المحاضرة (1)

المجموعات

تعريف المجموعة :- يمكن تعريف المجموعة على أنها تجمع من الاشياء أو العناصر المحددة تماماً وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء أخر .

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل :-

A , B , C , ...

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغير مثل :-

a , b , c , ...

يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى " ليبين عناصر المجموعة
فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A
فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A و يكتب بالصورة
$a \in A$
أما إذا كان a ليس عنصراً من عناصر المجموعة A فإننا
نقول أن العنصر a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب على
الصورة $a \notin A$

طريقة كتابة المجموعات :

طريقة العد (سرد العناصر):-

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة{ } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة " , " :-

مثال :-

A = { 2,0,1,4}

B= { a , b ,c , d }

C= { 1 , 2 , 3 .....}

(و هي مجموعة منتظمة مفتوحة تسير بنفس الشكل1 2 3 4وهكذا)

D = { 1, 2 , 3,....,100}

(و هي مجموعة مغلقة و لكل المساحة لا تكفي لكتابة من 1 إلى 100 و سوف نستخدم النقاط للتعبير عن بعض العناصر)

طريقة القاعدة (الصفة المميزة) :-

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ،فمثلاً :

A = { x : x عدد زوجي }
B = { x : x طالب بمقرر الاحصاء في الادارة }
C = { x : x طالب بنظام التعليم عن بعد }
D = { x : $-3 \le x \le 1$ x عدد صحيح }
X = { x : $0 \le x \le 12$ x عدد صحيح }

أنواع المجموعات :-

المجموعة الخالية :-

هي المجموعة التي لا تحتوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ (فاي) أو { } .

أمثلة :-

A = { x : عدد طبيعي زوجي و فردي x }

B = { x : دولة عربية تقع في أمريكا الشمالية x }

المجموعة المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال :

المجموعات التالية مجموعات منتهية .

A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

B = { 1 , 2 , 3 , …….. , 100}

C = { x , y , s, t u }

المجموعة غير المنتهية :-

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة (المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها بشكل دقيق)

مثال :

المجموعات التالية مجموعات غير منتهية .

A = { x : عدد طبيعي فردي }

B = { 10, 20 , 30 ,……… }

المجموعة الكلية :-

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية و يرمز لها بالرمز U .

المجموعة الجزئية :-

تكون المجموعة A جزئية من المجموعة B إذا كانت جميع عناصر A موجودة في B و تكتب على الصورة :- $A \subset B$.

أمثلة :-

١- إذا كانت $A = \{2 , 4 , 6\}$ و $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ فإن
$A \subset B$.

٢- المجموعة المكونة من جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة .

تساوي المجموعات :-

تكون المجموعتان A و B متساويتان إذا كانت :-

$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A$ ≫≫≫≫ $A = B$

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرها وتكتب على الصورة $A \equiv B$

مثال :

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- $A = \{1, 5, 7 , 9\}$, $B = \{9 , 7 ,5 ,1\}$

2- $A= \{2 ,5 ,9\}$, $B = \{a , s , d\}$

الحل

$1 - A = B$

$2 - A \equiv B$

العمليات على المجموعات :-

الاتحاد :-

اتحاد المجموعتين A و B $(A \cup B)$ هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما .

مثال :-

إذا كان $A = \{1 , 2 , 3 , 7\}$ و $B= \{2 , 4 , 6 , 8\}$ أوجد (AUB) ؟

الحل

$(AUB) = \{1 ,2 , 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

التقاطع :-

تقاطع المجموعتين A و B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في Aو في B معاً أي العناصر المشتركة بين A و B .

مثال :-

إذا كان A = { -1 , 0 , 1 , 2 , 3} وB = {0,2,4,6,} أوجد A ∩ B

الحل

$(A \cap B) = \{0 , 2\}$

المكملة أو المتممة :-

يقال أن $\overline{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A .

مثال

إذا كان U = { 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} و A={2,4,6,8,10} أوجد

الحل

$\overline{A} = \{1,3,5,7,9\}$

الفرق :-

إذ كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة Aوليست في B .

مثال :-

إذا كانت A={1,2,3,x,y} و B={3,4,5,x,w} أوجد A-B

الحل

A-B = { 1 , 2 , y }

مثال :-

إذا كانت

A={1,2,3,x,y} و

B={3,4,5,x,w}

و المجموعة الكلية

U = { 1,2,3,4,5,w,x,y,z}

فأوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

1- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, x, y, w\}$
2- $A \cap B = \{3, X\}$
3- $B - A = \{4, 5, w\}$
4- $\overline{A} = \{4, 5, w, z\}$
5- $\overline{B} = \{1, 2, y, z\}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B} = \{1, 2, 4, 5, y, w, z\}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B} = \{z\}$
8- $\overline{A} \cup A = U$
9- $\overline{A} \cap A = \{ \}$

الضرب الديكارتي :

يعرف الضرب الديكارتي للمجموعتين A ، B $(A\times B)$ بأنه مجموعة كل الأزواج المرتبة (x , y) التي ينتمي مسقطها الأول (x) إلى المجموعة الأولى A ، بينما ينتمي مسقطها الثاني (y) إلى المجموعة الثانية B .

مثال :-

إذا كانت $A=\{-2,1\}$ و $B=\{-3,1,4\}$

فأوجد $A\times B$ و $B\times A$

الحل

$$A\times B=\{(-2,-3),(-2,1),(-2,4),(1,-3),(1,1),(1,4)\}$$

$$B\times A=\{(-3,-2),(-3,1),(1,-2),(1,1),(4,-2),(4,1)\}$$

مثال :-

أنشئ $A\times B$ و $B\times A$، علماً بأن :-

$A=\{1,2\}$ و $B=\{w,x,y\}$

الحل

$$A\times B=\{(1,w),(1,x),(1,y),(2,w),(2,x),(2,y)\}$$

$$B\times A=\{(w,1),(w,2),(x,1),(x,2),(y,1),(y,2)\}$$

تابع الضرب الديكارتي :-

يتساوى الزوجان المرتبان (x_1,y_1) و (x_2,y_2) إذا وفقط إذا تساوت مساقطهما المتناظرة ، أي إذا كان المسقط الأول في الزوج الأول يساوي المسقط الأول في الزوج الثاني ، $(x_1=x_2)$ وكان المسقط الثاني في الزوج الاول يساوي المسقط الثاني في الزوج الثاني ، $(y_1=y_2)$

مثال :-

أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة $(x+1 , y-\frac{1}{2})=(4,\frac{3}{2})$

الحل

$X+1=4$ >>>>>>>> $x=4-1=3$

$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ >>>>>>>> $y=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2$

مجموعة المجموعات :-

مجموعة المجموعات لأية مجموعة S هي المجموعة المكونة من كل المجموعات الجزئية للمجموعة S ومن بينها المجموعة الخالية Ø و المجموعة S نفسها ويرمز لها بالرمز P(S) .

مثال :

أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S=\{a,b,c\}$

الحل

$$P(s)=\{\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\},\emptyset\}$$

ملاحظة : إذا احتوت المجموعة S على n من العناصر ، فان عدد عناصر P(S) يساوي 2^n .

تمرين : أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة S = { a, b , c }

P(S) = { {a} , {b} , {c} , {a,b} , {a,c} ,{b,c} ,{a,b,c} , Ø }
$2^3 = 8$

تمارين :-

١- وضح أي من هذه المجموعات هي مجموعة خالية أو مجموعة منتهية أو مجموعة غير منتهية :-

(a) A ={x: عددx سالب و موجب }
(b) B = {3 ,6 ,9 ,12 }
(c) C = {x: x دولة أوربية تقع في شبة الجزيرة العربية }
(d) D = { 2 , 4 , 6 , ...,100}
(e) E = { 100 , 200 , 300 ,.......}
(f) F = { w , e , r , t }

٢- إذا كانت A = {3 , 5 , 7 } و B = { 1,2,3,4,5,6,7,8} فهل يمكن القول أن A ⊂ B ؟

٣- أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية ؟

1- A = {5 ,10 ,15 ,20 } , B = {15 ,10 ,5 , 20 }
2- A= { 20 ,50 ,70 } , B = { k , d , u }

٤- إذا كانت

و $A=\{8,10,12,r,m\}$

$B=\{4,6,10,o,r\}$

المجموعة الكلية

$U = \{4,6,8,10,12,o,r,m,p\}$

ثم أوجد :-

1- $A \cup B$
2- $A \cap B$
3- $B - A$
4- $\overline{A}$
5- $\overline{B}$
6- $\overline{A} \cup \overline{B}$
7- $\overline{A} \cap \overline{B}$
8- $\overline{A} \cup A$
9- $\overline{A} \cap A$

٥- إذا كانت $A=\{-5,7\}$ و $B =\{-6,4,9\}$
فأوجد $A \times B$ و $B \times A$ ؟

٦- أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة
$(x+1 , y - 10) = (2x , 15)$ ؟

٧- أنشئ مجموعة المجموعات للمجموعة $S = \{2 , 5 , 8\}$ ؟

٨- إذا احتوت المجموعة S على ٥ من العناصر ، فأوجد عدد عناصر
$P(S)$ ؟

المحاضرة (٢)

الدوال

الدالة :-

يعتبر مفهوم الدالة واحد من أهم المفاهيم في الرياضيات ،وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما (تعتمد على) أو (تتوقف على) أو تتعين بواسطة) كمية أخرى .

