جامعة الملك فيصل
KING FAISAL UNIVERSITY

ملخص التحليل الإحصائي

شيءٌ آخر

إهداء لدفعة ٢٠١٣م وأسأل الله بأنني قد وفقت في شرح وتلخيص هذا المقرر ، وأن يكون فيه خير ومنفعة للجميع ، مع أمنياتي لكم بتحقيق أفضل الدرجات في هذا المقرر.

للأستاذ : محمد الخنيف

المحاضرة الأولى

المجموعات

تعريف المجموعة:

المجموعة ببساطة هي تجمع من الأشياء أو العناصر المحددة تماماً ، وقد تكون هذه الأشياء أعداداً أو أشخاصاً أو أحداثاً أو أي شيء آخر.

ترمز للمجموعات بواسطة حروف كبيرة مثل:

$$A, B, C, \cdots$$

الأشياء التي تتكون منها المجموعة تسمى عناصر المجموعة و ترمز للعناصر بواسطة حروف صغيرة مثل:

$$a, b, c, \cdots$$

الانتماء :

- يستخدم الرمز ∈ "ينتمي إلى" ليبين عناصر المجموعة ، فمثلاً إذا كان العنصر a من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \in A$
- أما إذا كان a ليس عنصرا من عناصر المجموعة A فإننا نقول أن a لا ينتمي إلى المجموعة A ويكتب بالصورة $a \notin A$

ملاحظة : تعد دراسة المجموعات ذات أهمية كبيرة في دراسة العلاقات والدوال.

أمثلة على المجموعات:

مثال:

A={a, b, c, d}

أي أن المجموعة A تتكون من العناصر a و b و c و d

$b \in A$

أي أن العنصر b ينتمي إلى المجموعة A

$f \notin A$

أي أن العنصر f لا ينتمي إلى المجموعة A

هذا المثال بسيط وواضح متى ما كان أحد العناصر من ضمن المجموعة نستخدم الرمز ∈

ومتى ما كان العنصر ليس من عناصر المجموعة نستخدم الرمز ∉

➢ طرق كتابة المجموعات:

١- طريقة العد (سرد العناصر):

يتم فيها وضع جميع عناصر المجموعة ، أو جزء منها ، بين قوسي المجموعة { } بحيث يفصل بين كل عنصرين بعلامة فاصلة "," مثل:

$$A = \{1,3,5,7\}$$
$$B = \{a, b, c, d\}$$
$$C = \{1,2,3,\cdots\}$$

بحيث لا يتم تكرار العناصر

٢- طريقة القاعدة (الصفة المميزة):

ويتم فيها وصف المجموعة بذكر صفة يمكن بواسطتها تحديد عناصرها ، أي الصفة التي تحدد ارتباط عناصر المجموعة ، فمثلاً :

A={x: عدد طبيعي زوجي x }

B={x:كلية بجامعة الملك فيصل x}

C={x: طالب مسجل بالمقرر الحالي x}

D={x: 0≤x ≤12 ، عدد صحيح x }

يعني هنا أن X عدد أو اسم أو غيره ويكون مشروط بصفه حيث في A تجد أنه مشروط بأن يكون عدد طبيعي زوجي فـ ٢- ليس من ضمنها و ٣ فردي ليس من ضمنها.
في المجموعة D هناك شرطين أو صفتين بأنها أعداد صحيحه وتكون من ضمن صفر إلى ١٢

مثال على طرق كتابة المجموعات:

فمن خلال رمي حجر نرد مرتين نستطيع أن نعبر عن الحادثة (الحصول على مجموع يساوي ٧) من خلال التالي:

- طريقة سرد جميع العناصر وبينها فاصلة كالتالي:

A={(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6

عملية تخمين كم مرة ممكن يظهر لنا مجموع الرقم سبعه عند رمي النرد لو جمعنا كل رقم نجد أنها تساوي ٧

- ويمكن أن نعبر عن الحادثة نفسها بطريقة الصفة المميزة وهي كتابة مميزات العناصر بين القوسين {} عوضا عن كتابة العناصر نفسها كالتالي:

A={ (x,y) : x + y = 7 }

إذا المجموعة بشكل عام يمكن أن تكتب بميزة عناصرها بأشكال مختلفة طالما كانت الميزة كافيه لتحديد العناصر بشكل دقيق.

