x^{٢} + ١٠x - ١٥) - (١٥x^{٢} + ٩x - ١٧)$

$= ٢x^{٣} - ٢١x^{٢} + x + ٢$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = ٢x^{٣} - ٢١x^{٢} + x + ٢$

$P' = ٦x^{٢} - ٢١x + ١$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=٣٠$

$P' = ٦x^{٢} - ٢١x + ١ = ٦\times٣٠^{٢} - ٢١\times٣٠ + ١ = ٤٧٧١ r.s$

مثال (٧) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$R = ١٢x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢x + ١٠٠$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = ١٠x^{٢} + ٣x + ٢٠$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$P = R - C$

$=(١٢x^{٣} + ٥x^{٢} - ٢x + ١٠٠) - (١٠x^{٢} + ٣x + ٢٠)$

$= ١٢x^{٣} + ١٥x^{٢} - ٥x + ٨٠$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$P = ١٢x^{٣} + ١٥x^{٢} - ٥x + ٨٠$

$P' = ٣٦x^{٢} + ٣٠x - ٥$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٥ وحدة إذاً $x=٢٥$

$P' = ٣٦x^{٢} + ٣٠x - ٥ = ٣٦\times٢٥^{٢} + ٣٠\times٢٥ - ٥ = ٢٣٢٤٥ r.s$

تمرين شامل (١)

الربح الحدي

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = ٣٠\, x^{٤} + ١٢x^{٢} - ٦\, x + ١٥$$

$$C = ١٣\, x^{٣} - ٥x^{٢} + ٣\, x - ٢٠$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$R = ٣٠\, x^{٤} + ١٢x^{٢} - ٦\, x + ١٥$$

$$R^{/} = ١٢٠\, x^{٣} + ٢٤x^{٢} - ٦$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=١٠$

$$R^{/} = ١٢٠×١٠^{٣} + ٢٤×١٠^{٢} - ٦ = ١٢٢٣٩٤\, r.s$$

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة :-

$$C = ١٣\, x^{٣} - ٥x^{٢} + ٣\, x - ٢٠$$

$$C^{/} = ٣٩\, x^{٢} - ١٠x + ٣$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=١٢$

$$C^{/} = ٣٩×١٢^{٢} - ١٠×١٢ + ٣ = ٥٤٩٩\, r.s$$

٣- دالة الربح الكلي :-

$$R = ٣٠\, x^{٤} + ١٢x^{٢} - ٦\, x + ١٥$$

$$C = ١٣\, x^{٣} - ٥x^{٢} + ٣\, x - ٢٠$$

$$P = R - C = ٣٠\, x^{٤} - ١٣\, x^{٣} + ١٧x^{٢} - ٩\, x + ٣٥$$

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$P = ٣٠\ x^{٤} - ١٣\ x^{٣} + ١٧x^{٢} - ٩\ x + ٣٥$

$P^{/} = ١٢٠\ x^{٣} - ٣٩x^{٢} + ٣٤x - ٩$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=١٢$

$P^{/} = ١٢٠ \times ١٢^{٣} - ٣٩ \times ١٢^{٢} + ٣٤ \times ١٢ - ٩\ =$

تمرين شامل (٢)

الربح الحدي

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) $= ٣x^{٢} + ٢٥x - ١٨$

$C = ١٠\ x^{٢} + ٢x - ٥$

المطلوب :-

١- دالة الايراد الكلي .

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٤- دالة الربح الكلي .

٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر البيع الوحدة) × x

$R = (٣x^{٢} + ٢٥x - ١٨) \times x$

$= ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$R\ = ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$

$R^{/} = ٩x^{٢} + ٥٠x - ١٨$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=٥$

$R^{/} = ٩\times٥^{٢} + ٥٠\times٥^{٢} - ١٨ = ١٤٥٧ r.s$

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$R = ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} - ١٨x$

$R^{/} = ٩x^{٢} + ٥٠x - ١٨$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=٥$

$R^{/} = ٩\times٥^{٢} + ٥٠\times٥^{٢} - ١٨ = ١٤٥٧ r.s$

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

$C = ١٠ x^{٢} + ٢x - ٥$

$C^{/} = ٢٠ x + ٢$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=٢٠$

$C^{/} = ٢٠\times٢٠ + ٢ = ٤٠٢ r.s$

٤- دالة الربح الكلي :-

$R = ٣x^{٣} + ٢٥x^{٢} – ١٨x$

$C = ١٠ x^{٢} + ٢x - ٥$

$P = R - C = ٣x^{٣} + ١٥ x^{٢} – ٢٠x + ٥$

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$P = ٣x^{٣} + ١٥ x^{٢} – ٢٠x + ٥$

$P^{/} = ٩x^{٢} + ٣٠x - ٢٠$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=١٠$

$P^{/} = ٩ \times١٠^{٢} + ٣٠\times١٠ - ٢٠ = ١١٨٠ r.s$

تمارين واجب :-

١- إذا كانت دالة الاستهلاك هي $(K = ٠,٣x - ٠,٠١x^{٢})$ المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

٢- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = ٣x^{٢} + ٥x + ١٠٠$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

٣- إذا علمت أن :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) = $٨x^{٣} + ١٠x^{٢} + ٥x + ١٢$

$C = ٤ x^{٢} + ٣x - ١٠$

المطلوب :-

١- دالة الايراد الكلي .

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة .

٤- دالة الربح الكلي .

٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٢ وحدات .

المحاضره (٦)

التكامل و تطبيقاتة تجارية

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز ∫ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكامل xالمرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$\int x^n \, .dx \; = \; \frac{1}{n+1} x^{n+١} + c$

$\int k \, .dx \; = \; k\,x + c$

$\int \; .dx = \; x + c$

مثال :-

١- $\int x^3 \, .dx = \frac{1}{4} x^{٤} + c$

٢- $\int x^5 \, .dx = \; \frac{1}{6} x^{٦} + c$

٣- $\int 6 \, .dx = \;$ ٦ $x + c$

٤- $\int 3x^4 \, .dx = \; \frac{3}{5} x^{٥} + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \; .dx$$

الحل

$y = \frac{1}{6} x^{٦} + \frac{4}{4} x^{٤} - \frac{2}{3} x^{٣} + \frac{3}{2} x^{٢} + ٨x \; + c$

$y = \frac{1}{6} x^{٦} + x^{٤} - \frac{2}{3} x^{٣} + \frac{3}{2} x^{٢} + ٨x \; + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3\ .dx$$

الحل

y = $\frac{4}{4}$ x٤ - $\frac{30}{3}$ x٣ + $\frac{20}{2}$ x٢ + ٣x + c

y = x٤ - x٣+ ١٠x٢+ ٣x + c

٢- تكامل e^x:-

$\int e^x\,.dx = e^x + c$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$\int \frac{1}{x}\,.dx = \ln x + c$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9\,x^2 - 10x + 15\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٤،١)؟

الحل

y = $\frac{9}{3}\,x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15$x + c

y = $3\,x^3 - 5x^2 + 15$x + c

حيث أن قيمة x = ٤ و قيمة y = ١ فإن :-

١ = $3\,(4)^3 - 5(4)^2 + 15$x٤ + c

١ = ٣×٦٤$-5 \times 16 + 60$ + c

١ = ١٧٢ + c

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (٢،٣)؟

الحل

$$y = \frac{1}{3\times 4}\,x^4 - \frac{1}{4\times 3}x^3 - 7x + c$$

$$y = \frac{1}{12}\,x^4 - \frac{1}{12}x^3 - 7x + c$$

حيث أن قيمة x = ٢ و قيمة y = ٣ فإن :-

$$٣ = \frac{1}{12}\,(2)^4 - \frac{1}{12}(2)^3 - 7x٢ + c$$

$$٣ = \frac{16}{12} - \frac{8}{12} - 14 + c$$

C = ١٦,٣٣٣

التطبيقات التجارية للتكامل

١ ـ الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

٢ ـ التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣ ـ الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤ ـ الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$$R^{/} = 3x^2 + 6x - 10$$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١ ـ إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2 - 10x$$

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

٢- حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن x=٥ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$$R = x^3 + 3x^2 - 10x$$

الايراد الكلي $= (5)^3 + 3 \times (5)^2 - 10 \times 5 =$ ١٥٠ ريال

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$$C^{/} = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$$

$$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن x=١٠ يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 =$ ١٠٠٠٠ ريال

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$$R^{/} = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C^{/} = 36x^2 + 40x - 10$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤ـ دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥ـ حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١ـ حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$$R^{/} = 8x^3 + 24x^2 - 12\,x + 20$$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}\,x^2 + 20x$$

$$R = 2x^4 + 8x^3 - 6\,x^2 + 20x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=٢٠ كما يلي :-

$$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 =$ ٣٨٢٠٠٠ ريال

٢ـ حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة :-

حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$C^{/} =$ ٣٦$x^{٢}$ + ٤٠x – ١٠

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$C =$ ١٢ $x^{٣}$ +٢٠ $x^{٢}$ - ١٠x

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة يتم التعويض عن قيمة x=٢٥ كما يلي :-

$C =$ ١٢×(٢٥)^{٣} +٢٠ ×(٢٥)^{٢} - ١٠×(٢٥)= ١٩٩٧٥٠ ريال

٣ـ دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P^{/} = R^{/} - C^{/}$$

= (٨$x^{٣}$ + ٢٤$x^{٢}$- ١٢x +٢٠) – (٣٦$x^{٢}$ +٤٠x -١٠)

= ٨$x^{٣}$ - ١٢$x^{٢}$- ٥٢x +٣٠

٤ـ دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P' = ٨x^٣ - ١٢x^٢ - ٥٢x + ٣٠$

$P = ٢x^٤ - ٤x^٣ - ٢٦x^٢ + ٣٠x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$

$= (٢x^٤+٨x^٣-٦x^٢+٢٠x) - (١٢x^٣+٢٠x^٢-١٠x)$

$= ٢x^٤ - ٤x^٣ - ٢٦x^٢ + ٣٠x$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

دالة الربح الكلي هي :-

$P = ٢x^٤ - ٤x^٣ - ٢٦x^٢ + ٣٠x$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=١٠$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = ٢×(١٠)^٤ - ٤×(١٠)^٣ - ٢٦×(١٠)^٢ + ٣٠×(١٠)$

$= ٢٠٠٠٠ - ٤٠٠٠ - ٢٦٠٠ + ٣٠٠ = ١٣٧٠٠$ r.s

تمرين شامل (٢)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدي الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$R' = (٢x+١)(٥-٣x^٢)$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$C' = (٣x+١)^٢$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .

٣- دالة الربح الحدي .

٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة .

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي

$R^{/} = (٢x+١)\ (٥+٣x^{٢})$

$R^{/} = ١٠x + ٦x^{٣} +٥ + ٣x^{٢}$

(الايراد الحدي)$R^{/} = ٦x^{٣} + ٣x^{٢} +١٠x +٥$

وللوصول دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي :-

$R = (\frac{6}{4})\ x^{٤} + (\frac{3}{3})x^{٣}+ (\frac{10}{2})\ x^{٢} + ٥x$

$R = (\frac{6}{4})\ x^{٤} + x^{٣}+ ٥x^{٢} + ٥x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات يتم التعويض عن $x=١٠$:-

$R = (\frac{6}{4})\ (١٠)^{٤} + (١٠)^{٣}+ (٥)\ (١٠)^{٢} + ٥(١٠) =١٦٥٥٠ r.s$

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$C^{/} = (٣x+١)^{٢}$

(التكاليف الحدية) $= ٩x^{٢} + ٦x +١$

(التكاليف الكلية)$C = ٣x^{٣} + ٣x^{٢} + x$

وللوصوللحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=٢٠$:-

$C = ٣(٢٠)^{٣} + ٣(٢٠)^{٢} + (٢٠) = ٢٥٢٢٠ r.s$

٣- دالة الربح الحدي :-

الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P^{/} = R^{/} – C^{/}$

$= (٦x^{٣} + ٣x^{٢} +١٠x +٥) – (٩x^{٢} + ٦x +١)$

$= ٦x^{٣} - ٦x^{٢} + ٤x + ٤$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P^{/} = ٦x^{٣} - ٦x^{٢} + ٤x + ٤$

$P =(\frac{6}{4})\ x^{٤} -٢\ x^{٣} + ٢x^{٢} + ٤x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$

$= ((\frac{6}{4})x^٤ + x^٣ + ٥x^٢ + ٥x) - (٣x^٣ + ٣x^٢ + x)$

$= (\frac{6}{4})x^٤ - ٢x^٣ + ٢x^٢ + ٤x$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة :-

دالة الربح الكلي هي :-

$P = (\frac{6}{4})x^٤ - ٢x^٣ + ٢x^٢ + ٤x$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة x=٣٠ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = (\frac{6}{4}) \times (٣٠)^٤ - ٢ \times (٣٠)^٣ + ٢ \times (٣٠)^٢ + ٤ \times (٣٠)$

$= ١١٦٢٩٢٠$ r.s

تمارين متنوعة :-

١- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٦٠% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

١- الميل الحدي للإدخار = ٠,٦٠ .

٢- الميل الحدي للإستهلاك = ١ - ٠,٦٠ = ٠,٤٠

٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$k' = ٠,٤٠$

$K = ٠,٤٠x$

٢- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٧٥% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟

الحل

١- الميل الحدي للإدخار = ٠,٧٥ .

٢- الميل الحدي للإستهلاك = ١ - ٠,٧٥ = ٠,٢٥

٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$k' = ٠,٢٥$

$K = ٠,٢٥x$

المحاضرة(٧)

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$٠ \leq A \leq ١$

احتمال تحقق حدث $= \frac{A \text{ عدد حالات تحقق الحدث}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

١. حمراء
٢. بيضاء
٣. سوداء
٤. حمراء أو سوداء
٥. حمراء أو سوداء أو بيضاء

الحل

١- أحتمال أن تكون حمراء $= \frac{\text{عدد الكرات حمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100}$

٢- أحتمال أن تكون بيضاء $= \frac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100}$

٣- أحتمال أن تكون سوداء $= \frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100}$

٤ـ أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء = $\frac{30}{100} + \frac{50}{100} = \frac{80}{100}$

٥ـ أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء = $\frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} = ١$

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

١) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

٢) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .

٣) حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

٤) حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .

٥) حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .

٦) حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .

٧) حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .

الحل

١ـ حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{9000}{10000}$ = ٩٠ % .

٢ـ حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة = $\frac{1000}{10000}$ = ١٠ % .

٣ـ حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{8000}{10000}$ = ٨٠ % .

٤ـ حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي = $\frac{2000}{10000}$ = ٢٠ % .

٥ـ حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً = $\frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000}$ = ٠,٧٢ = ٧٢ %.

٦ـ حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً = $\frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$ = ٠,٠٢ = ٢ %.

٧ـ حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط == $\frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$

= ٠,٩ × ٠,٢ + ٠,٨ × ٠,١ = ٠,٢٦

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-

٦٠ طالب يدرسون محاسبة .

٣٠ طالب يدرسون تسويق .

١٠ طلاب يدرسون مالية .

إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

١) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة .

٢) إحتمال أن يكون تخصص تسويق .

٣) إحتمال أن يكون تخصص مالية .

٤) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .

٥) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .

الحل

١) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة = $\frac{60}{100}$

٢) إحتمال أن يكون تخصص تسويق = $\frac{30}{100}$

٣) إحتمال أن يكون تخصص مالية = $\frac{10}{100}$

٤) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق = $\frac{60}{100} + \frac{30}{100} = \frac{90}{100}$

٥) إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية = $\frac{60}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100}$ = ١

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمي الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

حيث أن :-

P(A) هو إحتمال تحقق الحدث A .

P(B) هو إحتمال تحقق الحدث B .

P(A∩B) : التقاطع و يشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).

P(A∪B) : الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحل :-

١- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز $P(A) = \frac{30}{50} =$ ٠,٦٠

٢- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B)= \frac{40}{50} =$ ٠,٨٠

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$P(A\cap B) = \frac{25}{50} =$ ٠,٥٠

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A\cup B) =$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =$ ٠,٦٠ + ٠,٨٠ - ٠,٥٠ = ٠,٩٠

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و ٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاً فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل ؟

الحل

١- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز $P(A)= \frac{50}{100} =$ ٠,٥٠

٢- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة المال بالرمز $P(B)= \frac{60}{100} =$ ٠,٦٠

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$P(A\cap B) = \frac{30}{100} =$ ٠,٣٠

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A\cup B) =$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =$ ٠,٥٠ + ٠,٦٠ - ٠,٣٠ = ٠,٨٠

أنواع الاحداث A و B :-

١- أحداث متنافية (متعارضة): وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الأخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$P(A\cap B) =$ ٠

٢- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن أحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$P(A∩B) = P(A) \times P(B)$

٣- أحداث غير مستقلة :وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الاخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً :-

$P(A∩B) \neq P(A) \times P(B)$

مثال :-

إذا كان [$P(A)=$ ٠,٣ , $P(B)=$ ٠,٤ , $P(A∩B)=$٠,١٢] هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$P(A∩B) = P(A) \times P(B)$ الشرط

١) $P(A) \times P(B)$ = ٠,٣ × ٠,٤ = ٠,١٢ .

٢) $P(A∩B)$ = ٠,١٢ .

٣) $P(A∩B) = P(A) \times P(B)$.

٤) إذا هذه الاحداث مستقلة .