ملاحظة :-

إذا كانت f دالة من A إلى B فإن A تسمى مجال الدالة و تسمى B بالمجال المقابل لها كما تسمى مجموعة الصور بالمدى .

حتى تكون f دالة لابد وأن يكون لكل عنصر من المجال له صورة واحد فقط في المجال المقابل والمدى هو مجموعة الصور .

مثال :

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ وكانت

$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ و

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ و

$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ هل

$f_1=\{(1,4),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من Aإلى B؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل

$f_2=\{(1,4),(2,8)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

إذا $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,8,12\}$ فهل

$f_3=\{(1,4),(1,8),(2,4),(3,12)\}$ تمثل دالة من A إلى B ؟

مثال :-

إذا كان $A=\{1,2\}$ ، $B=\{3,4,5,6\}$ ، $f=\{(1,3),(2,6)\}$

مثل f بالمخطط السهمي لمعرفة ما إذا كانت تمثل دالة أم لا ،ثم أوجد مداها

تمرين :

أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- $R=\{(1,1),(2,2),(4,4),(9,9)\}$

2- $R=\{(3,0),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4)\}$

3- $R=\{(-4,0),(-4,4),(2,3),(1,9)\}$

4- $R=\{(-3,1),(-1,1),(0,1),(4,1)\}$

5- $R=\{0,7),(1,5),(1,2),(3,-4)\}$

6- $R=\{(-1,2),(2,2),(3,5),(6,1)\}$

1- R ={(1,1) ,(2,2) ,(4,4) ,(9,9)}

2- R ={(3,0) ,(3,1) ,(3,2) ,(3,3) ,(3,4) }

3- R ={(-4,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

4- R ={(-3,1) ,(-1,1) ,(0,1) ,(4,1)}

5- R ={0,7) ,(1,5) ,(1,2) ,(3,-4)}

6- R ={(-1,2) ,(2,2) ,(3,5) ,(6,1)}

إيجاد قيمة الدالة :

مثال :
إذا كان $f(x) = x^2 + 4x - 3$ فأوجد :-

1- f(2)

2- f(-1)

3- f(a)

4- f(x+1)

مثال :
إذا كان $f(x)=3x^2-7x+2$ فأوجد :-

1- f(-3)

2- f(1/2)

3- f(a)

تمارين :-

١- للدالة $f(x)=2x^2-x-5$ أحسب $f(t)$ و $f(-5)$.

٢- للدالة $f(x)=3x^2-2$ أحسب $f(2)+f(-1)+f(3)$.

٣- للدالة $f(x)=x+4$ أحسب $2f(4)+3f(-1)$.

٤- للدالة $f(x)=x^2-1$ أحسب $f(3)-f(-2)$.

الدوال الحقيقية :-

- **دالة كثيرة الحدود :** هي الدالة التي على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a$$

حيث أن a تشير إلى الاعداد الحقيقية و تسمى معاملات كثيرة الحدود و n عدد طبيعي و تكون درجة كثيرة الحدود بقيمة أعلى أس لـ(x).

$f(x) = 3x^3 + 5x^2 + 6x + 12$

$f(x) = 9x^4 + 4x^3 - 3x^2 + 6x + 12$

مثال :

ما هي درجة كل من الدوال كثيرة الحدود التالية :-

1- $f(x) = 5$ (الدرجة الصفرية تسمى بالدالة الثابتة)

2- $f(x) = 4x + 7$ (الدرجة الأولى و تسمى بالدالة الخطية)

3- $f(x) = 8x^2 + 5x + 7$ (الدرجة الثانية و تسمى الدالة التربيعية)

4- $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 1$ (الدرجة الثالثة و تسمى بالدالة التكعيبية)

5- $f(x) = 7x^4 + 3x^3 - 7x^2 + 9x - 2$ (الدرجة الرابعة)

العمليات على الدوال :

يتم إجراء العمليات على الدوال بهدف الحصول على دالة من دالة أو أكثر من دالة،وتشمل هذه العمليات ، العمليات الثنائية من جمع و طرح و ضرب و قسمة وتركيب و عملية أحادية واحدة هي المعكوس .

لتكن f و g دالتين فإن :-

1- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

2- $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

3- $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

مثال : إذا كانت $\underline{f(x)=3x+5}$ و $\underline{g(x)=x^2+1}$

فأوجد:

1- $(f + g)(x)$

$= f(x) + f(g)$

$= 3x+5 + x^2+1$

$= x^2+3x+6$

مثال :إذا كانت $\underline{f(x)=3x+5}$ و $\underline{g(x)=x^2+1}$

فأوجد:

2-$(f - g)(x) =$

$= f(x) - g(x)$

$= (3x+5) - (x^2+1)$

$= 3x+5 - x^2 - 1$

$= -x^2 + 3x + 4$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$
فأوجد:

$$3-\ (f \times g)(x) =$$
$$= f(x) \times g(x)$$
$$= (3x+5) \times (x^2+1)$$
$$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$$
$$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$$

مثال :إذا كانت $f(x)=3x+5$ و $g(x)=x^2+1$
فأوجد:

$$4-\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$$

معادلة الخط المستقيم :-

ايجاد ميل الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(x_1 , y_1)$ و $B(x_1 , y_1)$
ويعرف على أنه النسبة بين التغير في قيم y و التغير في قيم x و
نرمز له بالرمز m و هو يساوي :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حيث أن $x_1 \neq x_2$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(1,-3)$ و $B(3,7)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7--3}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(3,2)$ و $B(5,2)$.

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-2}{5-3} = \frac{0}{2} = 0$$

إذا كان الميل يساوي صفر فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور السينات .

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين A(2,3) و B(2,6) .

الحل

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-3}{2-2} = \frac{3}{0} = \infty$$

اذا كان الميل يساوي ∞ فإن ذلك يعني أن المستقيم يوازي محور الصادات .

تابع معادلة الخط المستقيم :-

ميل الخط المستقيم الذي معادلته على الصورة العامة

$$ax + by + c = 0$$

حيث أن a و b و c هي ثوابت و a و b لا يساويان الصفر هو :-

$$m = \frac{-a}{b}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$2x + 4y - 8 = 0$$

الحل

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

مثال :-

أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$5x = -4y + 10$$

الحل

$$5x + 4y - 10 = 0$$

$$m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{4}$$

المستقيمات المتوازية :-

يقال أن المستقيمات متوازية إذا كانت $m_1 = m_2$

مثال :

هل المستقيمان $4x - y - 2 = 0$ و $y = 4x + 1$ متوازيان ؟

الحل

$$4x - y - 2 = 0 \quad , \quad 4x - y + 1 = 0$$

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{-4}{-1} = 4$$

$m_1 = m_2$ اذا المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة :-

يقال أن المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال : هل المستقيمان $y - 3x - 2 = 0$ ، $3y + x - 15 = 0$ متعامدان ؟

الحل

$$m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{-(-3)}{1} = 3$$

$$m_2 = \frac{-a}{b} = \frac{1}{3}$$

$$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{1}{3} = -1$$

اذا المستقيمان متعامدان

تابع معادلة الخط المستقيم :-

تحديد معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميل و نقطة :

معادلة الخط المستقيم الذي ميلة m و يمر بالنقطة $A(x_1,y_1)$ هي :-

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

مثال :-

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (5,-3) و ميله يساوي -2 .