➢ أنواع المجموعات:

١- المجموعة الخالية:

وهي مجموعة الأعداد الصحيحة التي بين العددين ١،٠ مجموعة خالية ، أيضا مجموعة أسماء الأسماك التي تتحدث اللغة العربية مجموعة خالية بالتأكيد. ويرمز للمجموعة الخالية بالرمز ∅ أو بقوسين { }.

A={x: عدد طبيعي زوجي وفردي x }

B={x: دولة عربية تقع في اوروبا x }

لا يوجد عدد صحيح بين صفر وواحد ولا يوجد أسماك تتكلم ولا يوجد دوله عربية في أوروبا إذا تكتب قوسين فارغه وتسمى المجموعة الخالية.

٢- المجموعة المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

$$A=\{2,4,6,8\}$$
$$B=\{1,2,3,..,100\}$$
$$C=\{x,y,z,w,u\}$$

٣- المجموعة غير المنتهية:

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة.

مثال: المجموعات التالية مجموعات غير منتهية

A={x: عدد طبيعي فردي x }

$B=\{10,20,30,....\}$

حيث أن X عدد طبيعي فردي ولا يوجد لها نهاية وفي المجموعة B نلاحظ بأنها إلى ما لانهاية.

٤- المجموعة الشاملة:

هي المجموعة التي تدرس جميع المجموعات باعتبارها مجموعات جزئية منها ، ويرمز لها بالرمز U .

٥- المجموعة الجزئية:

فنقول عن مجموعة A أنها مجموعة جزئية subset من مجموعة B إذا كان كل عنصر ينتمي إلى A ينتمي إلى B ونعبر عن هذا بكتابة التالي :

- إذا كانت $A\subset B$ وكانت $A\neq B$ قلنا أن A جزئية فعلية proper subset من B أو A محتواه في B أو المجموعة B تحتوي A
- أما إذا كانت A=B فإن كل عنصر ينتمي إلى أحدهما ينتمي للأخرى وبالتالي $A\subset B$ و $B\subset A$

أمثلة:

١- إذا كانت $A=\{2,4,6\}$ و $B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

فإن $A\subset B$

٢- مجموعة جميع طلاب التعليم الالكتروني بجامعة الملك فيصل مجموعة جزئية من مجموعة طلاب هذه الجامعة.

٦- تساوي المجموعات:

تكون المجموعتان B ، A متساويتان إذا كانت

$$A\subseteq B, B\subseteq A \Rightarrow A=B$$

مثال:

$\{-1,+1\}=\{x:x^2=1\}$

{ x حرف من كلمة سلام : x} ≠ {س، ل، م}

أي مربع عدد يساوي واحد حيث ١ في ١ يساوي ١ و -١ في -١ يساوي ١

المجموعة الثانية غير متساوية لأن سلام من أربعة أحرف

أما المجموعتان المتكافئتان فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصورة $A\equiv B$

مثال:

أي المجموعات التالية متكافئة وأيها متساوية؟

1) $A=\{1,3,5,7\}$, $B=\{3,1,5,7\}$

2) $A=\{0,1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$

الحل:

1) $A=B$

2) $A\equiv B$

لاحظ أن في المجموعتين في الرقم واحد العناصر متساوية بينما في المجموعتين في الرقم 2 العناصر مختلفة ولكن عددها واحد اذا متكافئة

العمليات على المجموعات:

١- الاتحاد :

اتحاد المجموعتين A ، B ($A \cup B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A أو في B أو في كليهما.

مثال :

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

لاحظ أننا لا نكرر الأعداد المكررة في كلتا المجموعتين.

٢- التقاطع :

تقاطع المجموعتين A ، B ($A \cap B$) هو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وفي B معاً ، أي العناصر المشتركة بين A و B

مثال على ذلك :

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$A \cap B$ = {-6, -7}

٣- المكملة أو المتممة:

يقال أن $\bar{A}$ مكملة المجموعة A إذا كانت تحتوي على جميع عناصر المجموعة الكلية U باستثناء عناصر A.

أي أن

مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}

A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}

B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}

$\bar{A}$ ={2, 4, 6, 20}

$\bar{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

واضحه المجموعة الكلية هي S وتجدون أن المجموعة A لا يوجد بها بعض الأعداد من المجموعة الكلية نضعها في مجموعه أخرى ونسميها مكملة المجموعة A ونرمز لها بالرمز $\bar{A}$ وكذلك الأمر على المجموعة B

٤- الفرق

إذا كانت مجموعتان A ، B فإن A-B يسمى بالفرق وهو مجموعة كل العناصر الموجودة في A وليست في B.