مثال :-

إذا كان [$P(A)=$ ٠,٥ , $P(B)=$ ٠,٣ , $P(A∩B)=$٠,٢] هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

$P(A∩B) = P(A) \times P(B)$ الشرط

١) $P(A) \times P(B)$ = ٠,٥ × ٠,٣ = ٠,١٥

٢) $P(A∩B)$ = ٠,٢

٣) $P(A∩B) \neq P(A) \times P(B)$

٤) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال

إذا علمت أن $P(A)=$٠,٢ و $P(B)=$٠,٤ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

١) P(A∩B)

٢) P(A∪B)

٣) $P(\bar{A})$

٤) $P(\bar{B})$

الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

P(A∩B) = ٠

٢- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :

P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = ٠,٢ + ٠,٤ - ٠ = ٠,٦

٣- إحتمال$P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$P(\bar{A})$ = ١ - P(A)

= ١- ٠,٢ = ٠,٨

$P(\bar{B})$ = ١ - P(B)

= ١- ٠,٤ = ٠,٦

الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز P(A | B) و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١- في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = ٠$$

٢- في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

٣- في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال :-

إذا كان :-

P(A) = ٠,٦ , P(B)= ٠,٨ , P(A∩B)= ٠,٥

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A\cup B)$, $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

١) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

٢) P(A) × P(B) = ٠,٦ × ٠,٨ = ٠,٤٨

٣) P(A∩B) = ٠,٥

$P(A\cap B) \neq P(A) \times P(B)$ إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

١) P(A∪B) = P(A) + P(B) - P(A∩B) = ٠,٦ + ٠,٨ – ٠,٥ = ٠,٩

٢) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} =$ ٠,٦٢٥

٣) $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} =$ ٠,٨٣٣

٤) $P(\bar{A})$ = ١- P(A) = ١- ٠,٦ = ٠,٤

٥) $P(\bar{B})$ = ١- P(B) = ١- ٠,٨ = ٠,٢

مثال :-

إذا كان :-

P(A) = ٠,٧ , P(B)= ٠,٤ , P(A∩B)= ٠,٢٨

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A\cup B)$, $P(A \mid B)$, $P(B \mid A)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

١) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

٢) $P(A) \times P(B)$ = ٠,٧ × ٠,٤ = ٠,٢٨

٣) $P(A\cap B)$ = ٠,٢٨

٤) $P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

١) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ = ٠,٧ + ٠,٤ – ٠,٢٨ = ٠,٨٢

٢) $P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} =$ ٠,٧

٣) $P(B \mid A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} =$ ٠,٤

٤) $P(\bar{A})$ = ١- $P(A)$ = ١- ٠,٧= ٠,٣

٥) $P(\bar{B})$ = ١- $P(B)$ = ١- ٠,٤ = ٠,٦

المحاضرة(٨)

تابع نظرية الاحتمالات

مثال :-

في دراسة لتخصصات ٤٠٠ طالب وطالبة من خريجي جامعة الملك فيصل كانت النتائج كالتالي :-

التخصص	طالب B	طالبة C	المجموع
علمي S	١٢٠	٤٠	١٦٠
أدبي L	٩٦	١٤٤	٢٤٠
المجموع	٢١٦	١٨٤	٤٠٠

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

حساب إحتمال أن يكون الشخص طالب أو علمي ؟

$$P(B\cup S) = P(B) + P(S) - P(B\cap S)$$

$$= \frac{216}{400} + \frac{160}{400} - \frac{120}{400} = \frac{256}{400} = ٠,٦٤$$

حساب إحتمال أن يكون الشخص طالبة و تخصص أدبي :-

$$P(C\cap L) = \frac{144}{400} = ٠,٣٦$$

إذا علمت أن الشخص المختار طالبة أحسب احتمال أن يكون تخصصها أدبي :-

$$P(L \mid C) = \frac{P(L\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{144}{400}}{\frac{184}{400}} = \frac{144}{184} = ٠,٧٨٢٦$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و المستوى التعليمي :-

النوع / المستوى التعليمي	ماجستير A	دكتوراهB	المجموع
ذكرC	١٢٠	١٦٠	٢٨٠
أنثى D	٨٠	٢٤٠	٣٢٠
المجموع	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠

حساب إحتمال أن يكون الشخص ذكر أو حاصل على ماجستير :-

$$P(C\cup A) = P(C) + P(A) - P(C\cap A)$$

$$= \frac{280}{600} + \frac{200}{600} - \frac{120}{600} = \frac{360}{600} = ٠,٦$$

حساب إحتمال أن يكون الشخص أنثى و حاصلة على ماجستير :-

$$P(D\cap A) = \frac{80}{600} = ٠,١٣٣٣$$

إذا علمت أن الشخص المختار حاصل على ماجستير أحسب احتمال أن يكون ذكر :-

$$P(C \mid A) = \frac{P(C\cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{120}{600}}{\frac{200}{600}} = \frac{120}{200} = ٠,٦$$

مثال :-

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو ٠,٦ واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو ٠,٧ أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة :-

١- إحتمال النجاح في المقررين معاً ؟

الحل

$P(A)$ = ٠,٦ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(B)$ = ٠,٧ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

احتمال النجاح في المقررين معاً يساوي :-

$$P(A\cap B)= P(A) \times P(B) = ٠,٦ \times ٠,٧ = ٠,٤٢$$

٢- إحتمال الرسوب في المقررين معاً ؟

الحل

$P(A)$ = ٠,٦ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(\bar{A})$ = ١- $P(A)$ = ١ - ٠,٦ = ٠,٤ (احتمال الرسوب في الرياضيات)

$P(B)$ = ٠,٧ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(\bar{B})$ = ١- $P(B)$ = ١ - ٠,٧ = ٠,٣ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)

$$P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = ٠,٤ \times ٠,٣ = ٠,١٢$$

٣- احتمال نجاح الطالب في مقرر واحد فقط ؟

الحل

$P(A)$ = ٠,٦ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(\bar{A}) = ١ - P(A) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤$ (احتمال الرسوب في الرياضيات)

$P(B) = ٠,٧$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(\bar{B}) = ١ - P(B) = ١ - ٠,٧ = ٠,٣$ (احتمال الرسوب في الاقتصاد)

$P = ٠,٦ \times ٠,٣ + ٠,٧ \times ٠,٤ = ٠,١٨ + ٠,٢٨ = ٠,٤٦$

٤- احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل ؟

الحل

$P(A) = ٠,٦$ (احتمال النجاح في مقرر الرياضيات)

$P(B) = ٠,٧$ (احتمال النجاح في مقرر الاقتصاد)

$P(A \cap B) = ٠,٤٢$

احتمال النجاح في مقرر واحد على الاقل يقصد بذلك الاتحاد :-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ٠,٦ + ٠,٧ - ٠,٤٢ = ٠,٨٨$

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة، ومن ثم مجال هذا المتغير، يشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير احتمال معين، وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين هما:

١- المتغيرات العشوائية المنفصلة

Discrete Random Variables

٢- المتغيرات العشوائية المتصلة(المستمرة)

Continuous Random Variables

١- المتغير العشوائي المنفصل :-

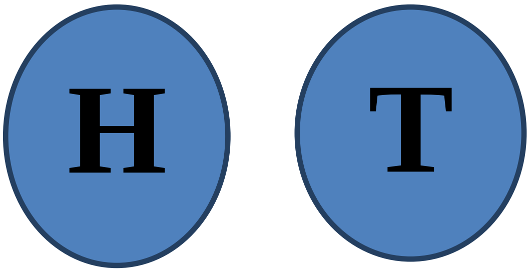
هو المتغير العشوائي الذي يأخذ قيماً حقيقية مختلفة (وبمعنى أخر فهو يشمل جميع القيم الصحيحة دون القيم الكسرية مثل عدد الطلاب في فصل دراسي ١،٢،٣،٤،٥....لا يمكن أن يأخذ صورة كسرية).

٢- المتغير العشوائي المتصل :-

ويطلق علية المتغير العشوائي المستمر فذلك المتغير يأخذ عدد لا نهائي من القيم المتصلة (ومن ثم فإنه يأخذ القيم الصحيحة و جميع القيم الكسرية التي تقع بين هذه القيم و كمثال على هذه المتغيرات درجات الحرارة ٣٥,٧أو أطوال الطلاب أو المعدلات التراكمية للطلاب)

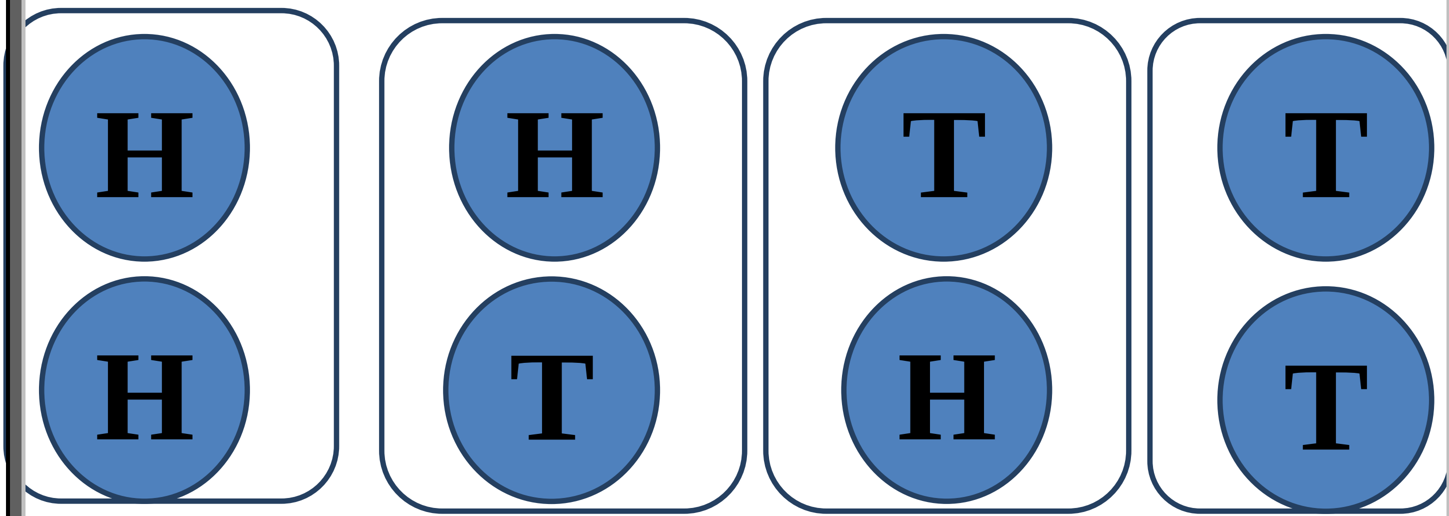
مثال :-

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائي X هو عدد مرات ظهور الصورة , فأوجد القيم التي يأخذها ذلك المتغير واحتمالاته ؟



الحل

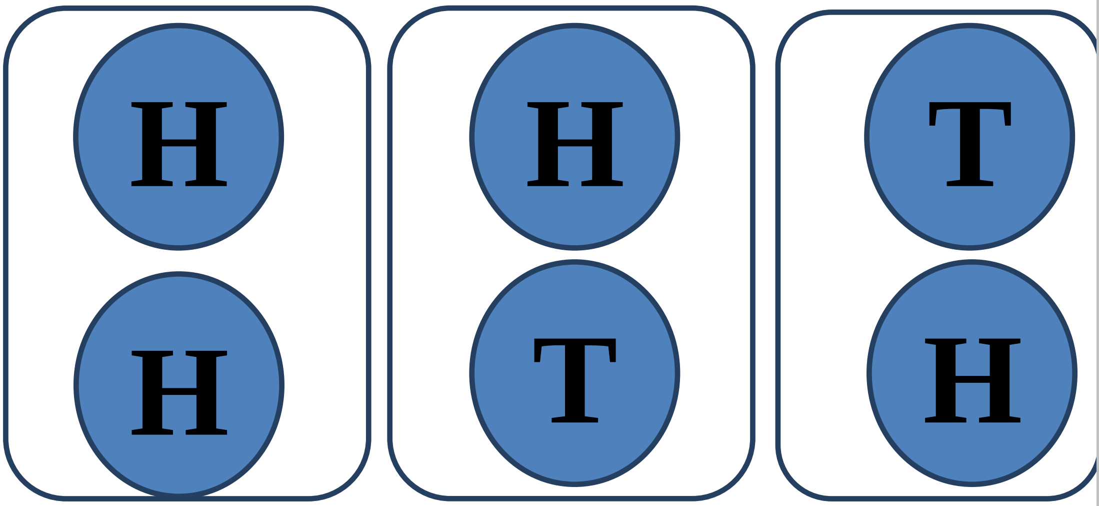
١- فراغ العينة (S):- S = { HH ,HT,TH,TT}



٢- الحدث (A):-

(تمثل وصف لنتائج التى يمكن أن يأخذها المتغير)

A ={HH ,HT,TH}



٣- المتغير العشوائى (X):-

(وصف رقمى لعدد مرات ظهور الصورة)

٤ـ احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

P(x=٠) = ¼   where (TT)

P(x=١) = ٢/٤ = ½   where (HT , TH)

P(x=٢) = ¼   where (HH

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوى واحد :-

P(x=٠) + P(x=١) +P(x=٢) =

مثال :-

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين إذا كان المتغير العشوائى X هو مجموع العددين الظاهرين فأوجدي القيم التي يأخذها المتغير X وأوجدي احتمال الحصول على كل من هذه القيم ؟

الحل

١ـ فراغ العينة (S):-

s = { (١،٦), (١،٥) , (١،٤) , (١،٣) , (١،٢) , (١،١),

, (٢،٦) , (٢،٥) , (٢،٤) , (٢،٣) , (٢،٢) , (٢،١)

, (٣, ٦) , (٣, ٥) , (٣, ٤) , (٣, ٣) , (٣, ٢) , (٣،١)

, (٤, ٦) , (٤, ٥) , (٤, ٤) , (٤, ٣) , (٤, ٢) , (٤, ١)

, (٥, ٦) , (٥, ٥) , (٥, ٤) , (٥, ٣) , (٥, ٢) , (٥, ١)

{ (٦, ٦) , (٦, ٥) , (٦, ٤) , (٦, ٣) , (٦, ٢) , (٦, ١)

٢ـ المتغير العشوائى (X):-

(وصف رقمي لمجموع العددين الظاهرين)

X = {٢ , ٣ , ٤ , ٥ , ٦ , ٧ , ٨ , ٩ , ١٠ , ١١ , ١٢ }

٣ـ احتمال تحقق القيم المختلفة للمتغير p(x):-

P(x=٣) = ٢/٣٦   P(x=٢) = ١/٣٦

P(x=٥) = ٤/٣٦   P(x=٤) = ٣/٣٦

P(x=٧) = ٦/٣٦   P(x=٦) = ٥/٣٦

P(x=٩) = ٤/٣٦   P(x=٨) = ٥/٣٦

P(x=١١) = ٢/٣٦   P(x=١٠) = ٣/٣٦

P(x=١٢) = ١/٣٦

لاحظ أن مجموع الاحتمالات دائماً تساوي واحد :-

P(x=٠) + P(x=١) +P(x=٢) …… +P(x = ١٢) = ١

تمارين واجب :-

مثال :-

إذا أعطيت الجدول التالي :-

	A	B	المجموع
X	١٠	٤٥	٥٥
Y	٣٠	١٥	٤٥
المجموع	٤٠	٦٠	١٠٠

المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

٢- $P(\bar{A})$ ١- P(A)

٤- $P(\bar{X})$ ٣- P(X)

٥- P(B∩X) ٦- P(A∩X)

٧- P(A∪Y) ٨- P(B∪Y)

٩- P(A|Y) ١٠- P(B|Y)

للحل:-

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص تبعاً للنوع و تقديرات التخرج :-

النوع / المستوى التعليمي	جيد A	ممتاز B	المجموع
ذكرX	٢٠٠	٣٠٠	٥٠٠
أنثى Y	٤٠٠	١٠٠	٥٠٠
المجموع	٦٠٠	٤٠٠	١٠٠٠

من خلال الجدول السابق المطلوب :-

١- أحسب إحتمال أن يكون ذكر أو حاصل على تقدير جيد ؟

٢- أحسب أحتمال أن تكون أنثى و حاصلة على تقدير ممتاز ؟

٣- إذا علمت أنها أنثى فما هو أحتمال أن تكون حاصلة على تقدير جيد ؟

المحاضرة(٩)

تابع نظرية الاحتمالات

مثال :

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الاشخاص :

النوع / المستوى التعليمي	X	y	المجموع
A	٥	١٠	١٥
B	١٢	٣	١٥
المجموع	١٧	١٣	٣٠

من خلال الجدول السابق المطلوب حساب الاحتمالات التالية :-

P(y)   **P(B∪y)**

P($\overline{B}$)   **P(x∩A)**

P(B│x)   **P(A│y)**

تمرين :-

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الالة الاولى تنتج ٣٠% من إنتاج المصنع و الالة الثانية تنتج ٥٠% من الانتاج و الباقي للألة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للألأت الثلاثة على التوالي هي ٥% و ١% و ٢% ،وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع إحسب :-

١ ـ احتمال أن تكون معيبة :-

P = ٠,٣٠*٠,٥ + ٠,٥٠*٠,٠١ + ٠,٢٠*٠,٠٢ = ٠,٠٢٤

٢ ـ اذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الالة الثالثة :-

$$P = \frac{0.004}{0.024} = \frac{4}{24}$$

تمرين :-

تطبع ثلاث سكرتيرات جميع مراسلات مكتب ما, فإذا كانت السكرتيرة A تطبع ٤٠٪ من المراسلات, و تطبع B٣٠٪ و تطبع C٣٠٪ الباقية , إذا كان احتمال أن A تخطئ في الطباعة هو ٠,٠٢ و احتمال الخطأ في عند B هو ٠,٠٣ و احتماله عند C هو ٠,٠٤.