الحل

$m = -2$, $x_1 = 5$, $y_1 = -3$

$y - (-3) = -2(x-5)$

$Y + 3 = -2(x-5)$

$y = -2x + 7$

تمارين واجب :-

١- إذا $A=\{2,3,4,5,6\}$ و $B=\{5,9,13\}$ وكانت

$f_1 = \{(5,2),(9,3),(13,4)\}$

و $f_2 = \{(5,2),(9,3),(13,6)\}$

و $f_3 = \{(5,6),(9,2),(13,4),(9,6)\}$

فهل f_1 f_2 f_3 دوال من B إلى A ؟

٢- أي من العلاقات التالية تمثل دالة :

1- R ={(1,4) ,(2,4) ,(3,3) ,(4,5)}

2- R ={(2,4) ,(3,1) ,(3,2) ,(4,1) ,(5,2) }

3- R ={(-1,0) ,(-4,4) ,(2,3) ,(1,9) }

٣- للدالة $f(x)= 2x^3 + 10\,x^2 -15$ أحسب $f(1)+f(3)$

٤-إذا كانت $\underline{f(x)=6x+3}$ و $\underline{g(x)=10}$ فأوجد:

$$(f+g)(x)\ ,\ (f-g)(x)\ ,\ (f\times g)(x)\ ,\ (\frac{f}{g})(x)$$

٥- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(6,\frac{-3}{4})$ و $B(4,\frac{8}{5})$.

٦- أوجد ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $A(\frac{3}{2},\frac{9}{2})$ و $B(7,\frac{-5}{8})$.

٧- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$-5x + 3y - 8 = 0$$

٨- أوجد ميل الخط المستقيم الذي معادلته :-

$$12\,x = -9y + 30$$

٩- هل المستقيمان $8x - 2y -4 = 0$ و $4y= 16x +4$ متوازيان ؟

١٠- هل المستقيمان $3y -12x -6 = 0$ ، $8y + 2x -30 =0$ متعامدان ؟

١١- أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (9,-2) و ميله يساوي 5- ؟

المحاضرة (٣)

النهايات و الاتصال

النهايات :

مفهوم النهاية :-

يقصد بنهاية الدلة إيجاد قيمة الدالة عندما تقترب قيمة المتغير المستقل من قيمة معينة ، وعادة تكتب النهايات على الصيغة $\lim_{x\to a} f(x)$ وتقرأ نهاية الدالة f(x) عندما تقترب x من القيمة a.

مثال :-

إذا كانت $f(x) = 2x + 1$ فإن $\lim_{x\to 2} f(x)$ يعني إيجاد قيمة الدالة f(x) عندما تؤول إلى 2 وتكون قيمة النهاية في هذه الحالة تساوي 5 .

جبر النهايات :

١- إذا كانت $f(x)=c$ (دالة ثابتة) حيث c عدد حقيقي فإن $\lim_{x\to a} f(x) = c$ لكل عدد حقيقي a .

٢- إذا كانت $f(x) = mx + c$ فإن $\lim_{x\to a} f(x) = ma + c$ لكل عدد حقيقي a .

مثال :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$\lim_{x\to 5} 30$$
$$\lim_{x\to 2}(1 - 2x)$$
$$\lim_{x\to 2}(3x + 4)$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5)$$

الحل

$$\lim_{x\to 5} 30 = 30$$
$$\lim_{x\to 2}(1 - 2x) = 1 - (2 \times -2) = 5$$
$$\lim_{x\to 2}(3x + 4) = 3 \times 2 + 4 = 6 + 4 = 10$$
$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}(8x - 5) = 8 \times 1/2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$1\text{- } \lim_{x\to 5}[h(x) - f(x)]$$
$$= \lim_{x\to 2} h(x) - \lim_{x\to 2} f(x)$$
$$= 10.5 - 5 = 5.5$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to 2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to 2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي :-

$$2\text{- } \lim_{x\to 5}[g(x) \times h(x)]$$
$$= \lim_{x\to 2} g(x) \times \lim_{x\to 2} h(x)$$
$$= -8 \times 10.5 = -84$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي -:

$$3\text{-} \lim_{x\to2} 8\,f(x)$$

$$= 8 \times \lim_{x\to2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

مثال :

إذا كانت $\lim_{x\to2} f(x) = 5$ و $\lim_{x\to2} g(x) = -8$ و $\lim_{x\to2} h(x) = 10.5$ ، فأوجد ما يلي -:

$$4\text{-} \lim_{x\to2} \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to2} f(x)}{\lim_{x\to2} g(x)} = \frac{5}{-8} = -\frac{5}{8}$$

نظرية :

إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة و n عدداً صحيحاً موجباً فإن -:

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$$

مثال :

$$\lim_{x\to1}[3x-1]^6 = [\lim_{x\to1} 3x-1]^6$$

$$= [3\times1-1]^6 = [3-1]^6 = [2]^6 = 64$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية -:

$$1\text{-} \lim_{x\to2}(3x^3 + 5x^2 - 7)$$

$$= 3 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7$$

$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7 = 37$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية -:

$$2\text{-} \lim_{x\to3} \frac{3x^2+7}{x-5}$$

$$= \frac{3 \times 3^2 + 7}{3-5} = \frac{3 \times 9 + 7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية -:

$$3\text{-} \lim_{x\to2} \frac{2x-1}{5x+3}$$

$$= \frac{2\times2-1}{5\times2+3} = \frac{4-1}{10+3} = \frac{3}{13}$$

$$4\text{-} \lim_{x\to2} e^x$$

$$= e^2$$

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية -:

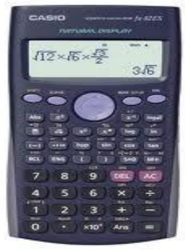
$$5\text{-} \lim_{x\to1} e^{x^2+2x+1}$$

$$= e^{1^2+2\times1+1} = e^{1+2+1} = e^4$$

$$6\text{-} \lim_{x\to2} log(3x^2+5) = \log(3\times2^2+5)$$

$$= \log(3\times4+5)$$

$$= \log(12+5) = \log(17)$$



أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

7- $\lim_{x\to 3} ln(2x-5)$ = ln (2×3-5) = ln (6-5) = ln (1) =0

أمثلة :

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

8- $\lim_{x\to 1}\left(3x^3+4x-2\right)^3$ = ((3×1³) + 4 × 1 -2)³

= (3+4-2)³ = (5)³ = 125

9- $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x^2+5}$ = $\sqrt[3]{2^2+5}$ = $\sqrt[3]{4+5}$ = $\sqrt[3]{9}$ =
2.08

إذا كانت الدالة معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :-

$$f(x)=\begin{cases}9x^2 & , \quad x<5\\ 15x-2 & , \quad x>5\end{cases}$$

وهنا المطلوب هو إيجاد نهاية الدالة و هي معرفة على فترتين فلابد من تحديد ما هو الرقم الذي تؤول له الدالة فإذا كان معرف على مجال الدالة الاولي (x تؤول إلى ٣ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الاولى أما إذا كانت معرفة على مجال الدالة الثانية (x تؤول إلى ٧ مثلاً) فيتم التعويض في الدالة الثانية .

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \quad x<1\\ 7x-2 & , \quad x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x\to 3} f(x)$ (و ٣ تقع في مجال الدالة الثانية)

= 7x -2 = 7 × 3 -2 = 19

مثال :

إذا كانت

$$f(x)=\begin{cases}3x^2+5 & , \ x<1\\ 7x-2 & , \ x>1\end{cases}$$

فأوجد :-

2- $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$ (و نصف تقع في مجال الدالة الاولى)

= 3x² + 5 = 3 × ($\frac{1}{2}$)²+ 5 = 3× $\frac{1}{4}$ + 5 = $\frac{3}{4}$ + 5 = $\frac{3}{4}$ +$\frac{20}{4}$ = $\frac{23}{4}$

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

فأوجد :-

3- $\lim_{x \to 1} f(x)$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & , \quad x < 1 \\ 7x - 2 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

3- $\lim_{x \to 1} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x \to 1^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 7x - 2 = 7 \times 1 - 2 = 5$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 3x^2 + 5 = 3 \times (1)^2 + 5 = 3+5 = 8$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار **لا**

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$\lim_{x \to 1} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

مثال :

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

فأوجد :-

$\lim_{x \to 5} f(x)$

الحل

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 + 15 & , \quad x < 5 \\ 6x - 10 & , \quad x > 5 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 5} f(x)$

(وهو الحد الفاصل بين المجالين الأول و الثاني ولذلك نحسب النهاية من اليمين $\lim_{x \to 5^+} f(x)$ و النهاية من اليسار $\lim_{x \to 5^-} f(x)$ ومن ثم يتم التعويض في المجالين)

$\lim_{x \to 5^+} f(x)$ (النهاية من اليمين)

$= 6x - 10 = 6 \times 5 - 10 = 20$

$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$ (النهاية من اليسار)

$= 20 \times (5)^2 + 15 = 20 \times 25 + 15 = 500 + 15 = 515$

هل النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار **لا**

إذا هذه الدالة غير موجودة وتكتب

$$\lim_{x \to 5^+} f(x) \neq \lim_{x \to 5^-} f(x)$$

$\lim_{x \to 5} f(x)$ هذه النهاية غير موجودة

الاتصال :-

تعريف :

يقال للدالة $f(x)$ متصلة في النقطة a إذا تحققت الشروط التالية :-

١- لابد و أن تكون الدالة معرفة عند هذه النقطة أي تنتمي إلى R.

