

المحاضرة (13)**أولاً : معامل الارتباط****ثانياً : الانحدار الخطي البسيط****أولاً الارتباط :-**

مقدمة :-

الارتباط هو تحديد مدى طبيعة وقوة العلاقة بين متغيرين و مؤشر هذه العلاقة هو معامل الارتباط فلذا كان لدينا متغيران فقط . **المتغير x** وهو متغير يتم تحديده من قبل الباحث أو الشخص الذي يقوم بالدراسة وهو يسمى **بالمتغير المستقل Independent variable** يرافق المتغير **x** متغير آخر **y** ويسمى **بالمتغير التابع dependent variable** وهو متغير إحصائي لأن نتيجته غير محددة وتعتمد على قيم المتغير المستقل.

خصائص معامل الارتباط

1. يحدد مقياس الارتباط مقدار العلاقة بين متغيرين فقط
2. تقع قيمة معامل الارتباط دائما بين -1 و 1
3. إذا كانت قيمة معامل الارتباط موجبة فإن الارتباط يكون طرديا. أي أن ازدياد قيمة المتغير الأول تؤدي لارتفاع قيمة المتغير الثاني.
4. إذا كانت قيمة معامل الارتباط سالبة فإن الارتباط يكون عكسيا. أي أن ازدياد قيمة المتغير الأول تؤدي لانخفاض قيمة المتغير الثاني.
5. يكون الارتباط **قوى جدا** عندما تقترب قيمته من 1 أو -1
6. اقتراب القيمة من الصفر يعني ضعف العلاقة أو الارتباط. وإذا كانت قيمة الارتباط صفر، هذا يعني أن العلاقة معدومة بين المتغيرين.

أنواع الارتباط :-

1. الارتباط الموجب (الطردي) (Positive Correlation) بأنه علاقة بين متغيرين (x, y) بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في نفس الاتجاه..
2. الارتباط السالب (العكسي) (Negative Correlation) بأنه علاقة بين متغيرين (x, y) بحيث إذا تغير أحد المتغيرين فإن الآخر يتبعه في الاتجاه المضاد.

قياس الارتباط :-

تستخدم معاملات الارتباط لقياس درجة الارتباط بين متغيرين (ظاهرتين).

تعريف معامل الارتباط :

يعرف معامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز r بأنه عبارة عن مقياس رقمي يقيس قوة ونوع الارتباط بين متغيرين ، حيث تتراوح قيمته بين

$$1 \geq r \geq -1 \quad \text{أي أن } (+1) \text{ و } (-1)$$

وتدل إشارة المعامل الموجبة على العلاقة الطردية ، بينما تدل إشارة المعامل السالبة على العلاقة العكسية .

والجدول التالي يوضح أنواع الارتباط واتجاه العلاقة لكل نوع :

المعنى	قيمة معامل الارتباط
ارتباط طردي تام	+1
ارتباط طردي قوي	من 0.70 إلى 0.99
ارتباط طردي متوسط	من 0.50 إلى 0.69
ارتباط طردي ضعيف	من 0.01 إلى 0.49
لا يوجد ارتباط خطي	0

تحديد أسلوب قياس الارتباط المناسب وفقاً لنوع البيانات:

تحديد أسلوب قياس الارتباط المناسب وفقاً لنوع البيانات:

كمية- كمية _____ معامل ارتباط بيرسون

رتبية- رتبية _____ معامل سبيرمان

كمية- رتبية _____ معامل سبيرمان

1- معامل بيرسون للارتباط الخطي :-

يعتبر معامل الارتباط بيرسون من أكثر أنواع معاملات الارتباط استخداماً في مجال العلوم الاجتماعية .

ويستخدم هذا المعامل للتعبير عن قوة العلاقة بين المتغيرات الكمية فقط .

حساب معامل بيرسون للارتباط الخطي :

ويتم حساب معامل الارتباط بيرسون باستخدام العلاقة التالية:

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)(n \sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

x	y	xy	x ²	y ²
$\sum x$	$\sum y$	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$

مثال :

الجدول التالي يوضح درجات الطلاب في مقرري الاحصاء و المحاسبة :-

x	40	65	80	74	56	93	63	86
y	61	74	88	64	62	84	71	81

المطلوب :-

حساب معامل ارتباط بيرسون للعلاقة بين درجات الطلاب في كل من مقرري الاحصاء و المحاسبة ؟

x	y	xy	x ²	y ²
40	61	2440	1600	3721
65	74	4810	4225	5476
80	88	7040	6400	7744
74	64	4736	5476	4096
56	62	3472	3136	3844
93	84	7812	8649	7056
63	71	4473	3969	5041
86	81	6966	7396	6561
557	585	41749	40851	43539

قيمة الارتباط =

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)(n \sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

$$= \frac{8 \times 41749 - 557 \times 585}{\sqrt{(8 \times 40851 - (557)^2)(8 \times 43539 - (585)^2)}} = 0.811482$$

وطبقا للنتيجة السابقة فإن الارتباط بين درجات الطلاب في مقرري الاحصاء و المحاسبة يعتبر ارتباطا طرديا قويا.