سحبت ورقة من المراسلات فوجد فيها خطأ , أوجد احتمال أن تكون السكرتيرة B هي التي طبعتها؟

$$P = \frac{0.30 \times 0.03}{0.40 \times 0.02 + 0.30 \times 0.03 + 0.30 \times 0.04}$$

$$= \frac{9}{29} = 0.31$$

التوزيع الاحتمالى :-

التوزيع الاحتمالي، هو الذي يبين احتمالات حدوث القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير، والتي ترتبط باحتمالات النتائج الممكنة في فراغ العينة، وبمعنى آخر هو التكراري النسبي للقيم التي يمكن أن يأخذها المتغير،وهو جدول مكون من صفين ، الأول به القيم الممكنة للمتغير ، والثاني به القيم الاحتمالية لهذا المتغير.

مثال :-

كون جدول التوزيع الاحتمال للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

P(x=٠) = ¼ where (TT)

P(x=١) = ٢/٤ = ½ where (HT , TH)

P(x=٢) = ¼ where (HH)

X	0	1	2	المجموع
P(x)	1/4	1/2	1/4	1

التوقع الرياضى :-

هو الوسط الحسابي أو القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي ويرمز له بالرمز μ أو E(x) ويتم حسابه باستخدام القانون التالي:-

$$\mu = E(x) = \sum(x \times P(x))$$

بمعنى أن التوقع يساوي حاصل جمع كل قيمة من قيم المتغير العشوائي مضروبة في احتمالها و الجدول التالي يوضح كيفية الوصول إلى قيمة التوقع الرياضي :-

x	الصف ١	المجموع
P(x)	الصف ٢	1
E(x)	1 × 2	القيمة المتوقعة

التوقع الرياضي

إذا كان X متغير عشوائي منفصل .

و كان $p(x)$ هو توزيعه الاحتمالي .

فإن وسطه الحسابي أو توقعه الرياضي يعطى بالعلاقة:

$$\mu = E(X) = \sum x\,p(x)$$

مثال :-

أوجد القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي x المعبر عن عدد مرات ظهور الصورة عند إلقاء عملة معدنية مرتين متتاليتين ؟

X	الصف (1)	0	1	2	Σ
P(X =x)	الصف (2)	¼	½	¼	1
μ = E(x)	(١) × (٢)	0	½	½	1

مثال :

إذا كان التوزيع الاحتمالي لعدد الأعطال اليومية لجهاز الحاسب كما يلي , فأوجد معدل العطل اليومي للجهاز؟

x	0	1	2	3	4	Σ
P(X =x)	0.20	0.30	0.25	0.15	0.10	1
μ = E(x)	0	0.30	0.50	0.45	0.40	1.65

$$\mu = E(X) = \sum x . p(x) = ١,٦٥$$

التباين والانحراف المعياري :-

التباين للمتغير العشوائي x الذي له قيمة متوقعة تساوي E(x) هو :-

$$\text{Var (x)} = \sigma^2 = \sum E(x^2) - \left(E(x)\right)^2$$

و الانحراف المعياري يمثل الجذر التربيعي للتباين :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

و للوصول إلى قيمة التباين و الانحراف المعياري يتم إتباع الخطوات التالية :-

X	صف(1)	Σ
P(X =x)	صف(2)	١
μ = E(x)	صف٣ = صف ١ *صف ٢	القيمة المتوقعة
$E(x^2)$	صف٤ = صف ١* صف ٣	

التباين = ناتج صف ٤ – (ناتج صف ٣)^2

تمرين :-

أوجد القيمة المتوقعة والانحراف المعياري والتباين للتوزيع الاحتمالي التالي:-

x	0	1	2	3
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1

الحل :-

x	0	1	2	3	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.3	0.2	0.4	0.1	1	الاحتمال
$E(x)=x.P(x)$	0	0.2	0.8	0.3	1.3	التوقع
$E(X^2)=x.E(x)$	0	0.2	1.6	0.9	2.7	
σ^2	$=E(x^2)-E(x)^2$				1.01	التباين
σ					1.005	الانحراف المعياري

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	2	4	5	6
P(x)	**0.15**	**0.35**	**0.25**	**0.25**

المطلوب :-

١) الوسط الحسابي .

٢) التباين .

٣) الانحراف المعياري .

٤) $P(x \geq ٤)$.

٥) $P(٢ \leq x \leq ٥)$

x	2	4	5	6	Σ	قيم المتغير
P(x)	0.15	0.35	0.25	0.25	**1**	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	0.3	1.4	1.25	1.5	**4.45**	التوقع
$E(X^2)=x.E(x)$	0.6	5.6	6.25	9	**21.45**	
$v(x)=\sigma^2$	$=E(x^2)-E(x)^2$		$=٢١,٤٥-(٤,٤٥^٢)=$		**1.647**	التباين
σ	$=\sqrt{\sigma^٢}=\sqrt{١.٦٤٧}$				**1.28355**	الانحراف المعياري

$= P(x \geq ٤)$

١- الوسط الحسابي = التوقع الرياضي = ٤,٤٥

٢- التباين = ١,٦٤٧

٣- الانحراف المعياري = ١,٢٨٣٥

٤- $P(x \geq ٤) = P(٤) + P(٥) + P(٦) =$ ٠,٣٥ + ٠,٢٥+ ٠,٢٥ =٠,٨٥

$= ١ - P(٢) =$ ١ – ٠,١٥ = ٠,٨٥

٥- $P(٢ \leq x < ٥) = P(٢) + P(٤) =$ ٠,١٥ + ٠,٣٥ = ٠,٥

تمرين :-

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	٠	٢	٤	٦
P(x)	٠,١	٠,٢	٠,٤	?

المطلوب :-

١) p(٦)

٢) الوسط الحسابي .

٣) التباين .

٤) الانحراف المعياري .

٥) $P(x \geq ٤)$.

x	٠	٢	٤	٦	Σ	قيم المتغير
P(x)	٠,١	٠,٢	٠,٤	٠,٣	1	الاحتمال
E(x)=x.P(x)	٠	٠,٤	١,٦	١,٨	٣,٨	التوقع

مربع التوقع	١٨	١٠,٨	٦,٤	٠,٨	٠	$E(X^2)=x.E(x)$
التباين	٣,٥٦	=١٨-٣,٨^٢ =٣,٥٦		$=E(x^2)-E(x)^2$		$v(x)=\sigma^2$
الانحراف المعياري	١,٨٩					σ

$P(٦) = ٠,٣$, $P(x \geq ٤) = P(٤) + P(٦) = ٠,٤ + ٠,٣ = ٠,٧$

مدخن
غير مدخن

إذا كان احتمال أن يكون الفرد مدخن = $\frac{1}{3}$ عند سؤال ١٠ أفردا

سليم
تالف

إذا كان احتمال وجود مصباح تالف في صندوق = $\frac{2}{7}$, عند سحب مصباح من كل صندوق من ٥٠ صندوق في كل مرة قد يكون....

صورة
كتابة

رمي قطعة النقد ١٠ مرات

حاضرة
غائبة

إذا كان احتمال حضور الطالبة للمحاضرة $\frac{1}{4}$, بمتابعة حضور الطالبة في ٥ محاضرات

جميع التجارب السابقة تحقق الشروط التالية:

١. نتيجة كل محاولة للتجربة إما نجاح أو فشل.
٢. نتيجة كل محاولة مستقلة عن الأخرى .
٣. احتمال النجاح في كل محاولة يكون ثابت و ليكن p و احتمال الخطأ $q = 1 - p$
٤. إجراء التجربة عدة مرات فتكون هناك n محاولة.

تجربة ذات الحدين

X يسمى متغير ذات الحدين
و توزيعه الاحتمالي هو توزيع ذات الحدين
حيث x=٠،١،٢،٣,.....n

إذا كان X = عدد النجاحات في n محاولة

عند رمي قطعة نقد ٧ مرات إذا اعتبرنا ظهور H هو النجاح فإن P(X=٤) تعني.....
ما احتمال أن يظهر الوجه H أربع مرات عند رمي قطعة النقد ٧ مرات.

مراجعة على التوافيق :-

تمرين :-

عند اجراء تجربة ذات الحدين ٥ مرات X متغير ذات حدين

Pاحتمال الفشل = q=١-p فإن احتمالة تحقق هذه الظاهرة ثلاث مرات

$$p(X=3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3}$$

التوزيع الاحتمالي لمتغير ذات الحدين X عند اجراء التجربة n مرة :

$$p(X=x) = b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

حيث أن p احتمال النجاح و $q = 1 - p$

x= ٠،١،٢،٣........n

تمرين :-

رميت قطعة نقود متزنة ٤ مرات , أوجد التوزيع الاحتمالي لعدد H الظاهر فيها.

التجربة تحقق شروط ذات الحدين , نفرض أن النجاح هو ظهور H .

$$n = 4 \, , p = \frac{1}{2} \, , q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$b\left(x,4,\frac{1}{2}\right) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \quad , x = 0,1,2,3,4$$

$$= \binom{4}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$$

تمرين :-

عند رمي حجر النرد ٤ مرات, ما احتمال عدم ظهور الوجه٦؟ ما احتمال ظهور ٦ مرتين ؟

فراغ العينة = $\{1,2,3,4,5,6\}$

إذا فرضنا أن النجاح هو ظهور العدد ٦ .

احتمال النجاح $p=\frac{1}{6}$, احتمال الفشل $q=\frac{5}{6}$, $n=$٤

$$b\left(x,4,\frac{1}{6}\right) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x} \quad x = 0,1,2,3,4$$

$$p(\text{عدم ظهور }6) = b\left(0,4,\frac{1}{6}\right) = \binom{4}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-0}$$

$$= \left(\frac{5}{6}\right)^{4}$$

$$p(\text{ظهور }6\text{ مرتين}) = b\left(2,4,\frac{1}{6}\right) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

إذا كان X متغير ذات الحدين n, p فإن :

التوقع الرياضي

$$E(X) = \mu = np$$

التباين

$$\sigma^2 = npq$$

تمرين :-

ثلاث مرات و أحسب التوقع و التباين ؟Hفي تجربة إلقاء قطعة نقود خمس مرات أوجد أحتمال ظهور الوجه

الحل

١- $p(X = 3) = \binom{5}{3} p^3 q^{5-3} = \binom{5}{3} (\frac{1}{2})^٣ (\frac{1}{2})^٢$

٢- $E(X) = \mu = np = ٥ \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

٣- $\sigma^2 = npq = ٥ \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

تمارين الواجب

إذا أعطيت الجدول الاحتمالي التالي :-

x	٠	١	٢	٣
P(x)	٠,٢	٠,١	٠,٣	؟

المطلوب :-

١) $p(٣)$

٢) الوسط الحسابي .

٣) التباين .

٤) الانحراف المعياري .

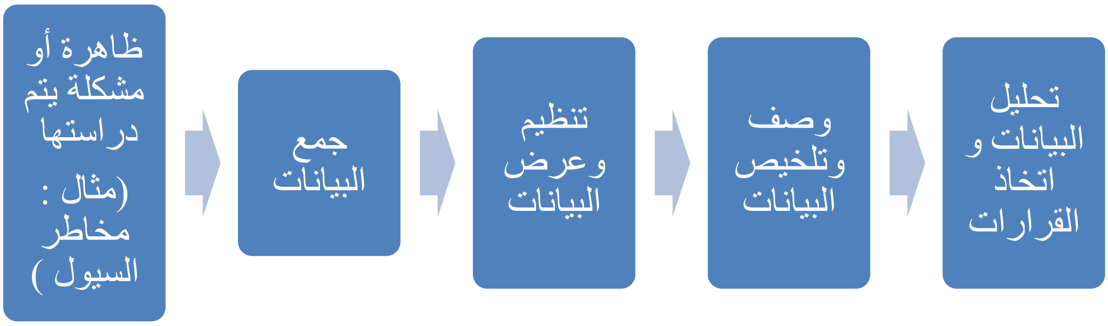
٥) $P(x \geq ٢)$.

المحاضرة(١٠)

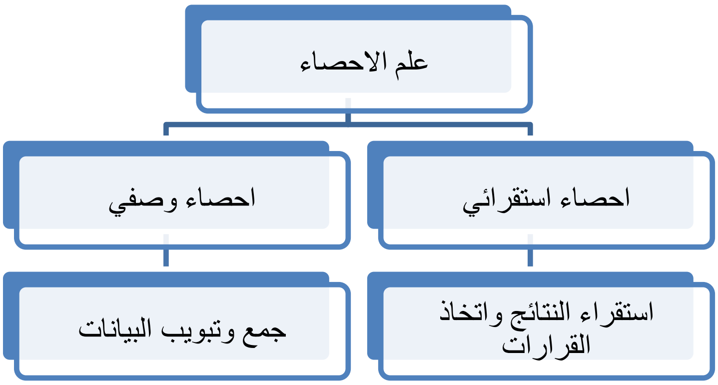
١- جمع البيانات وترميزها وعرضها

٢- مقاييس النزعة المركزية

١- جمع البيانات و ترميزها وعرضها

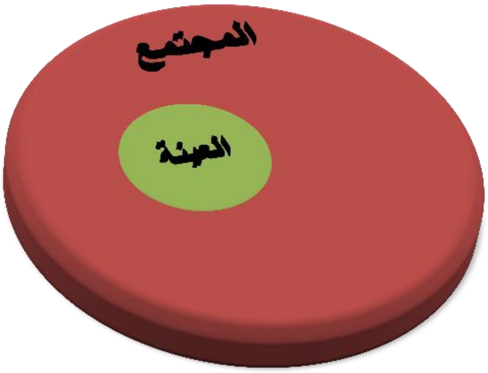


علم الإحصاء : هو العلم الذي يبحث في تصميم أساليب جمع البيانات والتقنيات المختلفة لتنظيم وتصنيف وعرض هذه البيانات ، وتلخيص هذه البيانات في صورة مؤشرات رقمية لوصف وقياس خصائصها الأساسية ، وتحليلها بغرض اتخاذ القرارات المناسبة.



المجتمع : هو المجموعة الكلية لمفردات الدراسة سواء كانت أفراد أو أشياء ، واستخلاص خصائص هذا المجتمع هو الهدف النهائي للدراسة الإحصائية .

العينة : هي مجموعة جزئية من مفردات المجتمع محل الدراسة يتم اختيارها بحيث تكون ممثلة للمجتمع تمثيل صحيح .



بعض المفاهيم الأساسية:-

البيانات (Data):-

مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية معينة (متغير).

أنواع البيانات:-

١ ـ بيانات نوعية (وصفية) :

البيانات التي يمكن حصرها في عدة أوجه وصفية و لا يمكن إجراء العمليات الحسابية عليها كالجمع و الطرح

٢ ـ البيانات الكمية :

أ- البيانات الكمية المنفصلة

ب- البيانات الكمية المتصلة

تنظيم وعرض البيانات :-

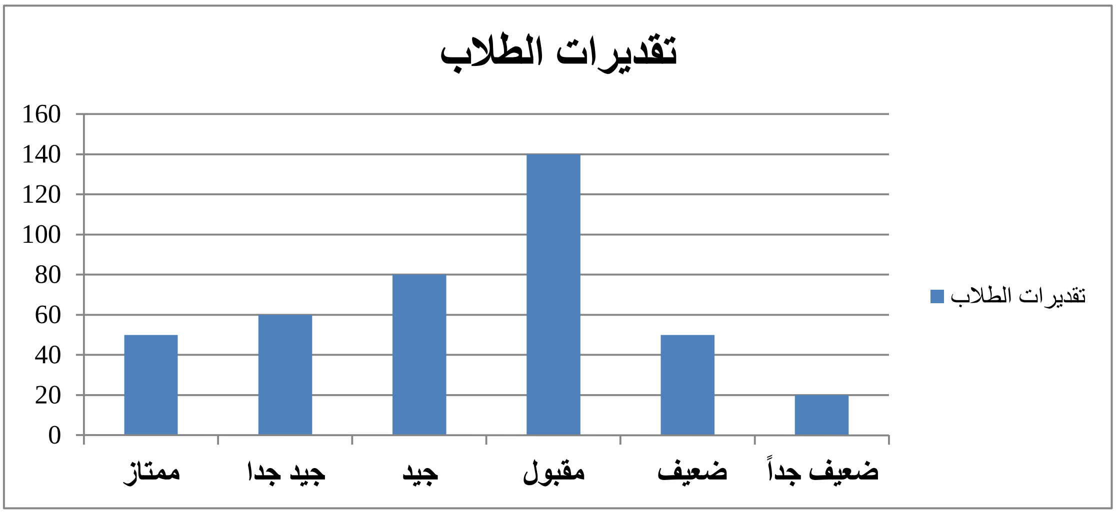
١. طريقة الجدول :-

مثال : عدد الطلاب الحاصلين على تقدير معين في مقرر الاحصاء في الادارة :-

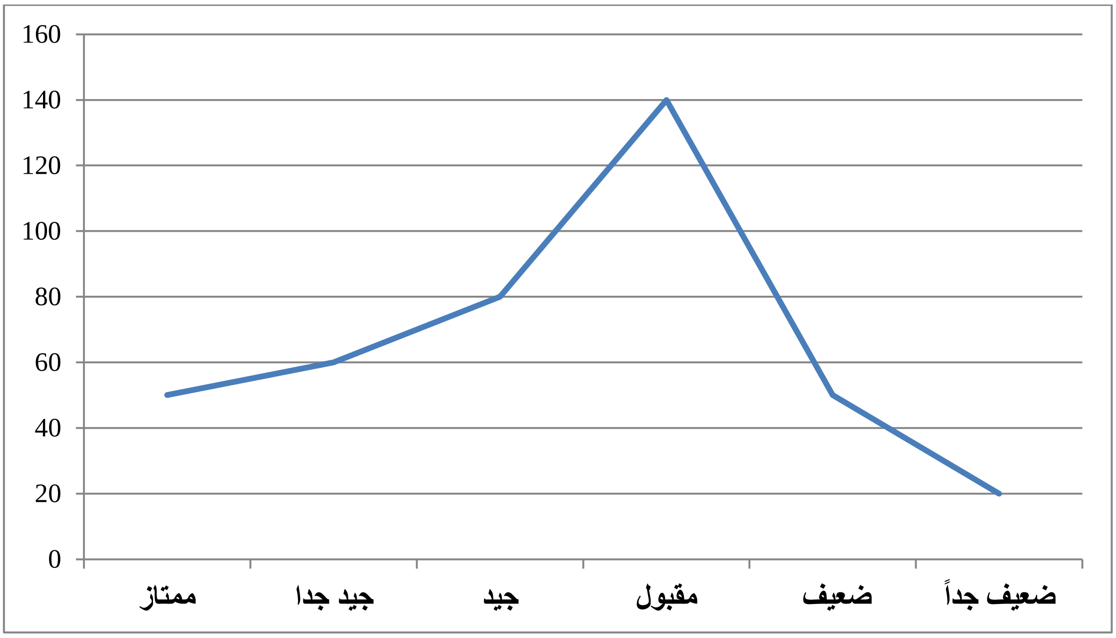
التقدير	عدد الطلاب
ممتاز	٥٠
جيد جدا	٦٠
جيد	٨٠