٢- لا بد وأن تكون النهاية موجودة أي النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار .

٣- لابد و أن تكون نتيجة الشرط الاول مساوي للشرط الثاني أي قيمة الدالة وقيمة النهاية متساويتان .

لا تنسى : الدالة نفسها – النهاية من اليمين – النهاية من اليسار

المحاضرة (٤)

الجزء الاول : تابع الاتصال
الجزء الثاني : التفاضل وتطبيقاته التجارية

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 6x & , \quad 0 < x < 5 \\ 25 + 2x & , \quad x \geq 5 \end{cases}$$

متصلة في $x = 5$ ؟

الحل

$f(5) = 25+2x = 25 + 2\times 5 = 25 + 10 = 35$

$\lim_{x\to 5^+} f(x) = 25+2x = 25 + 2\times 5 = 25 + 10 = 35$

$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 6x = 6\times 5 = 30$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=5 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 12x^2 & , \quad 0 < x < 10 \\ 20 + 4x & , \quad x \geq 10 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

الحل

$f(10) = 20+4x = 20 + 4\times 10 = 20 + 40 = 60$

$\lim_{x\to 10^+} f(x) = 20+4x = 20 + 4\times 10 = 20 + 40 = 60$

$\lim_{x\to 10^-} f(x) = 12x^2 = 12\times 10^2 = 1200$

حيث أن النتائج غير متساوية إذاً فهذه الدالة غير متصلة عند x=10 .

مثال :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 20x^2 & , \quad x \leq 8 \\ 1160 + 15x & , \quad x > 8 \end{cases}$$

متصلة في $x = 8$ ؟

الحل

$f(8) = 20x^2 = 20\times (8)^2 = 20\times 64 = 1280$

$\lim_{x\to 8^+} f(x) = 1160 + 15x = 1160 + 15\times 8 = 1280$

$\lim_{x\to 8^-} f(x) = 20x^2 = 20\times (8)^2 = 20\times 64 = 1280$

حيث أن النتائج متساوية إذاً فهذه الدالة متصلة عند x=8 .

تمارين الواجب :-

تمرين ١ :-

أوجد قيمة كل مما يأتي :-

$\lim_{x\to 0} 5$

$\lim_{x\to 5}(10-2x+x^2)$

$\lim_{x\to 12}(3x+6)$

$\lim_{x\to \frac{2}{3}}(9x-2)$

تمرين ٢ :-

إذا كانت $\lim_{x\to 5} f(x) = 20$ و $\lim_{x\to 5} g(x) = -15$ و $\lim_{x\to 5} h(x) = 18.5$ ، فأوجد ما يلي :-

1- $\lim_{x\to 5}[h(x)+f(x)]$

2- $\lim_{x\to 5}[h(x)-g(x)]$

3- $\lim_{x\to 5}[g(x)\times f(x)]$

4- $\lim_{x\to 5}[\frac{g(x)}{f(x)}]$

تمرين ٣ :-

أوجد :-

1- $\lim_{x\to 1}[5x-2]^2$

2- $\lim_{x\to 2}[10-2x]^2$

تمرين ٤ :-

أوجد نهاية كل من الدوال التالية :-

1- $\lim_{x\to 5}(2x^3-2x^2-50)$

2- $\lim_{x\to 0}(1-e^x)$

3- $\lim_{x\to 1} log(10x^4+15)$

4- $\lim_{x\to 2} e^{2x^2+3x+2}$

5- $\lim_{x\to 3} ln(20x^2-5x+10)$

تمرين ٥ :-

إذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 30x^2 + 15 & , \quad x < 2 \\ 5x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

فأوجد :-

1- $\lim_{x \to 3} f(x)$

2- $\lim_{x \to 1} f(x)$

تمرين ٦ :-

هل الدالة المعرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 3 + x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

متصلة في $x = 10$ ؟

التفاضل وتطبيقاته التجارية

مقدمة :-

- يهتم حساب التفاضل بالتحليل الرياضي لمعدل التغير .
- يهتم حساب التفاضل بحساب معدل التغير في متغير ما بالنسبة لمتغير آخر.
- معدل التغير :بين أي ظاهرتين (متغيرين) مثلا:

إذا كان الربح مثلا يتغير بتغير كمية الإنتاج و الطلب على سلعة ما يمكن أن يتغير بتغير السعر فقد يكون من المهم أن يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الإنتاج أو معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر .

قواعد التفاضل

يطلق على عملية التفاضل في بعض الاحيان إيجاد المشتقة الاولى للدالة أو المعامل التفاضلي الاول .

ودائماً يكون لدينا علاقة بين متغيرين أحدهما متغير تابع و هو y و الاخر متغير مستقل و هو x و يكون المطلوب هو حساب مقدار التغير في المتغير التابع إذا تغير المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة .

المعطى :- دالة أو معادلة $y= 5x + 9$

المطلوب :-المشتقة الاولى للدالة $\frac{dy}{dx} =????$

القاعدة الاولى تفاضل المقدار الثابت :-

تفاضل القيمة الثابتة تساوي دائماً صفر فمثلاً إذا كنت الدالة على الشكل :-

$y = 15$

فإن المتغير التابع y يأخذ قيمة ثابتة دائماً مهما تغير المتغير المستقل x و على ذلك فإن تغير المتغير التابع y لن يوثر على المتغير المستقل x ومن ثم يمكن صياغة هذه النتيجة رياضياً كما يلي :-

$\frac{dy}{dx} = 0$

القاعدة الثانية : تفاضل x^n

تفاضل المتغير x المرفوعة إلى أس :-

يتم تنزيل الاس و الطرح منه واحد فعلى سبيل المثال :-

1- $y = x^5$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2- $y = 15x^4$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 60x^3$

3- $y = 10x$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 10$

القاعدة الثالثة : الدوال كثيرات الحدود :-

وهنا يتم التعامل مع كل حد على حدة باستخدام نفس القاعدة السابقة

مثال :-

إذا كانت :-

1- $y = 5x^4 + 6x^3 + 8x^2 + 3x$

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 + 18x^2 + 16x + 3$$

2- $y = 20x^5 + 10x^3 - 5x^2 + 15x + 30$

$$\frac{dy}{dx} = 100x^4 + 30x^2 - 10x + 15$$

القاعدة الرابعة : مشتقة حاصل ضرب دالتين :-

مشتقة حاصل ضرب دالتين =

الدالة الاولى كما هي × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية كما هي × مشتقة الدالة الأولي

مثال :-

1- $y = (3x + 1)(x^2 - 7x)$

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)(2x - 7) + (x2 - 7x)(3)$$

2- $y = (10x^3 - 12)(5x^2 + 2x)$

$$\frac{dy}{dx} = (10x^3 - 12)(10x + 2) + (30x^2)(5x^2 + 2x)$$

القاعدة الخامسة : مشتقة حاصل قسمة دالتين :-

مشتقة حاصل قسمة دالتين $\frac{\text{البسط}}{\text{المقام}}$ =

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

مثال :-

$$y = \frac{4x+2}{3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x)(4) - (x+2)(3)}{(3x)^2} = \frac{12x - 3x - 6}{9x^2} = \frac{9x - 6}{9x^2}$$

القاعدة السادسة : مشتقة القوس المرفوع لأس :-

مشتقة القوس المرفوع لأس = تفاضل القوس × تفاضل ما بداخله

مثال :-

$1 - y = (15x2 + 20)^3$

$$\frac{dy}{dx} = 3(15x^2 + 20)^2(30x)$$

$2 - y = (10x^3 - 12x^2 + 5)^5$

$$\frac{dy}{dx} = 5(10x^3 - 12x^2 + 5)^4(30x^2 - 24x)$$

القاعدة السابعة : المشتقات العليا للدالة

مثال :-

أوجد المشتقة الثالثة للدالة التالية :-

$$y = 15x^4 + 12x^3 + 20x^2 - 5x + 12$$

$$\frac{dy}{dx} = 60x^3 + 36x^2 + 40x - 5$$ (المشتقة الاولى)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 180x^2 + 72x + 40$$ (المشتقة الثانية)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 360x + 72$$ (المشتقة الثالثة)

تابع التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

١- المرونة

تعرف مرونة الطلب السعرية : على أنها مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في سعرها .