مثال :-

في دراسة لظاهرة الادخار و الاستهلاك تم الاعتماد على عينة من عشر مفردات و كانت بيانات العينة كما يلي :-

الادخل x	150	220	120	180	160	410	335	90	110	175
الاستهلاك y	200	180	300	280	310	180	120	356	410	385

المطلوب : حساب اتجاه و قوة العلاقة بين كل من الظاهرتين ؟

x	y	xy	x ²	y ²
150	200	30000	22500	40000
220	180	39600	48400	32400
120	300	36000	14400	90000
180	280	50400	32400	78400
160	310	49600	25600	96100
410	180	73800	168100	32400
335	120	40200	112225	14400
90	356	32040	8100	126736
110	410	45100	12100	168100
175	385	67375	30625	148225
1950	2721	464115	474450	826761

قيمة الارتباط =

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{(n \sum x^2 - (\sum x)^2)(n \sum y^2 - (\sum y)^2)}}$$

$$= \frac{10 \times 464115 - 1950 \times 2721}{\sqrt{(10 \times 474450 - (1950)^2)(10 \times 826761 - (2721)^2)}} = -0.737$$

وطبقا للنتيجة السابقة فإن الارتباط بين كل من ظاهرتي الادخار والاستهلاك هو ارتباط عكسي قوي .

2- معامل اسبيرمان للارتباط الرتب :-

نستخدم معامل اسبيرمان لارتباط الرتب :-

(Rank Correlation coefficient) إذا كان المتغيرين كليهما وصفي ترتيب أو كليهما متغير كمي.

طريقة حساب معامل اسبيرمان لارتباط الرتب:

إذا فرضنا أن المتغير X له الرتب R_x وأن المتغير Y له الرتب R_y . وبفرض أن d ترمز لفرق الرتب، بمعنى $d = R_x - R_y$ فإن معامل اسبيرمان لارتباط الرتب يُعطى بالصيغة التالية:

$$r = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

حيث n هي عدد الأزواج المرتبة .

مثال :-

البيانات التالية تمثل تقديرات عينة من سبعة طلاب في مادتين

جيد	مقبول	جيد جداً	جيد	ممتاز	مقبول	جيد	المادة الأولى
ممتاز	جيد	جيد	جيد	جيد جداً	مقبول	جيد جداً	المادة الثانية

والمطلوب حساب معامل اسبيرمان لارتباط الرتب بين هذين المادتين؟

X	y	رتب x	رتب y	d	d ²
جيد	جيد جداً	4	2.5	1.5	2.25
مقبول	مقبول	6.5	7	-0.05	0.25
ممتاز	جيد جداً	1	2.5	-1.5	2.25
جيد	جيد	4	5	-1	1
جيد جداً	جيد	2	5	-3	9
مقبول	جيد	6.5	5	1.5	2.25
جيد	ممتاز	4	1	3	9
المجموع				Zero	26

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 26}{7(7^2 - 1)} = 1 - \frac{156}{7 \times 48} = 0.536$$

إذا فالعلاقة بين كل من درجات الطلاب في المادتين هي علاقة طردية متوسطة .

مثال :-

لدراسة علاقة ارتباط تقديرات الطلاب في مادة الإحصاء وتقديراتهم في مادة الرياضيات، اخترنا خمس طلاب وكانت تقديراتهم كما يلي:

تقديرات الإحصاء (X)	F	A	C	D	B
تقديرات الرياضيات (Y)	D	C	B	F	A

هل توجد علاقة ارتباط؟ ما نوعها ومدى قوتها؟

الحل :-

X	y	رتب x	رتب y	d	d ²
F	D	1	2	-1	1
A	C	5	3	2	4
C	B	3	4	-1	1
D	F	2	1	1	1
B	A	4	5	-1	1
المجموع				0	8

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 8}{5(5^2 - 1)} = 1 - \frac{48}{120} = 0.6$$

نلاحظ وجود علاقة ارتباط **طردية متوسطة** بين تقديرات الطلاب في مادة الإحصاء وتقديراتهم في مادة الرياضيات

مثال :-

الجدول التالي يوضح توزيع درجات مجموعة من الطلاب في مقرري الإحصاء والمحاسبة :-

درجات الاحصاء X	90	85	65	70	95	80
درجات المحاسبة Y	70	60	85	90	55	65

هل توجد علاقة ارتباط؟ ما نوعها ومدى قوتها؟

الحل :-

X	y	رتب x	رتب y	d	d ²
90	70	2	3.5	-1.5	2.25
85	60	3	5	-2	4
65	85	6	2	4	16
70	90	5	1	4	16
95	55	1	6	-5	25
80	70	4	3.5	0.5	0.25
المجموع				0	63.5

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 63.5}{6(6^2 - 1)} = 1 - \frac{381}{210} = -0.8143$$

نلاحظ وجود علاقة ارتباط عكسية قوية بين درجات الطلاب في مادة الإحصاء والمحاسبة .