مقبول	١٤٠
ضعيف	٥٠
ضعيف جداً	٢٠
المجموع	٤٠٠

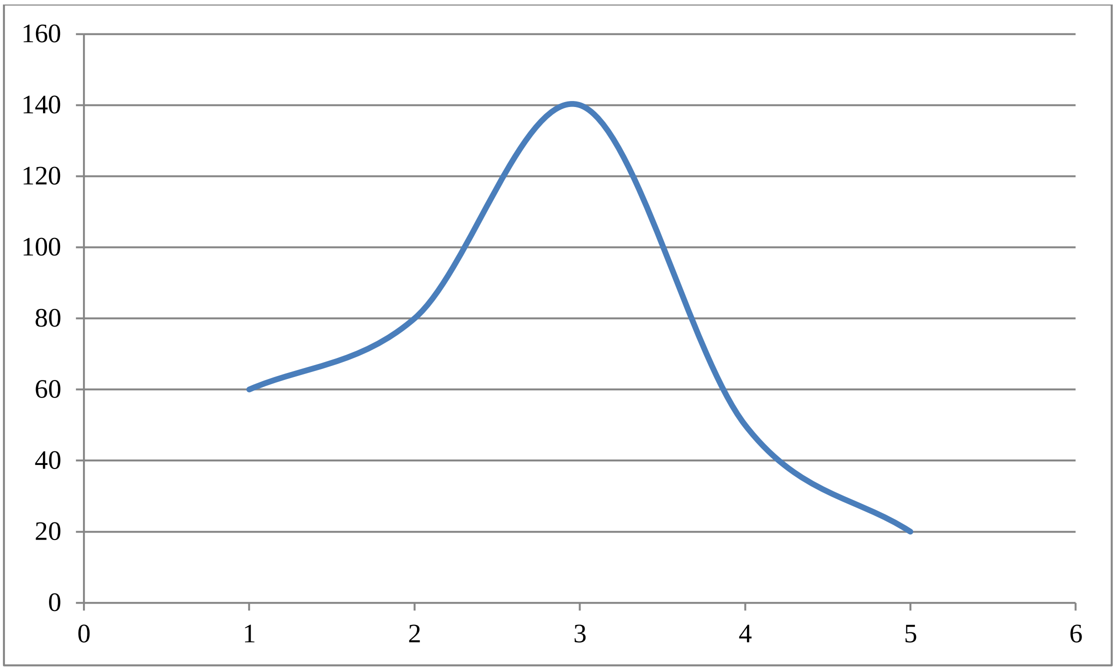
٢. طريقة الأعمدة أو المستطيلات :



٣ـ طريقة الخطوط المستقيمة :-



٤ـطريقة الخط المنحني :-



وصف البيانات:-

المقاييس الإحصائية الوصفية

- مقاييس النزعة المركزية. * معاملات الالتواء.
- و غيرها..... * مقاييس التشتت

٢ـ مقاييس النزعه المركزيه

القيم التي تقترب منها أو تتركز حولها أو تتوزع بالقرب منها معظم البيانات

١ـ الوسط الحسابي .

٢ـ الوسيط .

٣ـ المنوال .

أولاً : الوسط الحسابي (المتوسط) :-

أ ـ البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots . x_N$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

الوسط الحسابي يعطى بالعلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_N}{N}$$

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

مثال :-

البيانات التالية تمثل درجات أحد الطلاب في الفصل الدراسي الاول:-

٨ , ٥ , ٧ , ٦ , ١٠ , ٥ , ٧ , ١١

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطالب ؟

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots . x_N}{N}$$

$$\text{٦,٢٥} = \frac{8+5+7+6+10+5+7+11}{8} = \text{درجة}$$

ب – البيانات المبوبة :-

تأخذ البيانات المبوبة في العادة الشكل التالي :-

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	fx
0 – 10	8	5	40
10 – 20	10	15	150
المجموع	$\sum f$		$\sum xf$

المتوسط =

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئة الدرجات	0 - 10	10 - 20	20 – 30	30 - 40	40 – 50	المجموع	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250	250

المطلوب : حساب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب .

- نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى – الحد الأدنى للفئة الأولى

طول الفئة= ١٠ – ٠ = ١٠

- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{10+0}{2} = 5$$

مراكز الفئات الاخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة ١٠ على مركز الفئة الاولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
المجموع	$\sum f=$		$\sum x_i f_i=$

<u>في الصفحة القادمة الحل بالجدول و لكن الهدف ان يحل الطالب مع الدكتور اولا ثم رؤية الاجابه</u>

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
0 – 10	20	5	١٠٠
10 - 20	50	15	٧٥٠
20 – 30	90	25	٢٢٥٠
30 – 40	60	35	٢١٠٠
40 - 50	30	45	١٣٥٠
المجموع	$\sum f$=250		$\sum x_i f_i$= ٦٥٥٠

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6550}{250} = 26.2$$ درجة

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالريال في مائتين محل بمنطقة الرياض:-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب: حساب متوسط الاجر الأسبوعي للعامل .

- نوجد طول الفئة = الحد الأعلى للفئة الأولى – الحد الأدنى للفئة الأولى
طول الفئة= ١٥ ـ ٥= ١٠
- نوجد مركز الفئة الأولى

$$x_1 = \frac{15+5}{2} = 10$$

مراكز الفئات الاخرى يتم الوصول لها عن طريق إضافة طول الفئة ١٠ على مركز الفئة الاولى

الفئات	التكرارات f	مراكز الفئات x	f x
5 -	30	10	٣٠٠
15 -	20	20	٤٠٠
25 -	60	30	١٨٠٠
35 -	50	40	٢٠٠٠
45 - 55	40	50	٢٠٠٠
المجموع	$\sum f$=200		$\sum x_i f_i$= ٦٥٠٠

نحسب المتوسط

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{6500}{200} = 32.5$$ ريال

٢ ـ الوسيط

هو القيمة العددية التي تقل عنها نصف البيانات (٥٠٪) ويزيد عنها النصف الآخر. ويعرف كذلك بأنه مقياس الموقع لأن قيمته تعتمد على موقعه في البيانات.

طريقة حسابه (فى حالة البيانات غير المبوبة)

أـ الوسيط من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $x_1, x_2, \dots . x_n$ تمثل بيانات عينة من المجتمع

فإن الوسيط يحسب كالتالي:

١. نرتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً.

٢. نوجد موقع الوسيط $\frac{n+1}{2}$.

٣. إذا كان n عدد فردي فإن الناتج يكون عدد صحيح و بالتالي الوسيط هو $x_{\frac{n+1}{2}}$.

٤. إذا كان n عدد زوجي فإن الناتج يكون عدد غير صحيحو بالتالي الوسيط هو الوسط الحسابي للقيمتين اللتين يقع بينهما العنصر $x_{\frac{n+1}{2}}$.

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

٢٠ ,٥٠ ,٦٠ ,١٠ , ٤٠ ,

الحل

١ـ ترتيب البيانات تصاعدياً :

٦٠ , ٥٠ , ٤٠ , ٢٠ ,١٠

٢ـ ترتيب الوسيط $= \frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} =$ ٣

٣ـ الوسيط هو القيمة الثالثة :ـ الوسيط = ٤٠

مثال :-

أوجد الوسيط من البيانات التالية :-

٢٠ ,٨٠ ,٥٠ ,٦٠ ,١٠ , ٤٠ ,

الحل

١ـ ترتيب البيانات تصاعدياً :

٨٠, ٦٠ , ٥٠ , ٤٠ , ٢٠ ,١٠

٢ـ ترتيب الوسيط $= \frac{n+1}{2} = \frac{6+1}{2} =$ ٣,٥

٣ـ ترتيب الوسيط هو رقم كسري إذاً الوسيط هو متوسط القيمتين التي موقعهما ٣ و ٤

الوسيط $= \frac{40+50}{2} =$ ٤٥

ب- الوسيط من البيانات المبوبة :-

١ـ تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢ـ ترتيب الوسيط $= \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum f}{2}$

٣ـ الوسيط =

$$\text{الحد الادنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{الوسيط ترتيب} - \text{السابق الترتيب}}{\text{اللاحق الترتيب} - \text{السابق الترتيب}} \times \text{طول الفئة الوسيطية}$$

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالجنية في مائتين معرض تجاري بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

١ـ جدول التمرين :

٢ـ الجدول التكراري المجمتع الصاعد:

فئات الدرجات	f
5 -	30
15 -	20
25 -	60
35 -	50
45 - 55	40
المجموع	200

الحد الادنى للفئة	التكرار المتجمع
أقل 5	0
أقل 15	30
أقل 25	50
أقل 35	110
أقل 45	160
أقل 55	200

١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

ترتيب الوسيط

٢ـ ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{التكرارات مجموع}}{2} = \frac{200}{2} = \text{١٠٠}$$

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣ـ الوسيط =

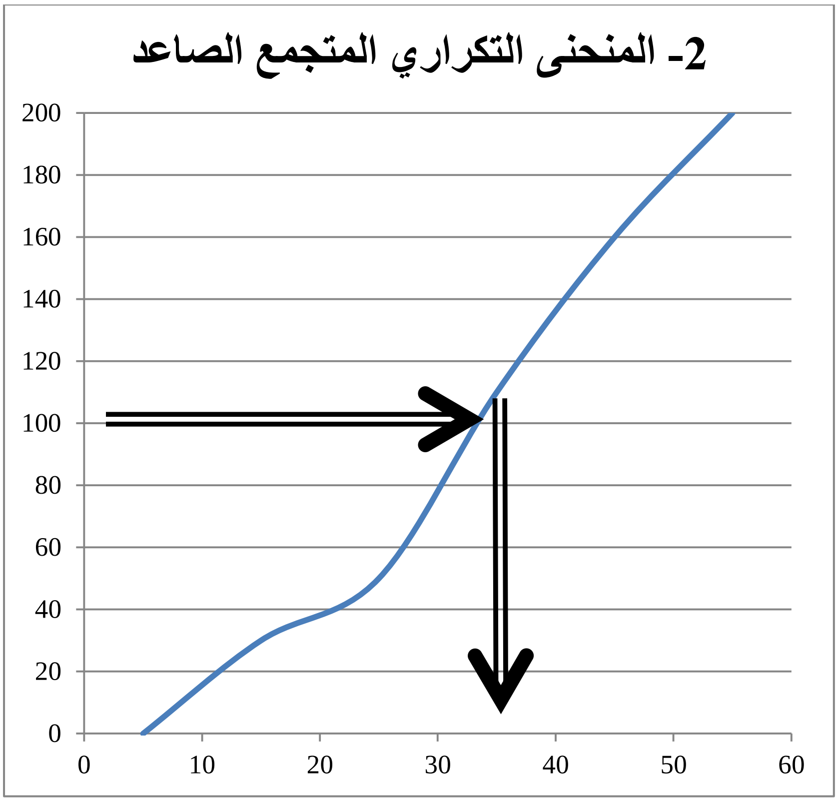
$$= \text{٢٥} + \frac{100-50}{110-50} \times \text{١٠} =$$

٣٣,٣٣ريال

الوسيط من الرسم :-

ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

فئات الدرجات	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	المجموع
عدد الطلاب	20	50	90	60	30	250

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

١ـ الجدول التمرين :ـ ١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :ـ

F	فئات الدرجات
20	0 – 10
50	10 – 20
90	20 – 30
60	30 – 40
30	40 – 50
250	المجموع

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 0
20	أقل 10
70	أقل 20
160	أقل 30
220	أقل 40
250	أقل 50

١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :ـ

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 0
20	أقل 10
70	أقل 20
160	أقل 30
220	أقل 40
250	أقل 50

ترتيب الوسط

٢ـ ترتيب الوسيط :ـ

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{250}{2} = ١٢٥$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الوسيط =

$$٢٠ + \frac{125-70}{160-70} \times ١٠ = ٢٦,١١$$ = درجة

تمرين واجب :

مثال :-

الجدول التالي يبين درجات تحديد مستوى ٣٠ طالب في مقرر الفقه الاسلامي :-

فئات الدرجات	4 – 20	20 – 36	36 – 52	52 – 68	68 – 84	84 – 100	المجموع
عدد الطلاب	3	2	6	10	7	2	30

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

المحاضرة(١١)

١ ـ تابع مقاييس النزعة المركزية

٢ ـ مقاييس التشتت

تمرين واجب

مثال :-

الجدول التالي يبين درجات تحديد مستوى ٣٠ طالب في مقرر الفقه الاسلامي :-

فئات الدرجات	4 – 20	20 – 36	36 – 52	52 – 68	68 – 84	84 - 100	المجموع
عدد الطلاب	3	2	6	10	7	2	30

المطلوب : حساب الوسيط لدرجات الطلاب .

١ـ الجدول التمرين :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 4
3	أقل 20
5	أقل 36
11	أقل 52
21	أقل 68
28	أقل 84
30	أقل 100

١ ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

f	فئات الدرجات
3	4 – 20
2	20 -36
6	36 – 52
10	52 – 68
7	68 - 84
2	84 - 100
30	المجموع

١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 4
3	أقل 20
5	أقل 36
11	أقل 52
21	أقل 68
28	أقل 84
30	أقل 100

ترتيب الوسط

٢- ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{30}{2} = = ١٥$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الوسيط =

$$= ٥٢ + \frac{15-11}{21-11} \times ١٨ =$$

٣- الربيع الأدنى و الربيع الأعلى :-

الربيع الأدنى و الربيع الأعلى من البيانات المبوبة :-

١- الربيع الادنى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ربع البيانات (٢٥٪) ويزيد عنها (٧٥٪).

٢- الربيع الاعلى : هو القيمة العددية التي تقل عنها ثلاث أربع البيانات (٧٥٪) ويزيد عنها (٢٥٪).

أولاً : خطوات إيجاد الربيع الادنى :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الربيع الادنى $= \frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{\sum f}{4}$

٣- الربيع الأدنى = الحد الادنى لفئة الربيع الادنى + $\frac{\text{ترتيب الربيع الادنى} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}}$ **× طول الفئة الربيع الادنى**

ثانياً : خطوات إيجاد الربيع الأعلى :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد .

٢- ترتيب الربيع الاعلى $= \frac{3\text{ مجموع التكرارات}}{4} = \frac{\sum f \times 3}{4}$

٣- الربيع الأعلى = الحد الادنى لفئة الربيع الاعلى + $\frac{\text{ترتيب الربيع الاعلى} - \text{الترتيب السابق}}{\text{الترتيب اللاحق} - \text{الترتيب السابق}}$ **× طول الفئة الربيع الاعلى**

مثال :-

الجدول التالي يمثل الأجر الأسبوعي للعامل بالجنية في مائتين محل بمنطقة الرياض :-

فئات الأجر	5 -	15 -	25 -	35 -	45 - 55	المجموع
عدد المحالات	30	20	60	50	40	200

المطلوب : حساب الربيع الادنى و الربيع الاعلى لأجر العامل .