أما مرونة الطلب الدخلية فتعرف على أنها : مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة أو خدمة للتغيرات في الدخل .

حالات المرونة السعرية (م) :

القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة > ١ (طلب قليل المرونة أو غير مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ١ (طلب متكافئ المرونة)

القيمة المطلقة للمرونة < ١ (طلب مرن)

القيمة المطلقة للمرونة = ما لانهاية (طلب لانهائي المرونة)

قياس مرونة الطلب

مرونة الطلب باستخدام التفاضل :

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

لاحظ أن :-

المشتقة الأولى لدالة الطلب = معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر

مثال (١):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي $(D = 80 - 6x)$ أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب $(D' = -6)$

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م $= (-6) \times \frac{10}{100} = -0.6$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أقل من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة قليل المرونة أو غير مرن .

مثال (٢):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي ($D= 200 – 10\,x$) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ٢٠٠وحدة عند سعر يساوي ٢٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}= -10$)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(-10) \times \frac{20}{200} = -1$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة يساوي الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة متكافئ المرونة .

مثال (٣):-

إذا كانت دالة الطلب على سلعة ما هي ($D= 15x-20$) أوجد معامل المرونة إذ كانت الكمية المطلوبة هي ١٠٠٠وحدة عند سعر يساوي ١٠٠ ريال ؟

الحل

أولاً نوجد المشتقة الاولى لدالة الطلب ($D^{/}= 15$)

ثانياً التعويض في القانون :-

م = المشتقة الاولى لدالة الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية المطلوبة}}$

م = $(15) \times \frac{100}{1000} = 1.5$

حيث أن القيمة المطلقة (أي الناتج بصرف النظر عن الاشارة) لمعامل المرونة أكبر من الواحد الصحيح إذا فالطلب في هذه الحالة مرن .

تمرين واجب :-

إذا كانت دالة الطلب هي ($D = 1.5x +20$) أحسب مرونة الطلب إذا علمت الكمية المطلوبه هي ٦٠٠ وحدة عند سعر ٢٠٠ ريال ؟

المحاضرة (٥)

تابع التفاضل
وتطبيقاته التجارية

التطبيقات الاقتصادية والإدارية للتفاضل :-

٢- الاستهلاك والادخار

١- الميل الحدي للاستهلاك = المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك K حيث الاستهلاك دالة في الدخل .
قيمة الميل الحدي للاستهلاك تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب)

٢- الميل الحدي للادخار= المشتقة الأولى لدالة الادخار S حيث الادخار دالة في الدخل
قيمة الميل الحدي للادخار تكون موجبة ولكنها أقل من الواحد الصحيح (أي كسر موجب) كذلك .

الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار = ١

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 15+0.6x - 0.02x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = 0.6 - 0.04\,x$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K' = 0.6 - 0.04 \times 1 = 0.6 - .04 = 0.56$

٣-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

= ١ – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.56 = 0.44

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 18 + 0.8\,x - 0.15x^2$)المطلوب أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

الحل

١- الميل الحدي للاستهلاك هو المشتقة الاولى لدالة الاستهلاك:-

$K' = 0.8 - 0.3\,x$

٢- الميل الحدي للاستهلاك عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

$K' = 0.8 - 0.3 \times 1 = 0.8 - 0.3 = 0.5$

٣-الميل الحدي للادخار عند دخل يساوي ١ ريال هو :-

= ١ – الميل الحدي للاستهلاك = 1- 0.5 = 0.5

٣- النهايات العظمى و الصغرى

خطوات إيجاد النهايات العظمى والصغرى :

١ - يتم إيجاد المشتقة الأولى للدالة .
٢ - يتم إيجاد المشتقة الثانية .
٣ - تحديد نوع النهاية (عظمى – صغرى) .

إذا كانت إشارة المشتقة الثانية سالبة ∴ يعني ذلك وجود نهاية عظمى للدالة والعكس صحيح .

مثال (١) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= - 0.4x^2 + 300x -2000$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

١- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.8x + 300$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = -0.8$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة سالبة إذاً فهي تحقق نهاية عظمي

مثال (٢) :-

إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P= 500-0.2x +0.1x^2$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

الحل

١- المشتقة الاولى للدالة :-

$P^{/} = -0.2 + 0.2x$

٢- المشتقة الثانية للدالة :-

$P^{//} = 0.2$

٣- نجد أن قيمة المشتقة الثانية للدالة موجبة إذاً فهي تحقق نهاية صغرى .

٤- الربح الحدي

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة
٢- الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية
٣- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .
٤- التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .
٥- الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .
٦- الربح الحدي = الايراد الحدي – التكلفة الحدية .

مثال (١) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

$R = 12x^3 + 20x^2 - 10x +30$

أوجد الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$R^{/} = 36x^2 + 40x - 10 = 36\times10^2 + 40\times10 - 10=3990$ ريال

مثال (٢) :-

إذا كانت الدالة المعبرة عن سعر بيع الوحدة في إحدى الشركات تعتمد على العلاقة التالية :-

Selling price(سعر بيع الوحدة) $= 4x^2 + 6x + 5$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × x

$R = (4x^2 + 6x + 5) \times x = 4x^3 + 6x^2 + 5x$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = 12x^2 + 12x + 5$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٥ وحدات إذاً $x=15$

$R^{/} = 12x^2 + 12x + 5 = 12\times15^2 + 12\times15 + 5 = 2885$ ريال

مثال (٣) :-

في إحدي شركات الاستثمار وجد أن سعر بيع الوحدة يتبع العلاقة التالية :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) $= 10x^3 - 11x^2 + 5x - 20$

حيث أن x تشير إلى عدد الوحدات المباعة

المطلوب :-

إيجاد الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١- الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × **x**

$R = (10x^3 - 11x^2 + 5x - 20) \times x = 10x^4 - 11x^3 + 5x^2 - 20x$

٢- الايراد الحدي = المشتقة الاولى لدالة الايراد الكلي .

$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدات إذاً $x=5$

$R^{/} = 40x^3 - 33x^2 + 10x - 20$

$= 40\times5^3 - 33\times5^2 + 10\times5 - 20 = 4205$ ريال

مثال (٤) :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$C = 10x^2 - 12x + 15$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٠وحدات ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = 10x^2 - 12x + 15$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = 20x - 12$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدات إذاً $x=10$

$C^{/} = 20x - 12 = 20 \times 10 - 12 = 188$ ريال

مثال (٥) :-

تعتمد التكاليف الكلية لإحدى الشركات على الدالة التالية :-

$$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$$

المطلوب :-

إيجاد التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠وحدة ؟

الحل

التكلفة الحدية = المشتقة الاولى لدالة التكلفة الكلية .

$C = (5x^2 - 3x + 15)^3$ (التكاليف الكلية)

$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$ (التكاليف الحدية)

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=20$

$$C^{/} = 3\times(5x^2 - 3x + 15)^2\times(10x - 3)$$
$$= 3\times(5\times20^2 - 3\times20 + 15)^2\times(10\times20 - 3)$$
$$= 3\times(5\times400 - 60 + 15)^2\times(200-3)$$
$$= 3\times(1955)\times(197) = 1155405$$ ريال

مثال (٦) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 2x^3 - 6x^2 + 10x - 15$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 15x^2 + 9x - 17$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$
$$= (2x^3 - 6x^2 + 10x - 15) - (15x^2 + 9x - 17)$$
$$= 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 2x^3 - 21x^2 + x + 2$$
$$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=30$

$P^{/} = 6x^2 - 21x + 1 = 6\times30^2 - 21\times30 + 1 = 4771$ ريال

مثال (٧) :-

إذا علمت أن دالة الايراد الكلي لإحدى الشركات هي :-

$$R = 12x^3 + 5x^2 - 2x + 100$$

ودالة التكاليف الكلية تأخذ الشكل :-

$$C = 10x^2 + 3x + 20$$

المطلوب :-

أوجد حجم الارباح الحدية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة ؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكلفة الكلية

$$P = R - C$$

$$= (12x^3 + 5x^2 - 2x + 100) - (10x^2 + 3x + 20)$$

$$= 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

الربح الحدي = المشتقة الاولى لدالة الربح الكلي .

$$P = 12x^3 + 15x^2 - 5x + 80$$

$$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٥ وحدة إذاً $x=25$

$P^{/} = 36x^2 + 30x - 5 = 36\times25^2 + 30\times25 - 5 = 23245$ ريال

تمرين شامل (١)

تعتمد إحدى الشركات على مجموعة من الدوال لتحديد كل من التكاليف الكلية و الايرادات الكلية و تأخذ هذه الدوال الشكل التالي:-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة .

٣- دالة الربح الكلي .