ثانياً : الانحدار الخطي البسيط :-

والانحدار هو أسلوب يمكن بواسطته تقدير قيمة أحد المتغيرين بمعلومية قيمة المتغير الآخر عن طريق معادلة الانحدار

$$\hat{y} = a + bx$$

الانحدار الخطي البسيط : فكلما " بسيط " تعني أن المتغير التابع y يعتمد على متغير مستقل واحد وهو x وكلمة " خطي " تعني أن العلاقة بين المتغيرين (x , y) علاقة خطية.

$$\hat{y} = a + bx$$

حيث

a : ثابت الانحدار أو الجزء المقطوع من محور y

B : ميل الخط المستقيم أو معامل انحدار

وتحسب القيمتان a و b من العلاقتين التاليتين:

$$b = \frac{n\sum xy - (\sum x)(\sum y)}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{\sum y - b\sum x}{n}$$

ملاحظات مهمة :

إشارة معامل الانحدار b تدل على نوع الارتباط (طردي أو عكسي)

لإيجاد قيمة مقدرة جديدة y نعوض بقيمة معلومة للمتغير المستقل ولتكن x في معادلة تقدير خط الانحدار.

$$\hat{y} = a + bx$$

نعوض مكان
x

مثال :-

لدراسة علاقة الانفاق y بالدخل x (بالريال) خلال الخمس سنوات الاخيرة أخذنا عينة من 10 مفردات و كانت بياناتهم كما يلي :-

الدخل x	100	150	90	350	210	185	95	155	120	325
الانفاق y	90	120	60	300	100	120	70	120	96	275

المطلوب :-

أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط و توقع قيمة الانفاق عند دخل 400 ريال .

x	y	xy	x^2
100	90	9000	10000
150	120	18000	22500
90	60	5400	8100
350	300	105000	122500
210	100	21000	44100
185	120	22200	34225
95	70	6650	9025
155	120	18600	24025
120	96	11520	14400
325	275	89375	105625
1780	1351	306745	394500

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{(n \sum xy) - ((\sum x) \times (\sum y))}{(n \sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{10 \times 306745 - 1780 \times 1351}{10 \times 394500 - (1780)^2} = \frac{662670}{1540220} = 0.8533$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n} = \frac{1351 - 0.8533 \times 1780}{10} = -16.788$$

$$\underline{y = -16.788 + 0.8533 x}$$

حيث أن قيمة b موجبة فإن b تمثل معدل تزايد أي أن العلاقة بين كل من المتغيرين هي علاقة طردية.

توقع قيمة الانفاق عند دخل 400 ريال

$$y = -16.788 + 0.8533 \times (400) = 324.53$$

مثال :-

لدراسة علاقة الاستهلاك y بالادخار x (بالريال) خلال العشر سنوات الاخيرة أخذنا عينة من 8 مفردات و كانت بياناتهم كما يلي :-

الاستهلاك x	150	200	130	95	86	110	60	210
الادخار y	70	20	110	160	180	150	250	80

المطلوب :-

أوجد معادلة الانحدار الخطي البسيط و توقع قيمة الادخار عند استهلاك 180 ريال .

x	y	xy	x ²
150	70	10500	22500
200	20	4000	40000
130	110	14300	16900
95	160	15200	9025
86	180	15480	7396
110	150	16500	12100
60	250	15000	3600
210	80	16800	44100
1041	1020	107780	155621

$$\hat{y} = a + bx$$

$$b = \frac{(n \sum xy) - ((\sum x) \times (\sum y))}{(n \sum x^2) - (\sum x)^2} = \frac{8 \times 107780 - 1041 \times 1020}{8 \times 155621 - (1041)^2} = \frac{-199580}{161287} = -1.23742$$

$$a = \frac{\sum y - b \sum x}{n} = \frac{1020 - (-1.23742 \times 1041)}{8} = 288.5195$$

$$y = 288.5195 - 1.23742 x$$

حيث أن قيمة b سالبة فإن b تمثل معدل تناقص أي أن العلاقة بين كل من المتغيرين هي علاقة عكسية.

توقع قيمة الانفاق عند دخل 180 ريال

$$y = 288.5195 - 1.23752 \times (180) = 65.784 \text{ ريال}$$

تمارين متنوعة :-

تمرين (1)

إذا علمت المعلومات التالية :-

$$\sum x = 54 , \sum y = 86 , \sum xy = 477 , \sum x^2 = 324 , \sum y^2 = 892 , n = 10$$

فإن معامل الارتباط بين كل من المتغيرين x و y يساوى :-

(أ) -0.179

(ب) 0.179

(ج) -0.56

(د) لا شيء مما سبق

تمرين (2)

إذا علمت المعلومات التالية :-

$$\sum x = 178 , \sum y = 156 , \sum xy = 2638 , \sum x^2 = 3670 , \sum y^2 = 2742 , n = 10$$

فإن معامل الارتباط بين كل من المتغيرين x و y يساوى :-

(أ) 0.35

(ب) -0.35

(ج) 1

(د) لا شيء مما سبق