١ـ الجدول التمرين :- ١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

F	فئات الدرجات
٣٠	٥ ـ
٢٠	١٥ ـ
٦٠	٢٥ ـ
٥٠	٣٥ ـ
٤٠	٤٥ ـ ٥٥
٢٠٠	المجموع

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
٠	أقل ٥
٣٠	أقل ١٥
٥٠	أقل ٢٥
١١٠	أقل ٣٥
١٦٠	أقل ٤٥
٢٠٠	أقل ٥٥

١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

ترتيب الربيع الادنى

أولاً الربيع الأدنى :-

٢ $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{200}{4} = =$ ٥٠

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣ـ الربيع الادنى = ٢٥ريال

ثانياً الربيع الأعلى :-

٢ $\frac{3\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{200\times3}{4} = =$ ١٥٠

البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع

٣- الربيع الاعلى =

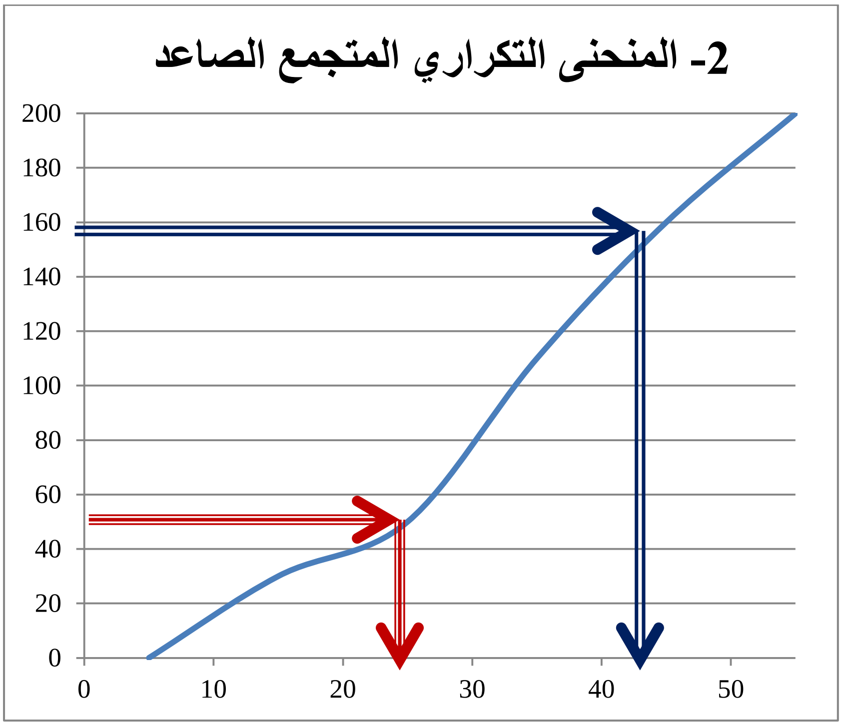
$$= ١٠ \times \frac{150-110}{160-110} + ٣٥ = ٤٣ \text{ ريال}$$

الربيع الادنى و الاعلى من الرسم :-

١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 5
30	أقل 15
50	أقل 25
110	أقل 35
160	أقل 45
200	أقل 55

٢- المنحنى التكراري المتجمع الصاعد



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة المالية :-

المجموع	٤٠ _ ٥٠	٣٠ _ ٤٠	٢٠ _ ٣٠	١٠ _ ٢٠	٠ _ ١٠	فئات الدرجات
٢٥٠	٣٠	٦٠	٩٠	٥٠	٢٠	عدد الطلاب

المطلوب : حساب الربيع الادنى و الربيع الاعلى لدرجات الطلاب .

١- الجدول التمرين :- ١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

F	فئات الدرجات
٢٠	٠ _ ١٠
٥٠	١٠ _ ٢٠
٩٠	٢٠ _ ٣٠
٦٠	٣٠ _ ٤٠
٣٠	٤٠ _ ٥٠
٢٥٠	المجموع

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
٠	أقل ٠
٢٠	أقل ١٠
٧٠	أقل ٢٠
١٦٠	أقل ٣٠
٢٢٠	أقل ٤٠
٢٥٠	أقل ٥٠

١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

٢- - ترتيب الربيع الأدنى :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 0
20	أقل 10
70	أقل 20
160	أقل 30
220	أقل 40
250	أقل 50

ترتيب الربيع الادنى

٢- $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{250}{4} = $ = ٦٢,٥

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى =

$= 10 + \frac{62.5-20}{70-20} \times 10 =$

١٨,٥درجة

٢- ترتيب الربيع الأعلى :-

١- الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل 0
20	أقل 10
70	أقل 20
160	أقل 30
220	أقل 40
250	أقل 50

ترتيب الربيع الاعلى

$= \frac{3\times 250}{4} = \frac{3\ \text{مجموع التكرارات}}{4} = $ = ١٨٧,٥

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الأعلى =

$30 + \frac{187.5-160}{220-160} \times 10 = 34.58$ = درجة

٣- **المنوال** :-القيمة التي تكررت أكثر من غيرها أي القيمة الأكثر شيوعاً أو تكراراً.

أولاً : البيانات غير المبوبة :-

مثال :-

الدرجات التالية تمثل نتائج مجموعة من الطلاب في مقرر المحاسبة أوجد المنوال لهذه الدرجات ؟

١٠ , ١٥ , ١٢ , ١٠ , ١٤ , ١٢ , ١٠

المنوال هو ١٠ و هو القيمة الأكثر تكراراً

ثانياً المنوال من البيانات المبوبة :-

١- جدول تكراري بسيط (بدون فئات) :-

المنوال هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار

مثال :-

الجدول التالي يوضح أجور مجموعة من الموظفين خلال العام الماضي المطلوب حساب قيمة منوال الاجر ؟

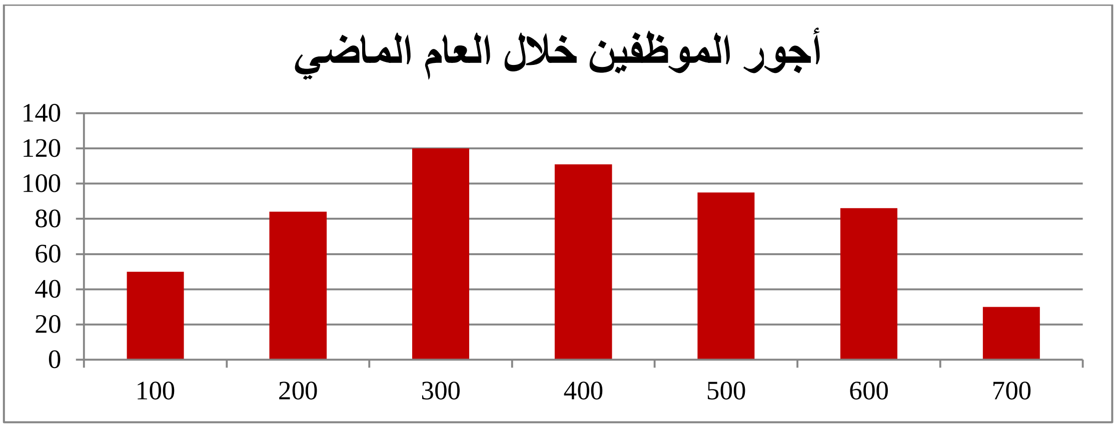
الأجر	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
عدد العمال	٥٠	٨٤	١٢٠	١١١	٩٥	٨٦	٣٠

الحل :

المنوال = ٣٠٠ ريال و هي القيمة التي تقابل أكبر تكرار و هو ١٢٠ موظف

المنوال من الرسم :-

الأجر	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠
عدد العمال	٥٠	٨٤	١٢٠	١١١	٩٥	٨٦	٣٠



٢ـ المنوال من الجداول ذات الفئات و التكرارات :-

١ـ تحديد الفئة التي تقابل أكبر تكرار (الحد الاعلى للفئة و الحد الادنى و طول هذه الفئة).

٢ـ المنوال =

الحد الادنى للفئة المنوالية + $\frac{f_1}{f_1+f_2}$ × طول الفئة المنوالية.

f١ = أكبر تكرار – التكرار السابق

f٢ = أكبر تكرار – التكرار اللاحق

مثال :-

الجدول التالي يوضح درجات مجموعة من الطلاب في مقرر الاحصاء :-

الدرجة	٠ ـ	١٠ ـ	٢٠ ـ	٣٠ ـ	٤٠ ـ	٥٠ ـ	٦٠ ـ	٧٠ ـ	٨٠ ـ	٩٠ ـ ١٠٠
عدد الطلاب	١٥	٢٠	٤٠	٩٠	٨٠	٤٥	٣٥	٢٢	١٥	١٢

المطلوب :- حساب قيمة المنوال لدرجات الطلاب

الحل

الفئة المنوالية

f_1 = ٩٠ - ٤٠ = ٥٠

الدرجة	٠ -	١٠ -	٢٠ -	٣٠ -	٤٠ -	٥٠ -	٦٠ -	٧٠ -	٨٠ -	٩٠ - ١٠٠
الطلاب			٤			٤			١٥	١٢

التكرار السابق

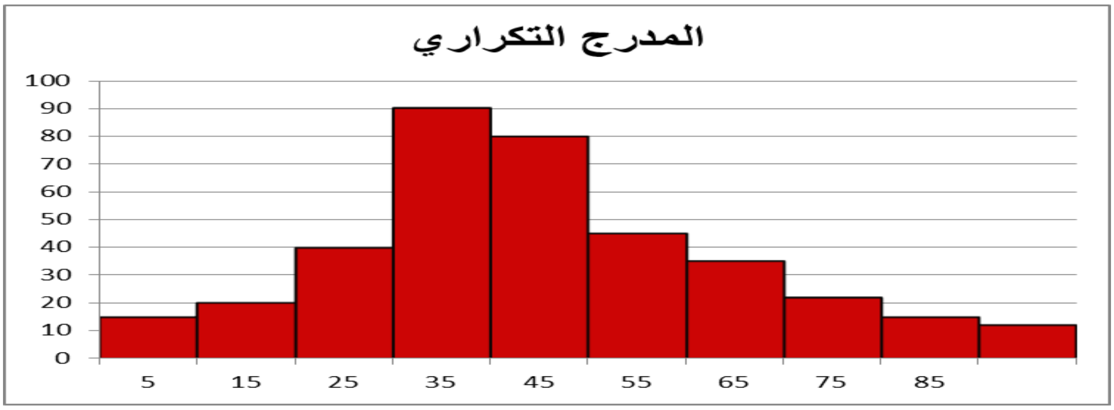
أكبر تكرار

التكرار اللاحق

f_2 = ٩٠ – ٨٠ = ١٠

المنوال = ٣٠ + $\frac{50}{50+10}$ × ١٠ = ٣٨,٣٣ درجة

المنوال من الرسم :-



مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من الدخول بالريال لمجموعة من الاسر :-

الدرجة	١٠٠-	٢٠٠-	٣٠٠-	٤٠٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٧٠٠-٨٠٠

عدد الطلاب	٥٥	٦٨	٨٧	٩٥	٧٦	٥٢	٣

المطلوب :-

حساب قيمة منوال لدخل بالنسبة لهذه الاسر .

الفئة المنوالية

الدرجة	١٠٠-	٢٠٠-	٣٠٠-	٤٠٠-	٥٠٠-	٦٠٠-	٧٠٠-٨٠٠
عدد الطلاب	٥٥	٦٨	٨٧	٩٥	٧٦	٥٢	٣

التكرار السابق

أكبر تكرار

التكرار اللاحق

f١ = ٩٥ – ٨٧ = ٨

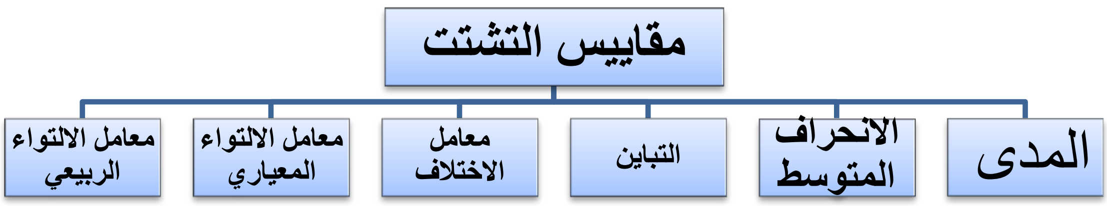
f٢ = ٩٥ – ٧٦ = ١٩

المنوال = ٤٠٠+ $\frac{8}{8+19}$ × ١٠٠ = ٤٢٩,٦٣ ريال

ثالثاً :- مقاييس التشتت :-

إن درجة التباعد أو التقارب بين البيانات تسمى تشتتاً , و تستخدم مقاييس التشتت في المقارنة بين مجموعات البيانات من حيث تشتتها.

كلما قل تشتت البيانات و كلما اقتربت من متوسطهاكلما كانت أقرب للتجانس .



١ – المدى :-

أولاً : البيانات غير المبوبة :-

هو الفرق بين أكبر مفردة و أقل مفردة .

مثال :-

درجات الاحصاء	٥٠ـ	٥٥ـ	٦٠ـ	٦٥ـ	٧٠ـ٧٥

البيانات التالية تمثل أسعار مجموعة من تذاكر الطيران من الرياض إلى القاهرة و المطلوب حساب قيمة المدى لأسعار هذه التذاكر :-

١١٥٠ , ٩٦٨ , ١٣٠٠ , ٦٧٥ , ٥٠٠ , ١١٠٠

الحل

المدى = ١٣٠٠ ــ ٥٠٠ = ٨٠٠ريال

مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مقياس الذكاء لمجموعتين من الطلاب و المطلوب المقارنة بين المجموعتين :-

المجموعة الاولى {١٦٠،٢٠٠،١٣٠،٩٠،٥٠،١١٠،١٠٠}

المجموعة الثانية {١٥٥،١٦٥،١٧٠،١٠٠،١٢٠,١٦٠،١٥٠}

الحــــل

المدى للمجموعة الاولى = ٢٠٠ ـ ٥٠ = ١٥٠ درجة

المدى للمجموعة الثانية = ١٧٠ ــ ١٠٠ = ٧٠ درجة

إذاً تشتت المجموعة الأولى أكبر من المجموعة الثانية

ثانياً : المدى من البيانات المبوبة :-

المدى = الحد الأعلى للفئة الاخير – الحد الادنى للفئة الاولى

مثال :-

الجداول التالية توضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقررين دراسيين المحاسبة و الاحصاء و المطلوب بيان أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

درجات المحاسبة	١٠ـ	٢٠ـ	٣٠ـ	٤٠ـ	٥٠ـ٦٠
عدد الطلاب	١٠٠	١٢٠	٢١٠	٣٠٠	١٥٠

عدد الطلاب	٢٥٠	٣١٠	٤٢٠	٢٦٠	١٠٠

١- المدى لدرجات المحاسبة = ٦٠ - ١٠ = ٥٠ درجة .

٢- المدى لدرجات الاحصاء =٧٥ - ٥٠ = ٢٥ درجة .

إذا درجات المحاسبة أكثر تشتتاً من درجات الاحصاء

٢- التباين و الانحراف المعياري :-

١ – التباين :-

التباين هو متوسط مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابي و يرمز له بالرمز σ^2.

٢- الانحراف المعياري :-

الجذر التربيعي للتباين و يرمز للانحراف المعياريبالرمز σ.

أولاً التباين و الانحراف المعياري من البيانات غير المبوبة :-

إذا كانت $X_1, X_2, \dots \dots \dots, X_n$ تمثل n من بيانات المجتمعو لها المتوسط الحسابي µ فإن التباين و الانحراف المعياري يحسبان بالعلاقة:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال :-

البيانات التالية توضح أجور اليومية مجموعة من العمال بالريال و المطلوب حساب قيمة التباين و الانحراف المعياري لأجور هؤلاء العمال :-

٣٥, ٥٠, ١٥, ٦٠, ٣٠, ٢٥

الحل :-

درجات الاحصاء x	١٣	١٨	٤٠	٢٠	٤٥	١٣٦
x^2	١٦٩	٣٢٤	١٦٠٠	٤٠٠	٢٠٢٥	٤٥١٨
درجات بحوث العمليات x	٣٥	٤٠	٢٨	٣٠	٤٨	١٨١
x^2	١٢٢٥	١٦٠٠	٧٨٤	٩٠٠	٢٣٠٤	٦٨١٣

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{9075}{6} - \left(\frac{215}{6}\right)^2$ = ٢٢٨,٤٧ r.s

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{228.47}$ = ١٥. ١١٥٣ r.s

مثال :-

البيانات التالية توضح درجات مجموعة من الطالب في مقرري الاحصاء و بحوث العمليات و المطلوب تقرير أي من درجات المقررين تعتبر أكثر تشتتاً :-

درجات الاحصاء { ٤٥, ٢٠ , ٤٠ , ١٨, ١٣ }

درجات بحوث العمليات {٤٨, ٣٠, ٢٨ , ٤٠ , ٣٥ }

الحل :

أي أن درجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكثر تشتتاً من درجات بحوث العمليات

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{4518}{5} - \left(\frac{136}{5}\right)^2$ = ١٦٣,٧٦

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{163.76}$ = ١٢,٧٩٧

$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2 = \frac{6813}{5} - \left(\frac{181}{5}\right)^2$ = ٥٢,١٦

$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{52.16}$ = ٧,٢٢٢

المحاضرة الثانية عشر

تابع مقاييس التشتت

١- التباين و الانحراف المعياري :-

ثانياً : التباين و الانحراف المعياري من البيانات المبوبة :-

إذا كانت بيانات الظاهرة ، مبوبة في جدول توزيع تكراري ، فإن الانحراف المعياري يحسب بتطبيق المعادلة التالية :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum f x^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum f x}{\sum f}\right)^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

مثال :-

الجدول التالي يتضمن فئات الانفاق الشهري للأسرة و المطلوب حساب الانحراف المعياري و التباين :-

عدد الاسر	فئات الانفاق
120	50 -
140	60 -
160	70 -
180	80 -
150	90 – 100
750	المجموع

الحل :

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	fx^2
50 -	120	55	6600	363000
60 -	140	65	9100	591500
70 -	160	75	12000	900000
80 -	180	85	15300	1300500
90 - 100	150	95	14250	1353750
المجموع	750		57250	4508750

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{4508750}{750} - \left(\frac{57250}{750}\right)^2 = 184.8889$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 13.5974$$

مثال : الجدول التالي يتضمن فئات الاجر الشهري لمجموعة من العاملين و المطلوب حساب الانحراف المعياري والتباين :-

فئات الانفاق	عدد الاسر
100 -	55
200 -	65
300 -	80
400 -	75
500 – 600	35
المجموع	310

الحل :-

فئات الانفاق	عدد الاسر f	مركز الفئة x	f x	fx^2
100 -	55	150	8250	1237500
200 -	65	250	16250	4062500
300 -	80	350	28000	9800000
400 -	75	450	33750	15187500
500 - 600	35	550	19250	10587500
المجموع	310		105500	40875000

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{40875000}{310} - \left(\frac{105500}{310}\right)^2 = 16035.38$$ ريال

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 126.6309$$ ريال

٢- معامل الاختلاف المعياري :-

هو معامل نسبي يستخدم للمقارنة بين تشتت ظاهرتين أو أكثر مختلفتين في وحدة القياس أو في القيمة المتوسطة لهما. والظاهرة التي معامل اختلافها أكبر تكون أكثر تشتتاً من الأخرى. ويرمز له بالرمز c.v.(x) .