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .

$$\mathbf{R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15}$$
$$\mathbf{C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20}$$

الحل

١- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$

$$R^{/} = 120x^3 + 24x^2 - 6$$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$R^{/} = 120\times10^3 + 24\times10^2 - 6 = 122394$ ريال

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

٢- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٢ وحدة :-

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$C' = 39x^2 - 10x + 3$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$C' = 39\times12^2 - 10\times12 + 3 = 5499$ ريال

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

٣- دالة الربح الكلي :-

$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$

$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$

$$P = R - C = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$$

$$R = 30x^4 + 12x^2 - 6x + 15$$
$$C = 13x^3 - 5x^2 + 3x - 20$$

الحل

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$P = 30x^4 - 13x^3 + 17x^2 - 9x + 35$

$P' = 120x^3 - 39x^2 + 34x - 9$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٢ وحدة إذاً $x=12$

$P' = 120\times12^3 - 39\times12^2 + 34\times12 - 9 =$

تمرين شامل (٢)

لإعتبارت المنافسة الحادة في الاسواق العربية قامت شركة الفرسان بتحديد الدوال الممثلة لكل من سعر بيع الوحدة و التكاليف الكلية و وجدت انها على الشكل التالي :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 + 25x - 18$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

المطلوب :-

١- دالة الايراد الكلي .
٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات .
٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
٤- دالة الربح الكلي .
٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $3x^2 + 25x - 18$
$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

١- دالة الايراد الكلي :-

الايراد الكلي = عدد الوحدات المباعة × سعر بيع الوحدة

R = (دالة سعر بيع الوحدة) × **x**

$R = (3x^2 + 25x - 18) \times x$

$= 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$
$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ٥ وحدات :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$R' = 9x^2 + 50x - 18$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٥ وحدة إذاً $x=5$

$R' = 9\times5^2 + 50\times5^2 - 18 = 1457$ ريال

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$
$C = 10x^2 + 2x - 5$

الحل

٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$C' = 20x + 2$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ٢٠ وحدة إذاً $x=20$

$C' = 20\times20 + 2 = 402$ ريال

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$
$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

٤- دالة الربح الكلي :-

$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$

$C = 10x^2 + 2x - 5$

$P = R - C = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$$R = 3x^3 + 25x^2 - 18x$$
$$C = 10x^2 + 2x - 5$$

الحل

٤- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

$P = 3x^3 + 15x^2 - 20x + 5$

$P' = 9x^2 + 30x - 20$

حيث أن عدد الوحدات المنتجة والمباعة هو ١٠ وحدة إذاً $x=10$

$P' = 9 \times 10^2 + 30 \times 10 - 20 = 1180$ ريال

تمارين واجب :-

١- إذا كانت دالة الاستهلاك هي ($K = 0.3x - 0.01x^2$)المطلوب
أوجد كل من الميل الحدي للاستهلاك و الميل الحدي للادخار.

٢- إذا كانت دالة الربح الكلي تأخذ الشكل :-

$P = 3x^2 + 5x + 100$

حدد ما إذا كانت هذه الدالة تمثل نهاية عظمي أم صغري ؟

٣- إذا علمت أن :-

Selling price (سعر بيع الوحدة) = $8x^3 + 10x^2 + 5x + 12$

$C = 4x^2 + 3x - 10$

<u>المطلوب :-</u>

١- دالة الايراد الكلي .
٢- حجم الايراد الحدي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .
٣- حجم التكاليف الحدية عند إنتاج وبيع ١٥ وحدة .
٤- دالة الربح الكلي .
٥- حجم الربح الحدي عند إنتاج وبيع ١٢ وحدات .

المحاضرة (٦)

التكامل
وتطبيقاته التجارية

التكامل :-

يعتبر التكامل عملية عكسية للتفاضل ، حيث يتم إيجاد قيمة y إذا علمت $\frac{dy}{dx}$ وللتعبير عن عملية التكامل نستخدم الرمز $\int$ و هو رمز التكامل و على ذلك فإذا كانت هناك دالة على الشكل f(x) و نرغب في إجراء عملية التكامل على هذه الدالة فسوف نكتب

$$\int f(x).dx$$

أي تكامل الدالة بالنسبة للمتغير x

قواعد التكامل :-

١- تكامل x المرفوعة للأس n : أجمع على الاس واحد وأقسم على الاس الجديد .

$$\int x^n \,.dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

$$\int k \,.dx = k\,x + c$$

$$\int \,.dx = x + c$$

مثال :-

1- $\int x^3 \,.dx = \frac{1}{4} x^4 + c$

2- $\int x^5 \,.dx = \frac{1}{6} x^6 + c$

3- $\int 6 \,.dx = 6\,x + c$

4- $\int 3x^4 \,.dx = \frac{3}{5} x^5 + c$

مثال :-

أوجد :-

$$\int x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3x + 8 \,.dx$$

الحل

$$y = \frac{1}{6} x^6 + \frac{4}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

$$y = \frac{1}{6} x^6 + x^4 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 + 8x + c$$

مثال :-

أوجد :-

$$\int 4\,x^3 - 30x^2 + 20x + 3 \,.dx$$

الحل

$$y = \frac{4}{4} x^4 - \frac{30}{3} x^3 + \frac{20}{2} x^2 + 3x + c$$

$$y = x^4 - x^3 + 10x^2 + 3x + c$$

٢- تكامل e^x :-

$$\int e^x .dx = e^x + c$$

٣- تكامل $\frac{1}{x}$:-

$$\int \frac{1}{x} \,.dx = \ln x + c$$

إيجاد قيمة c :-

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int 9\,x^2 - 10x + 15\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (4,1)؟

الحل

$y = \frac{9}{3}\ x^3 - \frac{10}{2}x^2 + 15x + c$

$y = 3\ x^3 - 5x^2 + 15x + c$

حيث أن قيمة x = 4 و قيمة y = 1 فإن :-

$1 = 3\ (4)^3 - 5(4)^2 + 15x4 + c$

$1 = 3×64 - 5 \times 16 + 60 + c$

$1 = 172 + c$

$c = -171$

مثال :-

إذا أعطيت الدالة التالية :-

$$\int \frac{1}{2}\ x^3 - \frac{1}{4}x^2 - 7\ .dx$$

أوجد قيمة c إذا علمت أن المنحنى يمر بالنقطة (2,3)؟

الحل

$y = \frac{1}{3\times4}\ x^4 - \frac{1}{4\times3}x^3 - 7x + c$

$y = \frac{1}{12}\ x^4 - \frac{1}{12}x^3 - 7x + c$

حيث أن قيمة x = 2 و قيمة y = 3 فإن :-

$3\ = \frac{1}{12}\ (2)^4 - \frac{1}{12}(2)^3 - 7x2 + c$

$3 = \frac{16}{12} - \frac{8}{12} - 14 + c$

$C = 16.333$

التطبيقات التجارية للتكامل

١ – الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي .

٢ – التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية .

٣ – الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي .

٤ – الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية .

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل :-

$R/\ = \ 3x^2 + 6x\ - 10$

المطلوب :-

أوجد حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات ؟

الحل

١ - إيجاد دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة الايراد الحدي :-

$R = \frac{3}{3}x^3 + \frac{6}{2}x^2\ - 10x$

$R = x^3 + 3x^2\ - 10x$

٢ - حجم الايراد الكلي عند حجم إنتاج وبيع ٥ وحدات أي أن x=5 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة الايراد الكلي كما يأتي :-

$R =\ x^3 + 3x^2\ - 10x$

الايراد الكلي= $(5)^3 + 3 \times (5)^2\ - 10 \times 5 = 150$ **ريال**

مثال :-

إذا علمت أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل :-

$C' = 12x^3 - 60x^2 + 8x - 40$

المطلوب :-

أوجد حجم التكاليف الحدية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات ؟

الحل

١- إيجاد دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية :-

$C = \frac{12}{4}x^4 - \frac{60}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 - 40x$

$C = 3x^4 - 20x^3 + 4x^2 - 40x$

٢- حجم التكاليف الكلية عند حجم إنتاج وبيع ١٠ وحدات أي أن x=10 يتحدد عن طريق التعويض عن قيمة x في دالة التكاليف الكلية كما يأتي :-

$C = 3 \times (10)^4 - 20 \times (10)^3 + 4 \times (10)^2 - 40 \times (10)$

التكاليف الكلية $C = 30000 - 20000 + 400 - 400 = 10000$ ريال

تمرين شامل (١)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي تأخذ الشكل التالي :-

$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

ودالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$C' = 36x^2 + 40x - 10$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
٢- حجم التكاليف الكلية عند انتاج وبيع ٢٥ وحدة .
٣- دالة الربح الحدي .
٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
٥- حجم الربح الكلي عند انتاج وبيع ١٠ وحدات .