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

مثال :-

في دراسة لمستوى أداء طلاب التعليم عن بعد في مقررين وهما مقرر المحاسبة و الاحصاء تم تجميع البيانات التالية :-

المقرر	المقاييس الوصفية لاختبار مستوى الطلاب	
	الوسط الحسابى $\bar{X}$	الانحراف المعيارى σ
المحاسبة	70	5
الاحصاء	80	8

المطلوب : أي من المقررين أكثر تشتتاً ؟

الحل :

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$$

$$C.V\ 1 = \frac{5}{70} \times 100 = 7.143\%$$

$$C.V\ 2 = \frac{8}{80} \times 100 = 10\%$$

بما أن معامل الاختلاف لدرجات الطلاب في مقرر الاحصاء أكبر من معامل الاختلاف بالنسبة لدرجات الطلاب في مقرر المحاسبة فيمكن القول أن التشتت النسبي لدرجات الاحصاء أكبر من المحاسبة أي أن درجات المحاسبة أكثر تجانساً من درجات الاحصاء .

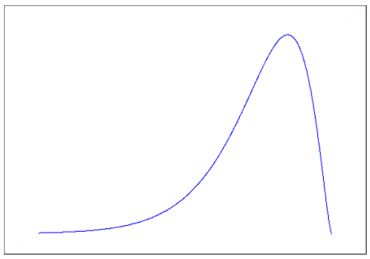
٤ـ معامل الالتواء :-

هو درجة بُعد المنحنى التكراري عن التماثل. ويقصد بالتماثل أنه إذا أسقطنا عموداً من قمة المنحنى التكراري وقسمه إلى قسمين منطبقين يكون التوزيع متماثلاً. والعكس فيكون التوزيع غير متماثل أي ملتو إما إلى جهة اليمين أو إلى جهة اليسار.

معامل الالتواء = صفر يعني أن المنحنى الاعتدالي متماثل أي إذا قسمنا هذا المنحنى قسمين فإنهما يكونا متماثلان تماما، ويسمى لذلك توزيع اعتدالي. أما إذا انحرف المنحنى نحو القيم الكبيرة (جهة اليمين) فيوصف بأنه موجب الالتواء، وإذا انحرف نحو القيم الصغيرة (جهة اليسار) فيوصف بأنه سالب الالتواء.

يمكن الاستفادة من هذا التعريف في ناحيتين:

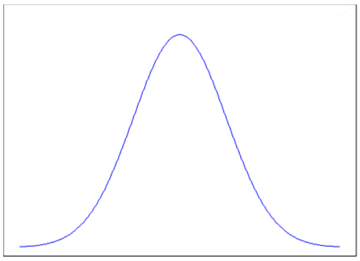
- **معرفة نوع الالتواء موجب أو سالب على حسب الإشارة.**
- **المقارنة بين توزيعين تكراريين . المجموعة التي لها معامل التواء أكبر يكون توزيعها ملتوياً أكثر.**



التوزيع غير متماثل

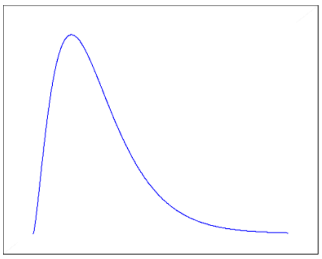
وملتو من جهة اليسار

معامل الالتواء = قيمة سالبة



التوزيع متماثل

معامل الالتواء = 0



التوزيع الغير متماثل

و ملتو من جهة اليمين

معامل الالتواء = قيمة موجبة

١ ـ معامل الالتواء المعياري :-

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$$

الناتج :-

١- صفر أو يقترب من الصفر إذا فالتوزيع معتدل أو متماثل أو طبيعي .

٢- موجب إذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

٣- سالب إذا التوزيع ملتوي جهة اليسار .

مثال :-

إذا كان متوسط درجات الطلاب في مقرر الاحصاء ٨٥ درجة و ذلك بانحراف معياري قدره ١٠ درجات فإذا علمت أن قيمة وسيط الدرجات لهذا المقرر هو ٨٠ درجة المطلوب حساب معامل الالتواء المعياري لدرجات الطلاب في هذا المقرر ؟

الحل:-

$$\text{معامل الالتواء المعياري} = \frac{3(\text{الحسابي الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{المعياري الانحراف}}$$

$$\text{عامل الالتواء المعياري} = 1.5 = \frac{3\times(85-80)}{10}$$

حيث أن الناتج قيمة موجبة إذا فهذا التوزيع ملتوي جهة اليمين .

٢- معامل الالتواء الربيعي :-

$$\frac{(\text{الاعلى الربيع} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الادنى الربيع})}{(\text{الاعلى الربيع}) - (\text{الادنى الربيع})}$$

مثال :-

البيانات التالية توضح مجموعة من المقاييس الاحصائية للأجور الشهرية لعينتين من العاملين أحدهما في قطاع التعليم و الاخرى في القطاع الصناعي :-

العاملين في قطاع	الربيع الأدنى	الوسيط	الربيع الأعلى
التعليم	110	500	900
الصناعي	250	850	1100

المطلوب :-

باستخدام معامل الالتواء الربيعي قارن بين نوع كل من التوزيعين .

الحل :-

١- معامل الالتواء الربيعي للعاملين في قطاع التعليم =

$$\text{معامل الالتواء } 0.01 = \frac{(900-500)-(500-110)}{(900-110)} =$$

يتضح من النتائج السابقة أن قيمة معامل الالتواء تقترب من الصفر و لذلك فيمكن اعتبار أن هذا التوزيع متماثل .

٢- معامل الالتواء الربيعي للعاملين في القطاع الصناعي =

$$\text{معامل الالتواء } -0.41176 = \frac{(1100-850)-(850-250)}{(1100-250)} =$$

يعتبر التوزيع السابق توزيع ملتوي جهة اليسار.

تمرين شامل :-

الجدول التالي يوضح توزيع مجموعة من درجات الطلاب في مقرر الكيمياء :-

فئات الدرجات	عدد الطلاب
0 -	15
10 -	40
20 -	55
30 -	35
40 – 50	5
المجموع	150

المطلوب:-

١ ـ الوسط الحسابي و التباين و الانحراف المعياري :-

فئات الدرجات	عدد الطلاب	x	fx	fx^2
0 -	15	5	75	375
10 -	40	15	600	9000
20 -	55	25	1375	34375
30 -	35	35	1225	42875
40 – 50	5	55	225	10125
المجموع	150		3500	96750

١ ـ الوسط الحسابي :-

$$\overline{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{3500}{150} = 23.33$$ درجة

٢ ـ التباين :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{96750}{150} - \left(\frac{3500}{150}\right)^2 = 100.55$$

٣ ـ الانحراف المعياري :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{100.55} = 10.03$$

٢ ـ الوسيط و الربيع الادنى و الربيع الاعلى :-

١- تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الجدول الاصلي

عدد الطلاب	فئات الدرجات
15	0 -
40	10 -
55	20 -
35	30 -
5	40 – 50
150	المجموع

الجدول التكراري المجتمع الصاعد

التكرار المتجمع	الحد الادنى لفئة
0	أقل من 0
15	أقل من 10
55	أقل من 20
110	أقل من 30
145	أقل من 40
150	أقل من 50

١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

التكرار المتجمع	الحد الادنى لفئة
0	أقل من 0
15	أقل من 10
55	أقل من 20
110	أقل من 30
145	أقل من 40
150	أقل من 50

ترتيب الوسط

٢ـ ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = = \frac{150}{2} = 75$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣ـ الوسيط =

$$20 + \frac{75 - 55}{110 - 55} \times 10 = 23.64 = \text{درجة}$$

٢ـ ترتيب الربيع الأدنى :-

$$\frac{\text{مجموع التكرارات}}{4} = = \frac{150}{4} = 37.5$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣ـ الربيع الادنى =

$$= 10 + \frac{37.5 - 15}{55 - 15} \times 10 = 15.625$$

٢ـ ترتيب الربيع الأعلى :-

$$= \frac{3\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{150 \times 3}{4} = 112.5$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣ـ الربيع الاعلى =

$$= 30 + \frac{112.5 - 110}{145 - 110} \times 10 = 30.71$$

٣ـ معامل الاختلاف المعياري و معامل الالتواء المعياري :-

أـ معامل الاختلاف المعياري :-

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 = \frac{10.03}{23.33} \times 100 = 42.98\ \%$$

ب- معامل الالتواء المعياري :-

معامل الالتواء المعياري $= \frac{3(\text{الحسابي الوسط} - \text{الوسيط})}{\text{المعياري الانحراف}}$

عامل الالتواء المعياري $= \frac{3\times(23.33-23.64)}{10.03} = -0.093$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

٤- معامل الاختلاف الربيعي و معامل الالتواء الربيعي :-

أ- **معامل الاختلاف الربيعي** $= \frac{\text{الاعلى الربيع} - \text{الادنى الربيع}}{\text{الاعلى الربيع} + \text{الادنى الربيع}} \times ١٠٠$

معامل الاختلاف الربيعي $= \frac{30.714-15.625}{30.714+15.625} \times 100 = 32.56\%$

ب- معامل الالتواء الربيعي $= \frac{(\text{الاعلى الربيع} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الادنى الربيع})}{(\text{الاعلى الربيع}) - (\text{الادنى الربيع})}$

معامل الالتواء الربيعي $= \frac{(30.714-23.64)-(23.64-15.625)}{(30.714-15.625)} = -0.06$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

تمرين شامل ٢ :-

عدد الأسر	فئات الدخل
30	100 -
65	200 -
80	300 -
75	400 -
50	500 - 600
300	المجموع

المطلوب :-

١- الوسط الحسابي و التباين و الانحراف المعياري :-

fx^2	f x	x	f	فئات الدخل
675000	4500	150	30	100 -
4062500	16250	250	65	200 -
9800000	28000	350	80	300 -
15187500	33750	450	75	400 -
15125000	27500	550	50	500 - 600
44850000	110000		300	المجموع

١- الوسط الحسابي :-

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{110000}{300} = 366.67$$ ريال

٢- التباين :-

$$\sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \left(\frac{\sum fx}{\sum f}\right)^2 = \frac{44850000}{300} - \left(\frac{110000}{300}\right)^2 = 15055.56$$

٣ـ الانحراف المعياري :-

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{15055.56} = 122.7011$$ ريال

٤ـ الوسيط و الربيع الادنى و الربيع الاعلى :-

١ـ تكوين الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

الجدول الاصلى

عدد الأسر	فئات الدخل
30	100 -
65	200 -
80	300 -
75	400 -
50	500 - 600
300	المجموع

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

التكرار المتجمع	الحد الادنى لفئة
0	أقل من 100
30	أقل من 200
95	أقل من 300
175	أقل من 400
250	أقل من 500
300	أقل من 600

١ـ الجدول التكراري المتجمع الصاعد :-

ترتيب الوسط

التكرار المتجمع	الحد الادنى لفئة
0	أقل من 100
30	أقل من 200
95	أقل من 300
175	أقل من 400
250	أقل من 500
300	أقل من 600

ترتيب الوسيط :-

$$\frac{\text{التكرارات مجموع}}{2} = \frac{300}{2} = 150$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

الوسيط =

$$= 300 + \frac{150 - 95}{175 - 95} \times 100 =$$

368.75 ريال

ترتيب الربيع الأدنى :-

$$\frac{\text{التكرارات مجموع}}{4} = \frac{300}{4} = 75$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

الربيع الادنى =

$$= 200 + \frac{75 - 30}{95 - 30} \times 100 =$$
269.23ريال

ترتيب الربيع الأعلى :-

$$= \frac{3\text{مجموع التكرارات}}{4} = \frac{300 \times 3}{4} = 225$$

(البحث عن هذه القيمة في عمود التكرار المتجمع)

٣- الربيع الادنى =

$$= 400 + \frac{225 - 175}{250 - 175} \times 100 =$$
466.67 ريال

٥- معامل الاختلاف المعياري و معامل الالتواء المعياري :-

أ- معامل الاختلاف المعياري :-

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100 = \frac{122.7011}{366.67} \times 100 = 33.46\ \%$$

ب- معامل الالتواء المعياري :-

معامل الالتواء المعياري $= \frac{3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط})}{\text{الانحراف المعياري}}$

عامل الالتواء المعياري $= \frac{3 \times (366.67 - 368.75)}{122.7011} = -0.05$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

٦- معامل الاختلاف الربيعي و معامل الالتواء الربيعي :-

أ- معامل الاختلاف الربيعي $= \frac{\text{الربيع الاعلى} - \text{الربيع الادنى}}{\text{الربيع الاعلى} + \text{الربيع الادنى}} \times ١٠٠$

ب - معامل الاختلاف الربيعي $= \frac{466.67 - 269.23}{466.67 + 269.23} \times 100 = 26.83\%$

ج- معامل الالتواء الربيعي $= \frac{(\text{الربيع الاعلى} - \text{الوسيط}) - (\text{الوسيط} - \text{الربيع الادنى})}{(\text{الربيع الاعلى}) - (\text{الربيع الادنى})}$

معامل الالتواء الربيعي $= \frac{(466.67 - 368.75) - (368.75 - 269.23)}{(466.67 - 269.23)} = -0.0081$

حيث أن الناتج قيمة تقترب من الصفر إذا فهذا التوزيع متماثل .

المحاضرة (١٣)

أولاً : معامل الارتباط

ثانياً : الانحدار الخطي البسيط

أولاً الارتباط :-

مقدمة :-

الارتباط هو تحديد مدى طبيعة وقوة العلاقة بين متغيرين و مؤشر هذه العلاقة هو معامل الارتباط

فإذا كان لدينا متغيران فقط . المتغير X وهو متغير يتم تحديده من قبل الباحث أو الشخص الذي يقوم بالدراسة وهو يسمى بالمتغير المستقل **Independent variable**

يرافق المتغيرX متغير آخر Yويسمى بالمتغير التابع **dependent variable** وهو متغير إحصائي لأن نتيجته غير محددة وتعتمد على قيم المتغير المستقل.

خصائص معامل الارتباط :-

١. يحدد مقياس الارتباط مقدار العلاقة بين متغيرين فقط
٢. تقع قيمة معامل الارتباط دائما بين -١ و ١
٣. إذا كانت قيمة معامل الارتباط موجبة فإن الارتباط يكون طرديا. أي أن ازدياد قيمة المتغير الأول تؤدي لارتفاع قيمة المتغير الثاني.
٤. إذا كانت قيمة معامل الارتباط سالبة فإن الارتباط يكون عكسيا. أي أن ازدياد قيمة المتغير الأول تؤدي لانخفاض قيمة المتغير الثاني.
٥. يكون الارتباط قوي جدا عندما تقترب قيمته من ١ أو -١
٦. اقتراب القيمة من الصفر يعني ضعف العلاقة أو الارتباط. وإذا كانت قيمة الارتباط صفر، هذا يعني أن العلاقة معدومة بين المتغيرين.

أنواع الارتباط :-

١- الارتباط الموجب (الطردي) **(Positive Correlation)** بأنه علاقة بين متغيرين (x, y)بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في نفس الاتجاه..

٢- الارتباط السالب (العكسي) **(Negative Correlation)** بأنه علاقة بين متغيرين (x, y)بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في الاتجاه المضاد.

قياس الارتباط :-

تستخدم معاملات الارتباط لقياس درجة الارتباط بين متغيرين(ظاهرتين) .

تعريف معامل الارتباط :

يعرف معامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز r بأنه عبارة عن مقياس رقمي يقيس قوة ونوع الارتباط بين متغيرين ، حيث تتراوح قيمته بين

(+1) و (-1) ، أي أن $1 \geq r \geq -1$

وتدل إشارة المعامل الموجبة على العلاقة الطردية ،

بينما تدل إشارة المعامل السالبة على العلاقة العكسية .

والجدول التالي يوضح أنواع الارتباط واتجاه العلاقة لكل نوع :

قيمة معامل الارتباط	المعنى
+1	ارتباط طردي تام
من 0.70 إلى 0.99	ارتباط طردي قوي
من 0.50 إلى 0.69	ارتباط طردي متوسط
من 0.01 إلى 0.49	ارتباط طردي ضعيف
0	لا يوجد ارتباط خطي

تحديد أسلوب قياس الارتباط المناسب وفقا لنوع البيانات:

كمية- كمية ـــــــــــ معامل ارتباط بيرسون

رتبية- رتبية ـــــــــ معامل سبيرمان

كمية- رتبية ـــــــــ معامل سبيرمان

١- معامل بيرسون للارتباط الخطي :-

يعتبر معامل الارتباط بيرسون من أكثر أنواع معاملات الارتباط استخداماً في مجال العلوم الاجتماعية .

ويستخدم هذا المعامل للتعبير عن قوة العلاقة بين المتغيرات الكمية فقط .