الحل

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-

حيث أن دالة الايراد الحدي هي :

$R' = 8x^3 + 24x^2 - 12x + 20$

فيمكن الوصول إلى دالة الايراد الكلي عن طريق إجراء عملية التكامل لدالة الايراد الحدي كما يلي :-

$R = \frac{8}{4}x^4 + \frac{24}{3}x^3 - \frac{12}{2}x^2 + 20x$

$R = 2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي المتحقق عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يمكن التعويض عن قيمة x=20 كما يلي :-

$R = 2 \times (20)^4 + 8 \times (20)^3 - 6 \times (20)^2 + 20 \times (20)$

$= 320000 + 64000 - 2400 + 400 = 382000$ ريال

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة :-
حيث أن دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل

$$C' = 36x^2 + 40x - 10$$

فيمكن الوصول إلى دالة التكاليف الكلية عن طريق إجراء عملية التكامل على دالة التكاليف الحدية كما يلي :-

$$C = 12x^3 + 20x^2 - 10x$$

وللوصول إلى حجم التكليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٥ وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=25$ كما يلي :-

$$C = 12\times(25)^3 + 20\times(25)^2 - 10\times(25) = 199750$$ ريال

٣- دالة الربح الحدي :-
الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$$P' = R' - C'$$
$$= (8x^3 + 24x^2 - 12x + 20) - (36x^2 + 40x - 10)$$
$$= 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$$P' = 8x^3 - 12x^2 - 52x + 30$$
$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$P = R - C$$
$$= (2x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 20x) - (12x^3 + 20x^2 - 10x)$$
$$= 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-
دالة الربح الكلي هي :-

$$P = 2x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 30x$$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=10$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$$P = 2\times(10)^4 - 4\times(10)^3 - 26\times(10)^2 + 30\times(10)$$
$$= 20000 - 4000 - 2600 + 300 = 13700$$ ريال

تمرين شامل (٢)

مثال :-

إذا علمت أن دالة الايراد الحدي لإحدي الشركات تأخذ الشكل التالي:-

$$R' = (2x+1)(5-3x^2)$$

وكانت دالة التكاليف الحدية تأخذ الشكل التالي :-

$$C' = (3x+1)^2$$

المطلوب :-

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات .
٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة .
٣- دالة الربح الحدي .
٤- دالة الربح الكلي بطريقتين مختلفتين .
٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة .

١- حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات :-

الايراد الكلي = تكامل دالة الايراد الحدي

$$R' = (2x+1)(5+3x^2)$$
$$R' = 10x + 6x^3 + 5 + 3x^2$$
$$R' = 6x^3 + 3x^2 + 10x + 5$$ **(الايراد الحدي)**

وللوصول دالة الايراد الكلي تمثل تكامل دالة الايراد الحدي :-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + \left(\frac{3}{3}\right)x^3 + \left(\frac{10}{2}\right)x^2 + 5x$$
$$R = \left(\frac{6}{4}\right)x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x$$

وللوصول إلى حجم الايراد الكلي عند إنتاج وبيع ١٠ وحدات يتم التعويض عن $x=10$:-

$$R = \left(\frac{6}{4}\right)(10)^4 + (10)^3 + (5)(10)^2 + 5(10) = 16550$$ ريال

٢- حجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة :-
التكاليف الكلية = تكامل دالة التكاليف الحدية

$C' = (3x+1)^2$
$= 9x^2 + 6x + 1$ (التكاليف الحدية)
$C = 3x^3 + 3x^2 + x$ (التكاليف الكلية)

وللوصول لحجم التكاليف الكلية عند إنتاج وبيع ٢٠ وحدة يتم التعويض عن قيمة $x=20$:-

$C = 3(20)^3 + 3(20)^2 + (20) = 25220$ ريال

٣- دالة الربح الحدي :-
الربح الحدي = الايراد الحدي – التكاليف الحدية

$P' = R' - C'$
$= (6x^3 + 3x^2 + 10x + 5) - (9x^2 + 6x + 1)$
$= 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$

٤- دالة الربح الكلي :-

الربح الكلي = تكامل دالة الربح الحدي :-

$P' = 6x^3 - 6x^2 + 4x + 4$
$P = (\frac{6}{4})x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$

حل أخر :-

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P = R - C$
$= ((\frac{6}{4})x^4 + x^3 + 5x^2 + 5x) - (3x^3 + 3x^2 + x)$
$= (\frac{6}{4})x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$

٥- حجم الربح الكلي عند إنتاج وبيع ٣٠ وحدة :-
دالة الربح الكلي هي :-

$P = (\frac{6}{4})x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 4x$

وللوصول إلى حجم الربح الكلي يتم التعويض عن قيمة $x=30$ في المعادلة السابقة كما يأتي :-

$P = (\frac{6}{4}) \times (30)^4 - 2 \times (30)^3 + 2 \times (30)^2 + 4 \times (30)$
$= 1162920$ ريال

تمارين متنوعة :-
١- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٦٠% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟
الحل
١- الميل الحدي للإدخار = 0.60 .
٢- الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.60 = 0.40
٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$k' = 0.40$
$K = 0.40x$

تمارين متنوعة :-
٢- إذا علمت أن شخص يقوم بإدخار ٧٥% من دخله و يستهلك الباقي ،المطلوب استنتاج دالة الاستهلاك ؟
الحل
١- الميل الحدي للإدخار = 0.75 .
٢- الميل الحدي للإستهلاك = 1 - 0.75 = 0.25
٣- الاستهلاك = تكامل دالة الميل الحدي للإستهلاك

$k' = 0.25$
$K = 0.25x$

المحاضرة (٧)

الاحتمالات

نظرية الاحتمالات :-

الاحتمال هو كسر موجب أي تتراوح قيمته بين الصفر والواحد الصحيح .

احتمال تحقيق الحدث A نشير له بالرمز P(A) وحدود هذا الاحتمال هي :-

$$0 \leq A \leq 1$$

$$\text{احتمال تحقق حدث} = \frac{\text{عدد حالات تحقق الحدث } A}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

مثال :-

صندوق به مجموعة من الكرات مقسمة كما يلي :-

٢٠ كرة بيضاء

٣٠ كرة حمراء

٥٠ كرة سوداء

فإذا سحبنا كرة واحدة عشوائياً من الصندوق احسب احتمال أن تكون هذه الكرة :-

1. **حمراء**
2. **بيضاء**
3. **سوداء**
4. **حمراء أو سوداء**
5. **حمراء أو سوداء أو بيضاء**

الحل

١- أحتمال أن تكون حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات حمراء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{30}{100}$

٢- أحتمال أن تكون بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات بيضاء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{20}{100}$

٣- أحتمال أن تكون سوداء = $\frac{\text{عدد الكرات سوداء}}{\text{العدد الكلي}} = \frac{50}{100}$

٤- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء = $\frac{30}{100} + \frac{50}{100} = \frac{80}{100}$

٥- أحتمال أن تكون حمراء أو سوداء أو بيضاء = $\frac{30}{100} + \frac{50}{100} + \frac{20}{100} = \frac{100}{100} = 1$

مثال :-

تقدم إلى إختبار مقرر الاحصاء في الادارة و التحليل الاحصائي ١٠٠٠٠ طالب نجح منهم ٩٠٠٠ طالب في مقرر الاحصاء في الادارة كما نجح ٨٠٠٠ طالب في مقرر التحليل الاحصائي المطلوب :-

1) **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .**
2) **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة .**
3) **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .**
4) **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي .**
5) **حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً .**
6) **حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً .**
7) **حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط .**

الحل

١. **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة** = $\frac{9000}{10000}$ = ٩٠ % .

٢. **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر الاحصاء في الادارة** = $\frac{1000}{10000}$ = ١٠ % .

٣. **حساب احتمال نجاح الطالب في مقرر التحليل الاحصائي** = $\frac{8000}{10000}$ = ٨٠ % .

٤. **حساب احتمال رسوب الطالب في مقرر التحليل الاحصائي** = $\frac{2000}{10000}$ = ٢٠ % .

٥- **حساب احتمال نجاح الطالب في المقررين معاً** = $\frac{9000}{10000} \times \frac{8000}{10000}$ = ٠.٧٢ = ٧٢ %.

٦- **حساب احتمال رسوب الطالب في المقررين معاً** = $\frac{1000}{10000} \times \frac{2000}{10000}$ = ٠.٠٢ = ٢%.