حساب معامل بيرسون للارتباط الخطي :

ويتم حساب معامل الارتباط بيرسون باستخدام العلاقة التالية:

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n\sum x^2 - (\sum x)^2)(n\sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

x	y	xy	x^2	y^2
$\sum x$	$\sum y$	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$

مثال :

الجدول التالي يوضح درجات الطلاب في مقرري الاحصاء و المحاسبة :-

x	40	65	80	74	56	93	63	86
y	61	74	88	64	62	84	71	81

المطلوب :-

حساب معامل ارتباط بيرسون للعلاقة بين درجات الطلاب في كل من مقرري الاحصاء و المحاسبة ؟

x	y	xy	x^2	y^2
40	61	2440	1600	3721
65	74	4810	4225	5476
80	88	7040	6400	7744
74	64	4736	5476	4096
56	62	3472	3136	3844
93	84	7812	8649	7056
63	71	4473	3969	5041
86	81	6966	7396	6561
557	585	41749	40851	43539

الحل:

قيمة الارتباط =

$$r = \frac{n\sum xy \; - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n\sum x^2 - (\sum x)^2)\;(n\sum y^2 - (y)^2)}}$$

$$= \frac{8\times41749-557\times585}{\sqrt{(8\times40851-(557)^2)(8\times43539-(585)^2)}}$$

$= 0.811482$

وطبقاً للنتيجة السابقة فإن الارتباط بين درجات الطلاب في مقرري الاحصاء و المحاسبة يعتبر ارتباط طردي قوي

مثال :-

في دراسة لظاهرة الادخار و الاستهلاك تم الاعتماد على عينة من عشر مفردات و كانت بيانات العينة كما يلي

الادخار X	150	220	120	180	160	410	335	90	110	175
الاستهلاك y	200	180	300	280	310	180	120	356	410	385

المطلوب : حساب اتجاه و قوة العلاقة بين كل من الظاهرتين ؟

x	y	xy	x^2	y^2
150	200	30000	22500	40000
220	180	39600	48400	32400
120	300	36000	14400	90000
180	280	50400	32400	78400
160	310	49600	25600	96100
410	180	73800	168100	32400
335	120	40200	112225	14400
90	356	32040	8100	126736
110	410	45100	12100	168100
175	385	67375	30625	148225
1950	2721	464115	474450	826761

الحل:

قيمة الارتباط =

$$r = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n\sum x^2 - (\sum x)^2)\ (n\sum y^2 - (y)^2)}}$$

$$= \frac{10\times464115-1950\times2721}{\sqrt{(10\times474450-(1950)^2)(10\times826761-(2721)^2)}}$$

$$= -0.737$$

وطبقاً للنتيجة السابقة فإن الارتباط بين كل من ظاهرتي الادخار و الاستهلاك هو ارتباط عكسي قوي .

٢- معامل اسبيرمان للارتباط الرتب -:

نستخدم معامل اسبيرمان لارتباط الرتب:-

(Rank Correlation coefficient) إذا كان المتغيرين كليهما وصفي ترتيبي أو كليهما متغير كمي.

طريقة حساب معامل اسبيرمان لارتباط الرتب :

إذا فرضنا أن المتغير X له الرتب R_x وأن المتغير Y له الرتب R_y. وبفرض أن d ترمز لفرق الرتبتين، بمعنى $d = R_x - R_y$ فإن معامل اسبيرمان لارتباط الرتب يُعطى بالصيغة التالية:

$$r = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

حيث n هي عدد الأزواج المرتبة .

مثال :-

البيانات التالية تمثل تقديرات عينة من سبعة طلاب فى مادتين

المادة الأولى	جيد	مقبول	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول	جيد
المادة الثانية	جيد جداً	مقبول	جيد جداً	جيد	جيد	جيد	ممتاز

والمطلوب:- حساب معامل اسبيرمان لارتباط الرتب بين هذين المادتين؟

X	y	رتب x	رتب y	d	d^2
جيد	جيد جداً	4	2.5	1.5	2.25
مقبول	مقبول	6.5	7	-0.05	0.25
ممتاز	جيد جداً	1	2.5	-1.5	2.25
جيد	جيد	4	5	-1	1
جيد جداً	جيد	2	5	-3	9
مقبول	جيد	6.5	5	1.5	2.25
جيد	ممتاز	4	1	3	9
المجموع				Zero	26

الحل :

$$r_S = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_S = 1 - \frac{6 \times 26}{7(7^2-1)} = 1 - \frac{156}{7 \times 48} = 0.536$$

إذا فالعلاقة بين كل من درجات الطلاب في المادتين هي علاقة طردية متوسطة .

مثال :-

لدراسة علاقة ارتباط تقديرات الطلاب في مادة الإحصاء وتقديراتهم في مادة الرياضيات، اخترنا خمس طلاب وكانت تقديراتهم كما يلي:

تقديرات الإحصاء (X)	F	A	C	D	B
تقديرات الرياضيات (Y)	D	C	B	F	A

هل توجد علاقة ارتباط؟ ما نوعها ومدى قوتها؟

الحل :-

X	y	رتب x	رتب y	d	d^2
F	D	1	2	-1	1
A	C	5	3	2	4
C	B	3	4	-1	1
D	F	2	1	1	1
B	A	4	5	-1	1
المجموع				**0**	**8**

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 8}{5(5^2 \;-1)} = 1 - \frac{48}{120} = 0.6$$

نلاحظ وجود علاقة ارتباط طردية متوسطة بين تقديرات الطلاب في مادة الإحصاء وتقديراتهم في مادة الرياضيات.

مثال :

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرري الاحصاء والمحاسبة :-

درجات الاحصاءX	90	85	65	70	95	80
درجات المحاسبة Y	70	60	85	90	55	65

هل توجد علاقة ارتباط؟ ما نوعها ومدى قوتها؟

الحل:

X	y	رتب x	رتب y	d	d^2
90	70	2	3.5	-1.5	2.25
85	60	3	5	-2	4
65	85	6	2	4	16
70	90	5	1	4	16
95	55	1	6	-5	25
80	70	4	3.5	0.5	0.25
المجموع				0	63.5

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2-1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 63.5}{6(6^2 \;-1)} = 1 - \frac{381}{210} = -0.8143$$

نلاحظ وجود علاقة ارتباط عكسية قوية بين درجات الطلاب في مادة الإحصاء والمحاسبة .

ثانياً : الانحدار الخطي البسيط :-

والانحدار هو أسلوب يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر عن طريق معادلة الانحدار

$$\hat{y} = a + bx$$

الانحدار الخطي البسيط : فكلمة " بسيط " تعني أن المتغير التابع y يعتمد على متغير مستقل واحد وهو x وكلمة " خطي" تعني أن العلاقة بين المتغيرين (x , y) علاقة خطية.

.

$$\hat{y} = a + bx$$

حيث

a : ثابت الانحدار أو الجزء المقطوع من محور y

B : ميل الخط المستقيم أو معامل انحدار

وتحسب القيمتان a و b من العلاقتين التاليتين:

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

ملاحظات مهمة:

إشارة معامل الانحدار b تدل على نوع الارتباط(طردي أو عكسي)

لإيجاد قيمة مقدرة جديدةy نعوض بقيمة معلومة للمتغير المستقل ولتكن x في معادلة تقدير خط الانحدار.

$$\hat{y} = a + bx$$

نعوض مكان x

مثال :-

لدراسة علاقة الانفاق y بالدخل x (بالريال) خلال الخمس سنوات الاخيرة أخذنا عينة من ١٠ مفردات و كانت بيانتهم كما يلي :-

الدخل x	100	150	90	350	210	185	95	155	120	325
الانفاق y	90	120	60	300	100	120	70	120	96	275

المطلوب :-

أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط و توقع قيمة الانفاق عند دخل ٤٠٠ ريال .

x	y	xy	x^2
100	90	9000	10000
150	120	18000	22500
90	60	5400	8100
350	300	105000	122500
210	100	21000	44100
185	120	22200	34225
95	70	6650	9025
155	120	18600	24025
120	96	11520	14400
325	275	89375	105625
1780	1351	306745	394500

الحل:

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{(n\sum xy) - ((\sum x)\times(\sum y))}{(n\sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{10\times 306745 - 1780\times 1351}{10\times 394500 - (1780)^2} =$$

$$= \frac{662670}{1540220} = 0.8533$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n} = \frac{1351 - 0.43 * 1780}{10} = -16.788$$

$$\underline{y = -16.788 + 0.8533\, x}$$

حيث أن قيمة b موجبة فإن b تمثل معدل تزايد أي أن العلاقة بين كل من المتغيرين هي علاقة طردية .

توقع قيمة الانفاق عند دخل ٤٠٠ ريال

$$y = -16.788 + 0.8533 \times (400) = 324.53$$

مثال :-

لدراسة علاقة الاستهلاك y بالادخار x (بالريال) خلال العشر سنوات الاخيرة أخذنا عينة من ٨ مفردات و كانت بيانتهم كما يلي :-

الاستهلاك x	150	200	130	95	86	110	60	210
الادخار y	70	20	110	160	180	150	250	80

المطلوب :-

أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط و توقع قيمة الادخار عند استهلاك 180 ريال .

الحل:

x	y	xy	x^2
150	70	10500	22500
200	20	4000	40000
130	110	14300	16900
95	160	15200	9025
86	180	15480	7396
110	150	16500	12100
60	250	15000	3600
210	80	16800	44100
1041	1020	107780	155621

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{(n\sum xy)-((\sum x)\times(\sum y))}{(n\sum x^2)-(\sum x)^2} = \frac{8\times107780 - 1041\times1020}{8\times155621-(1041)^2} =$$

$$= \frac{-199580}{161287} = -1.23742$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n} = \frac{1020-(-1.23742\times1041)}{8} = 288.5195$$

$$\underline{y = 288.5195 - 1.23742\ x}$$

حيث أن قيمة b سالبة فإن b تمثل معدل تناقص أي أن العلاقة بين كل من المتغيرين هي علاقة عكسية .

توقع قيمة الانفاق عند دخل 180 ريال

$$y = 288.5195 - 1.23752\ x\ (180) = 65.784\ r.s$$

تمارين منوعه :

تمرين (١) :-

إذا علمت المعلومات التالية :-

$\sum x= 54 \ , \sum y= 86 \ , \sum xy = 477 \ , \sum x^2 = 324 \ , \sum y^2=892 \ , \ n = 10$

فإن معامل الارتباط بين كل من المتغيرين x و y يساوى :-

(أ) -٠.١٧٩

(ب) ٠.١٧٩

(جـ) -٠.٥٦

(ء) لا شيء مما سبق

تمرين (٢) :-

إذا علمت المعلومات التالية :-

$\sum x= 178 \ , \sum y= 156 \ , \sum xy = 2638 \ , \sum x^2 = 3670 \ , \sum y^2=2742 \ , \ n = 10$

فإن معامل الارتباط بين كل من المتغيرين x و y يساوى :-

(أ) 0.35

(ب) -0.35

(جـ) 1

(ء) لا شيء مما سبق

المحاضرة (١٤)

مراجعة شاملة

١- المجموعات

(١)إذا كانت المجموعة $A=\{8,15,90\}$ و المجموعة $B=\{k,f,r\}$ ففي هذه الحالة فإن العلاقة بين كل من المجموعتين تأخذ أي من الأشكال التالية :

(أ) $A=B$

(ب) $A\equiv B$

(ج) $A\subset B$

(د) $B\subset A$

(٢) إذا كان $A = \{ 4 ,6 , 9 , 15\}$ و $B= \{ 2 , 4 , 11 \}$ فإن (AUB) :-

(أ) $\{2 , 4 , 6 , 9 , 11 , 15 \}$

(ب) $\{4\}$

(ج) $\{2 , 11 , 15 \}$

(د) لا شيء مما سبق

(٣) إذا كانت المجموعة $A=\{5 , 6 \}$ والمجموعة $B=\{3, 8\}$ فأي من المجموعات التالية تعبر عن العلاقة $A\times B$:

(أ) $\{(5,3),(5,8),(6,8)\}$

(ب) $\{(5,3),(5,8),(6,3),(6,8)\}$

(ج) $\{(3,5),(3,6),(8,5),(8,6)\}$

(د) لا شيء مما سبق

(٤) إذا كانت $A=\{5,7,9,11\}$ و $B=\{2,4,5,7\}$ أوجد $A-B$:

(أ) $\{5,7\}$

(ب) $\{9,11\}$

(ج) $\{2,4\}$

(د) لا شيء مما سبق

(٥) مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{1 , 2 , 4\}$ هي :

(أ) {(1),(2),(3)}

(ب) {{1},{2},{4},{1,2},{1,4},{2,4},{1,2,4},{} }

(ج) { }

(د) لا شيء مما سبق

(٦) إذا كانت المجموعة S تحتوي على خمس عناصر S={1,2,3,4,5} فإن عدد عناصر مجموعة المجموعات تساوي:

(أ) 8

(ب) 16

(ج) 32

(د) 64

(٧) إذا كانت [(x+2, y)]=[(3x+4 ,2y-5)] فإن قيمة كل من x و y هي :

(أ) x=5 ,y=8

(ب) x=1 , y=-5

(ج) x=-1 , y=5

(د) لا شيء مما سبق

٢- الدوال :-

(٨) إذا كانت المجموعة A={1,2,3} و المجموعة B={4,5,6} و كانت f_1={(4,1),(5,2),(6,3)} f_2={(1,4),(2,6)} f_3={(4,1),(4,2),(5,1)}

فأي من هذه الدوال تمثل دالة من B إلى A :

(أ) f_1

(ب) f_2

(ج) f_3

(د) لا شيء مما سبق

(٩) إذا كانت $f(x)=6x^2-2x+5$ فإن $f(3)$ تساوي :

(أ) 21

(ب) 53

(ج) 35

(د) لا شيء مما سبق

(١٠) ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(5,8)$ و $B(4,6)$ هو :

(أ) 4

(ب) 2-

(ج) 5

(د) لا شيء مما سبق

(١١) ميل الخط المستقيم الذي معادلته $15x=4y+10$ هو :

(أ) $-\frac{15}{4}$

(ب) $\frac{15}{4}$

(ج) $-\frac{3}{2}$

(د) لا شيء مما سبق

(١٢) نهاية الدالة $\lim_{x\to2}(2x^3-x^2+15)$ تساوي :-

(أ) 27

(ب) -27

(ج) 37

(د) لا شيء مما سبق

٣- النهايات :-

$$f(x)=\begin{cases}12x^3+5\,, & x<3\\ (e^x+8)\,, & x>3\end{cases}$$

(١٣) نهاية الدالة $\lim_{x\to4} f(x)$ تساوي :

(أ) 62.6

(ب) 65.7

(ج) 26.6

(د) لا شيء مما سبق

(١٤) نهاية الدالة $\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x)$ تساوي:

(أ) $\frac{13}{2}$

(ب) 6

(ج) -6

(د) لا شيء مما سبق

(١٥) إذا كانت الدالة المعرفة بـ :

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 & , \ x \le 20 \\ 1000(2x-8) & , \ x > 20 \end{cases}$$

فإن هذه الدالة :-

(أ) متصلة عند x=20

(ب) غير متصلة عند x=20

(ج) متصلة عند x=8

(د) لا شيء مما سبق

(١٦) نهاية الدالة $\lim_{x\to 0}(6e^{2x}+15)$ تساوي :

(أ) 15

(ب) 6

(ج) 21

(د) لا شيء مما سبق

(١٧) إذا كان ميل الخط المستقيم يساوي صفر فإن هذا الخط يكون :

(أ) موازي محور الصادات

(ب) موازي محور السينات

(ج) متعامد على محور السينات

(د) متعامد على محور الصادات

(١٨) إذا كان ميل الخط المستقيم يساوي ∞ فإن هذا الخط يكون:

(أ) موازي محور الصادات

(ب) موازي محور السينات

(ج) متعامد على محور السينات

(د) متعامد على محور الصادات

٤- التفاضل و التكامل :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تأخذ الشكل التالي :-

$$R = 4x^3 - 10x^2 + 8x + 20$$

ودالة التكلفة الكلية تأخذ الشكل التالي :-

$$C = 15x^2 - 2x + 36$$

(١٩) الايراد الحدى $R^/$ عند إنتاج و بيع ٥ وحدات يساوى :

(أ) 208

(ب) 200

(ج) 192

(د) لا شيء مما سبق

(٢٠) التكلفة الحدية $C^/$ عند إنتاج و بيع ٢٠ وحدة تساوى :-

(أ) 600

(ب) 200

(ج) 300

(د) لا شيء مما سبق

(٢١) أى من هذه الدوال تمثل دالة الربح الكلى P :

(أ) $P = 4x^3 - 25x^2 + 10x - 16$

(ب) $P = 10x^3 - x^2 - 16x - 20$

(ج) $P = 12x^2 - 10x - 8$

(د) لا شيء مما سبق

(٢٢) الربح الحدى $P^{/}$ عند بيع ١٠ وحدة يساوى :

(أ) 199

(ب) 198

(ج) 710

(د) لا شيء مما سبق

(٢٣) إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما تمثل بالدالة التالية :-

($D = 20-2x$) فيمكن وصف الطلب على هذه السلعة عند سعر 100 ريال و الكمية المطلوبة 50 وحدة على أنه طلب :

(أ) لا نهائي المرونة

(ب) متكافئ المرونة

(ج) مرن

(د) لا شيء مما سبق

ملحوظة : م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{المطلوبة الكمية}}$

(٢٤) إذا علمت أن دالة الربح الكلي هي $P= 50 + 1.5x - 2.5x^2$ فعلى ذلك فإن نوع نهاية هذه الدالة هي نهاية :