٧- **حساب احتمال نجاح الطالب في احد المقررين فقط** =

$$\frac{9000}{10000} \times \frac{2000}{10000} + \frac{8000}{10000} \times \frac{2000}{10000} =$$

$$= 0.9 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1 = 0.26$$

مثال :-

في دراسة لتخصص مجموعة من الطلاب تبين التالي :-
٦٠ طالب يدرسون محاسبة .
٣٠ طالب يدرسون تسويق .
١٠ طلاب يدرسون مالية .
إذا تم اختيار طالب بطريقة عشوائية أحسب الاحتمالات التالية :-

1) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة .**
2) **إحتمال أن يكون تخصص تسويق .**
3) **إحتمال أن يكون تخصص مالية .**
4) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق .**
5) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية .**

الحل

1) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة =** $\frac{60}{100}$
2) **إحتمال أن يكون تخصص تسويق =** $\frac{30}{100}$
3) **إحتمال أن يكون تخصص مالية =** $\frac{10}{100}$
4) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق =** $\frac{60}{100} + \frac{30}{100} = \frac{90}{100}$
5) **إحتمال أن يكون تخصص محاسبة أو تسويق أو مالية =** $\frac{60}{100} + \frac{30}{100} + \frac{10}{100} = 1$

نظرية :-

إذا كان احتمال تحقق حادث واحد على الأقل من حادثين A أو B هو أن يتحقق أحدهما أو أن يتحقق الاثنين معاً ويسمي الاتحاد و يرمز له بالرمز :-

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

حيث أن :-

P(A) هو إحتمال تحقق الحدث A .
P(B) هو إحتمال تحقق الحدث B .
P(A∩B) : التقاطع و يشير إلى إحتمال تحقق الحدثين معاً (الحدث الأول و الحدث الثاني).
P(A∪B) : الاتحاد ويشير إلى إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل (الحدث الاول أو الثاني)

مثال :-

إذا تقدم لإختبار المحاسبة و الاقتصاد ٥٠ طالب نجح في المحاسبة ٣٠ طالب و نجح في الاقتصاد ٤٠ طالب فإذا علمت أن هناك ٢٥ طالب قد نجحوا في الاثنين معاً فاحسب احتمال النجاح في أحد المقررين على الاقل ؟

الحل :-

١- نرمز إلى إحتمال النجاح في المحاسبة بالرمز $P(A) = \frac{30}{50} = 0.60$

٢- نرمز إلى إحتمال النجاح في الاقتصاد بالرمز $P(B) = \frac{40}{50} = 0.80$

٣- احتمال النجاح في المادتين معاً يشير إلى إحتمال النجاح في المادة الاولى و إحتمال النجاح في المادة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A \cap B) = \frac{25}{50} = 0.50$$

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$ =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.60 + 0.80 - 0.50 = 0.90$$

مثال :-

في دراسة لبيان المستوى الثقافي في المملكة العربية السعودية تم إختيار عينة عشوائية مكونة من ١٠٠ شخص وجد من بينهم ٥٠ شخص يتصفحوا جريدة الرياض و٦٠ شخص يتصفحون جريدة المال و ٣٠ شخص يتصفحون الجريدتين معاًَ، فاحسب احتمال تصفح أحد الجريدتين على الاقل ؟

الحل

١- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة الرياض بالرمز $P(A) = \frac{50}{100} = 0.50$

٢- نرمز إلى إحتمال تصفح جريدة المال بالرمز $P(B) = \frac{60}{100} = 0.60$

٣- احتمال تصفح الجريدتين معاً يشير إلى تصفح الجريدة الاولى والجريدة الثانية و هو ما يعني التقاطع =

$$P(A \cap B) = \frac{30}{100} = 0.30$$

٤- المطلوب هو إحتمال النجاح في مادة واحدة على الاقل وهو ما يعني النجاح في المادة الاولى أو النجاح في المادة الثانية و ذلك ما نطلق عليه الاتحاد = $P(A \cup B)$ =

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.50 + 0.60 - 0.30 = 0.80$$

أنواع الاحداث A و B :-

١- أحداث متنافية (متعارضة) : وهي الاحداث التي لا يمكن أن تقع معاً أي أن حدوث أحدهما يمنع حدوث الأخر فعلى سبيل المثال فاحتمال تواجدك في الرياض و في مكة في نفس الوقت هو احتمال مستحيل و في هذه الحالة فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = 0$$

٢- أحداث مستقلة : أي أن حدوث أحدهما لا يؤثر على حدوث الاخر فعلى سبيل المثال شراء جريدة الرياض قد لا يتعارض مع شراء جريدة المال وفي هذه الحالة فإن أحتمال تحقق الحدثين معاً يساوي :-

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

٣- أحداث غير مستقلة : وهي الاحداث التي يؤثر تحقق أحدهما على تحقق الاخر وكمثال على ذلك زيادة عدد ساعات مذاكرة مادة الاحصاء في الادارة يؤثر على تخفيض عدد ساعات مذاكرة مادة المحاسبة و من ثم فإن إحتمال تحقق الحدثين معاً :- $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.3 , P(B)= 0.4 , P(A \cap B)=0.12]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة ؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

1) $P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$
2) $P(A \cap B) = 0.12$
3) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
4) إذا هذه الاحداث مستقلة

مثال :-

إذا كان $[P(A)= 0.5 , P(B)= 0.3 , P(A \cap B)=0.2]$ هل كل من الحدثين A و B مستقلة؟

الحل

إذا كانت هذه الاحداث مستقلة فإن :-

الشرط $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

1) $P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.3 = 0.15$
2) $P(A \cap B) = 0.2$
3) $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$
4) إذا هذه الاحداث غير مستقلة

مثال :-

إذا علمت أن $P(A)=0.2$ و $P(B)=0.4$ و أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية فأحسب كل من الاحتمالات التالية :-

1) $P(A \cap B)$
2) $P(A \cup B)$
3) $P(\bar{A})$
4) $P(\bar{B})$

الحل

١- حيث أن هذه الاحداث هي أحداث متنافية إذاً فإن إحتمال تحققهما معاً يساوي :-

$P(A\cap B) = 0$

٢- و من ثم فإن إحتمال تحقق أحد الحدثين على الاقل أو ما يعرف بالاتحاد يساوي :-

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.2 + 0.4 - 0 = 0.6$

٣- إحتمال $P(\bar{A})$ هو الاحتمال المكمل لإحتمال تحقق الحدث A و حيث أن مجموع الاحتمالات تساوي واحد فإن :-

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$
$$= 1- 0.2 = 0.8$$
$$P(\bar{B}) = 1 - P(B)$$
$$= 1- 0.4 = 0.6$$

الاحتمال الشرطي :-

هو أحتمال تحقق حدث معين وليكن A و لكن بشرط حدوث الحدث B أولاً و نرمز له بالرمز $P(A|B)$ و كمثال على ذلك إذا تم تقدير إحتمال نجاحك في مقرر الاحصاء في الادارة بفرض إحتمال نجاحك في مقرر سابق وليكن مقرر المحاسبة ١ ، ويمكن تقدير الاحتمال الشرطي كما يلي :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

لاحظ الحالات التالية :-

١. في حالة الحوادث المتعارضة أو المتنافية :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{0}{P(B)} = 0$$

١. في حالة الحوادث المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\times P(B)}{P(B)} = P(A)$$

١. في حالة الحوادث غير المستقلة :-

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

مثال :-

إذا كان :-

$P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.5$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A \cup B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2) $P(A) \times P(B) = 0.6 \times 0.8 = 0.48$
3) $P(A \cap B) = 0.5$
4) $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث غير مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9$
2) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.5}{0.8} = 0.625$
3) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.5}{0.6} = 0.833$
4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$
5) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.8 = 0.2$

مثال :-

إذا كان :-

$P(A) = 0.7$, $P(B) = 0.4$, $P(A \cap B) = 0.28$

هل كل من الحدثين A و B أحداث مستقلة وأوجد :-

$P(A \cup B)$, $P(A|B)$, $P(B|A)$, $P(\bar{A})$, $P(\bar{B})$

الحل

لبيان ما إذا كانت هذه الاحداث مستقلة أم لا يمكن إتباع الخطوات التالية :-

1) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
2) $P(A) \times P(B) = 0.7 \times 0.4 = 0.28$
3) $P(A \cap B) = 0.28$
4) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

إذا هذه الاحداث مستقلة

ومن ثم يمكن الوصول إلى مطلوبات السؤال كما يلي :-

1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.7 + 0.4 - 0.28 = 0.82$
2) $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.28}{0.4} = 0.7$
3) $P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.28}{0.7} = 0.4$
4) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.7 = 0.3$
5) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.4 = 0.6$