(أ) عظمى

(ب) صغرى

(ج) غير محددة

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدى الشركات تأخذ الشكل التالي :-

$$R^{/} = 60\ x^2 + 20\ x - 25$$

و دالة التكلفة الحدية تأخذ الشكل :-

$$C^{/} = 20\ x + 40$$

(٢٥) حجم الايراد الكلى R عند إنتاج و بيع ١٠ وحدات يساوى :

(أ) 20750

(ب) 20000

(ج) 21000

(د) لا شيء مما سبق

(٢٦) حجم التكاليف الكلية C عند إنتاج و بيع ١٠ وحدة يساوى :

(أ) 400

(ب) 1400

(ج) 1000

(د) لا شيء مما سبق

(٢٧) أى من الدوال التالية تعبر عن الربح الكلى P :

(أ) $15x^2 - 4x - 70$

(ب) $20x^3 - 10x^2 - 65x$

(ج) $20x^2 - 10x - 65$

(د) لا شيء مما سبق

(٢٨) حجم الربح الحدى $P^{/}$ عند إنتاج و بيع 10 وحدات يساوى :

(أ) 19650

(ب) 20000

(ج) 19000

(د) لا شيء مما سبق

في إحدى شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $15x^3 - 10x^2 + 3x - 10$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

(٢٩) دالة الايراد الكلى هى :-

(أ) $R = 15x^4 - 10x^3 + 3x^2 - 10x$

(ب) $R = 10x^4 - 5x^3 + 5x^2 - 10$

(ج) $R = 15x^4 + 15x^3 + 6x^2$

(د) $R = 10x^3 - 3x^2 - 5x$

(٣٠) فإن قيمة الإيراد الحدى عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

(أ) ١٤٠٢٠٠

(ب) ١٤٠٠٠٠

(ج) ٢٨٠٠٠٠٠٠

(د) ١٠٠٠٠٠٠

٥- الاحتمالات :-

(٣١) إذا علمت أن P(A)=0.65 و P(B)= 0.55 و أن كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة :-

فإن P(A∩B) تساوي :

(أ) 0.3507

(ب) 0.3575

(ج) 0

(د) لا شيء مما سبق

(٣٢) إذا علمت أن P(A)=0.65 و P(B)= 0.55 و أن كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة

فإن P(A∪B) تساوي :

(أ) 0.8425

(ب) 1

(ج) 0.30

(د) لا شيء مما سبق

(٣٢) إذا علمت أن P(A)=0.65 و P(B)= 0.55 و أن كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة

فإن P(A|B) تساوي :

(أ) 0.65

(ب) 0.55

(ج) 0.3307

(د) لا شيء مما سبق

الجدول التالي يمثل جدول توزيع احتمالي لإحدى الظواهر الطبيعية :-

المجموع	3	2	1	0	X
1	?	0.2	0.4	0.3	P(x)

من خلال الجدول السابق أجب عن الاسئلة التالية :-

(٣٤) قيمة التوقع الرياضي أو القيمة المتوقعة μ (المتوسط) لهذا التوزيع يساوى :

المجموع	٣	٢	١	٠
١	٠.١	٠.٢	٠.٤	٠.٣
١.١	٠.٣	٠.٤	٠.٤	٠

(أ) 1

(ب) 1.1

(ج) 1.2

(د) لا شيء مما سبق

(٣٥) قيمة الانحراف المعيارى لهذا التوزيع تساوى :

المجموع	٣	٢	١	٠
١	٠.١	٠.٢	٠.٤	٠.٣
١.١	٠.٣	٠.٤	٠.٤	٠
٢.١	٠.٩	٠.٨	٠.٤	٠

(أ) 1

(ب) 2.1

(ج) 1.45

(د) لا شيء مما سبق

(٣٦)من خلال الجدول السابق أجب عن الاسئلة التالية :-

$P(x>1)$:

(أ) 0.3

(ب) 0.5

(ج) 0.7

(د) لا شيء مما سبق

في دراسة لتخصصات ١٠٠ طالب وطالبة تم الحصول على النتائج التالية :-

	طالب	طالبة	المجموع
مسار عربي	30	10	40
مسار انجليزي	24	36	60
المجموع	54	46	100

(٣٧) فإذا تم اختيار أحد الأشخاص عشوائياً فاحسب الاحتمالات التالية :-

احتمال أن يكون مسار عربي أو طالب :

(أ) 0.24

(ب) 0.30

(ج) 0.64

(د) لا شيء مما سبق

(٣٨) فإذا تم اختيار أحد الأشخاص عشوائياً فاحسب الاحتمالات التالية :-

احتمال أن يكون مسار إنجليزي و طالبة :

(أ) 0.64

(ب) 0.36

(ج) 0.24

(د) لا شيء مما سبق

(٣٩) فإذا تم اختيار أحد الأشخاص عشوائياً فاحسب الاحتمالات التالية :-

إذا علمت أن الشخص المختار طالبة فما هو احتمال أن يكون مسارها لغة إنجليزية :

p (مسار اللغة الانجليزية|طالبة)

(أ) 36/100

(ب) 36/46

(ج) 36/60

(د) لا شيء مما سبق

إذا علمت أن $P(A)=0.75$ و $P(B)= 0.65$:-

(٤٠) إذا كانت قيمة الاحتمال $P(A\cap B)=0.5$ فإن كل من الحدثين A و B :

(أ) متعارضان

(ب) مستقلان

(ج) غير مستقلان

(د) لا شيء مما سبق

(٤١) إذا كانت قيمة الاحتمال $P(A\cap B)=0.5$ فإن قيمة الاحتمال $P(A\cup B)$ تساوى :

(أ) 0.75

(ب) 0.90

(ج) 0.66

(د) لا شيء مما سبق

(٤٢) إذا كانت قيمة الاحتمال $P(A\cap B)=0.5$ فإن قيمة الاحتمال $P(A|B)$ تساوى :

(أ) 0.5684

(ب) 0.7692

(ج) 0.4847

(د) لا شيء مما سبق

(٤٣) بفرض أن كل من الحدثين A و B هي حوادث مستقلة فإن قيمة $P(A\cap B)$ تساوى :

(أ) 0.4524

(ب) 0.9264

(ج) 0.4875

(د) لا شيء مما سبق

(٤٤)بفرض أن كل من الحدثين A و B هي حوادث متعارضة فإن قيمة $P(A\cap B)$ تساوى :

(أ) 0.3

(ب) 0

(ج) 0.65

(د) لا شيء مما سبق

إذا كان احتمال نجاح الطالب في مقرر الرياضيات هو 0.8 واحتمال نجاحه في مقرر الاقتصاد هو 0.6 أحسب الاحتمالات التالية إذا علمت أن هذه الاحداث مستقلة -:

(٤٥) احتمال النجاح في المقررين معاً :-

(أ) ٠.٤٢

(ب) ٠.٤٨

(ج) ٠.٥٤

(د) لا شيء مما سبق

(٤٦) احتمال الرسوب في المقررين معاً :-

(أ) ٠.٤٨

(ب) ٠.٠٨

(ج) ٠.٩٢

(د) لا شيء مما سبق

(٤٧) احتمال نجاح الطالب فى مقرر واحد فقط :-

(أ) ٠.٤٥

(ب) ٠.٤٤

(ج) ٠.٥٤

(د) لا شيء مما سبق

(٤٨) احتمال النجاح فى مقرر واحد على الاقل :-

(أ) ٠.٤٨

(ب) ٠.٠٨

(ج) ٠.٩٢

(د) لا شيء مما سبق

مصنع يستخدم ثلاث آلات في الانتاج فإذا كانت الالة الاولى تنتج ٤٠% من إنتاج المصنع و الالة الثانية تنتج ٣٠% من الانتاج و الباقي للألة الثالثة فإذا كانت نسبة الانتاج المعيب للألأت الثلاثة على التوالي هي ٧% و ٣% و ٤% ، وإذا تم سحب وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع المطلوب :-

(٤٩) احتمال أن تكون معيبة :-

(أ) ٠.٠٥٢

(ب) ٠.٠٤٩

(ج) ٠.٠٥٦

(د) لا شيء مما سبق

(٥٠) اذا علمت ان هذه الوحدة معيبة فما هو احتمال أن تكون من إنتاج الالة الثالثة :-

(أ) ٠.٠٤٩

(ب) ٠.٢٠١

(ج) ٠.٢٤٥

(د) لا شيء مما سبق

٦- مقاييس النزعة المركزية و التشتت :-

البيانات التالية توضح توزيع مجموعة من العاملين تبعاً لإجورهم الشهرية في إحدى القطاعات التجارية :-

فئات الأجور	صفر -	٢٠٠ -	٤٠٠ -	٦٠٠ -	٨٠٠ -١٠٠٠	المجموع
عدد العاملين	٢٠٠	٣٥٠	٧٠٠	٥٠٠	٢٥٠	٢٠٠٠

تمهيد الحل :-

فئات الاجر	التكرار f	X	fx	fx^2
0 -	200	100	20000	2000000
200 -	350	300	105000	31500000
400 -	700	500	350000	175000000
600 -	500	700	350000	245000000
800 - 1000	250	900	225000	202500000
المجموع	2000		1050000	656000000

المطلوب حساب المؤشرات التالية مقرباً النتائج إلى أقرب رقمين بعد العلامة العشرية إذا لزم الامر ذلك :-

(٥١) الوسط الحسابي :

(أ) ٥٢.٥٠

(ب) ١٠٠٠

(ج) ٥٢٥

(د) لا شيء مما سبق

(٥٢) التباين يساوي :-

(أ) ٥٢٣٧٥

(ب) ٥٢٣٥٧

(ج) ٢٢٨

(د) لا شيئ مما سبق

(٥٣) قيمة الانحراف المعياري :-

(أ) 223

(ب) 228.86

(ج) 282.86

(د) لا شيء مما سبق

(٥٤) معامل الاختلاف المعياري :

(أ) ٣٤.٦%

(ب) ٤٣.٦%

(ج) ٢٢.٨٩%

(د) لا شيء مما سبق

تمهيد الحل :-

فئات الأجور	صفر -	٢٠٠ -	٤٠٠ -	٦٠٠ -	٨٠٠- ١٠٠٠	المجموع
عدد العاملين	٢٠٠	٣٥٠	٧٠٠	٥٠٠	٢٥٠	٢٠٠٠

الجدول الاصلي

التكرار المتجمع	الحد الادنى للفئة
0	أقل من صفر
200	أقل من ٢٠٠

الجدول التكراري المتجمع الصاعد

ترتيب الوسيط ١٠٠٠

550	أقل من ٤٠٠
1250	أقل من ٦٠٠
1750	أقل من ٨٠٠
2000	أقل من ١٠٠٠

(٥٥) الوسيط :

(أ) ٥٢٨.٥٧

(ب) ٣٧١.٤٣

(ج) ٧٤٠

(د) لا شيء مما سبق

(٥٦) الربيع الأدنى :

(أ) ٥٢٨.٦٤

(ب) ٢٢٨.٩٢

(ج) ٣٧١.٤٣

(د) لا شيء مما سبق

(٥٧) الربيع الاعلى :

(أ) ٥٠٢.٨٦

(ب) ٧٠٠

(ج) ٧٥٠

(د) لا شيء مما سبق

(٥٨) يعتبر هذا التوزيع توزيع :

(أ) ملتوي جهة اليمين

(ب) ملتوي جهة اليسار

(ج) متماثل وطبيعي

(د) لا شيء مما سبق

٧- الارتباط :-

لدراسة العلاقة بين درجات مجموعة من الطلاب في كل من مادتي المحاسبة (x)و الاقتصاد (y) تم تجميع عينة مكونة من ٨ طلاب و الجدول التالي يوضح ملخص نتائج الدراسة :-

المحاسبة	١٧	١٨	١٨	٢٠	١٣	١١	١٩	٢٠
الاقتصاد	١٠	١١	١٣	١٤	١٨	١٩	١٣	١٤

تمهيد الحل :-

x	Y	x y	x^2	Y^2
١٧	١٠	١٧٠	٢٨٩	١٠٠
١٨	١١	١٩٨	٣٢٤	١٢١
١٨	١٣	٢٣٤	٣٢٤	١٦٩
٢٠	١٤	٢٨٠	٤٠٠	١٩٦
١٣	١٨	٢٣٤	١٦٩	٣٢٤
١١	١٩	٢٠٩	١٢١	٣٦١
١٩	١٣	٢٤٧	٣٦١	١٦٩
٢٠	١٤	٢٨٠	٤٠٠	١٩٦
١٣٦	١١٢	١٨٥٢	٢٣٨٨	١٦٣٦

المطلوب :-

(٥٩) قيمة معامل الارتباط بيرسون بين كل من درجات الاقتصاد و المحاسبة يساوي :

(أ) 0.72 +

(ب) 0.72 -

(ج) 0.77 +

(د) لا شيء مما سبق

(٦٠) ما هو اتجاه العلاقة بين الظاهرتين :

(أ) طردية

(ب) عكسية

(ج) خطية

(د) لا شيء مما سبق

(٦١) قيمة معامل التحديد بين كل من درجات الاقتصاد و المحاسبة يساوي :

(أ) %52

(ب) %65

(ج) % 64

(د) لا شيء مما سبق

لدراسة العلاقة بين درجات مجموعة من الطلاب في كل من مادتي الكيمياء (x)و الفيزياء (y) تم تجميع عينة مكونة من ٨ طلاب و المعلومات التالية توضح ملخص نتائج الدراسة :-

$n = 8$

$\sum x = 116$

$\sum y = 112$

$\sum x\,y = 1669$

$\sum x^2 = 1716$

$\sum y^2 = 1636$

المطلوب :-

(٦٢) قيمة معامل الارتباط بيرسون بين كل من درجات الكيمياء و الفيزياء يساوي :

(أ) 0.87 +

(ب) 0.936 -

(ج) 0.936 +

(د) لا شيء مما سبق

(٦٣) ما هو اتجاه العلاقة بين الظاهرتين :

(أ) طردية

(٦٤) قيمة معامل التحديد بين كل من درجات الاحصاء و المحاسبة يساوي :

(أ) %53

(ب) %97.6

(ج) % 87.6

(د)   لا شيء مما سبق

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرري الاحصاء والمحاسبة:-

درجات الاحصاء س	10	12	9	7	12	14
درجات المحاسبة ص	10	12	11	10	15	13

تمهيد الحل :

x	y	رتب x	رتب y	d	d^2
10	10	4	5.5	-1.5	2.25
12	13	2.5	3	-.5	0.25
9	11	5	4	1	1
7	10	6	5.5	.5	0.25
12	15	2.5	1	1.5	2.25
14	14	1	2	-1	1
المجموع				0	7

المطلوب :-

(٦٥)   قيمة معامل الارتباط يساوي :

(أ)   - ٠.٨

(ب)   + ٠.٨

(ج)   + ٠.٥

(د)   لا شيء مما سبق

الجدول التالي يوضح الرتب التي حصل عليها مجموعة من الطلاب في مادتي اللغة العربية و اللغة الانجليزية :-

الطالب	رتب س	رتب ص

A	٢	١
B	٤	٣
C	٣	٤
D	١	٢
E	٥	٥

d^2	D	رتب ص	رتب س
0	0	5	5
2.25	-1.5	2.5	1
1	-1	4	3
2.25	1.5	2.5	4
1	1	1	2
6.5	0	المجموع	

المطلوب :-

(٦٦) قيمة معامل الارتباط بين كل من درجات اللغة العربية و اللغة الانجليزية يساوي :

(أ) - ٠.٣٢٥

(ب) + ٠.٣٢٥

(ج) + ٠.٦٧٥

(د) لا شيء مما سبق

(٦٧) ما هو اتجاه العلاقة بين الظاهرتين :

(أ) طردية

(ب) عكسية

(ج) خطية

(د) لا شيء مما سبق

(٦٨) قيمة معامل التحديد بين كل من درجات الاحصاء و المحاسبة يساوي :

(أ) ٠.٠٤ +

(ب) ٠.٦٤ -

(ج) ٠.٤٦ +

(د) لا شيء مما سبق

٨- الانحدار :-

الجدول التالي يوضح العلاقة بين كل من درجات الطلاب في كل من مادتي الاحصاء و المحاسبة لمجموعة من الطلاب :

الاحصاء x	المحاسبة y	x y	x^2	y^2
١٤	٢٠	٢٨٠	١٩٦	٤٠٠
١٦	١٤	٢٢٤	٢٥٦	١٩٦
١٢	١٦	١٩٢	١٤٤	٢٥٦
١٨	١٣	٢٣٤	٣٢٤	١٦٩
٢٠	١٢	٢٤٠	٤٠٠	١٤٤
١٠	١٦	١٦٠	١٠٠	٢٥٦
٩٠	٩١	١٣٣٠	١٤٢٠	١٤٢١

(٦٩) قيمة معدل التزايد أو التناقص (b) في معادلة الانحدار (y=a + bx) يساوي :

(أ) + 0.5

(ب) - 0.5

(ج) + 0.28

(د) لا شيء مما سبق

(٧٠) قيمة (a) في معادلة الانحدار (y=a + b x) تساوي :

(أ) 122.67

(ب) 22.67

(ج) 2.67

(د) لا شيء مما سبق

(٧١) من خلال البيانات السابقة فإن درجة المحاسبة المتوقعة عند حصول الطالب على ١٢ في الاحصاء تساوي :

(أ) 19.67

(ب) 10.67

(ج) 16.67

(د) لا شيء مما سبق

تمت

مع تمنياتنا لكم بدوام النجاح و التوفيق ☺

Ghayda

Dody-11