مثال:

إذا كانت : $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$

فإن : $A - B = \{1,2,y\}$

أي العناصر التي في A وليست في B واضحه ☺

مثال شامل للعمليات على المجموعات :

إذا كانت : $A = \{1,2,3,x,y\}$ و $B = \{3,4,5,x,w\}$

وكانت المجموعة الكلية $U = \{1,2,3,4,5,w,x,y,z\}$

لمعرفة طريقة الحل راجع ما سبق ☺

أوجد :

1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) $A - B$ 4) $\bar{A}$ 5) $\bar{B}$

الحل :

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,x,y,w\}$ $A \cap B = \{3,x\}$ $A - B = \{1,2,y\}$ $\bar{A} = \{4,5,w,z\}$ $\bar{B} = \{1,2,y,z\}$

تدريبات :

١- نفترض أن $A=\{3,4,5,x,y\}$ و $B=\{4,x,y,z\}$ ضع الرمز $\in$ أو $\notin$ في المكان الفارغ لتكون الجملة صحيحة.

$(i)\ 3\in A$
$(ii)\ 3\notin B$
$(iii)\ x\in A$
$(iv)\ x\in B$
$(v)\ z\notin A$
$(vi)\ z\in B$
$(vii)\ 1\notin A$
$(viii)\ 1\notin B$

طبعاً هذا التدريب أتى على شكل فراغات وأنا قمت بحله حيث تضع ينمتي إلى أو لا ينتمى

٢- اسرد عناصر كل مجموعة من المجموعات التالية ، يمكن استخدام النقط للتعبير عن استمرار سرد عناصر المجموعة عندما يكون بها عدد لانهائي من العناصر.

i. A={x: عدد طبيعي اصغر من ٧ x}
ii. B={x: عدد طبيعي زوجي يقبل القسمة على ٢ x}
iii. C={y: حرف من حروف الهجاء المحصورين بين c و h y}
iv. D={x: عدد طبيعي فردي اصغر من ١٧ x}

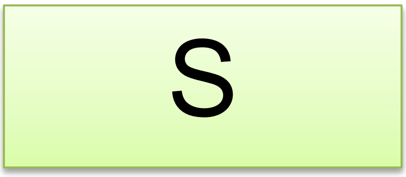
هذا السؤال غير محلول وحله بسيط
١ – ٦
٢ ، ٤ ، ٦ ، .....
نكتب الحروب بين c و h
١٥ ، ١٣ ، ... ، ١

➢ أشكال ِفنْ (VIN Figures).

يمكن تمثيل المجموعات والعمليات المختلفة عليها من خلال استعمال اشكال هندسية تسمى أشكال ِفنْ وذلك وفق ما يلي:

١- المجموعة الشاملة:

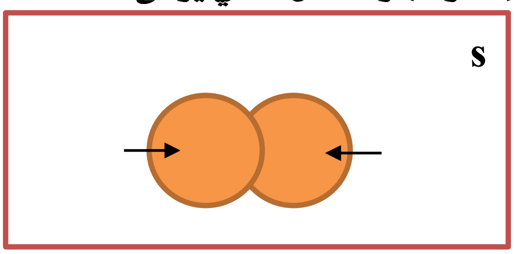
تمثل المجموعات الكلية بمستطيل ويرمز لها بالرمز S



S

٢- اتحاد الحوادث Events Union :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي تنتمي إلى A أو إلى B أو إلى كليهما معا يطلق عليها اتحاد حادثتين ويرمز لها ($A\cup B$) أو (A أو B) والشكل التالي يوضح ذلك:



شكل فنْ لتمثيل اتحاد حادثتين A و B
($A\cup B$)

وبشكل عام لأي n حادثة An .... ,A1 , A2, A3 فإن اتحاد هذه الحوادث هو :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 ......\cup_n$$

ويمكن القول أن $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وقع أحد هذه الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه جمع الأحداث

فالإتحاد ∪ يعني اتحاد المجموعتين A و B وهو مجموع العناصر الموجودة في كلتا المجموعتين دون تكرار العناصر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cup B)$ = {1, 2, -6, -7, -11}

نفس ما تم دراسته سابقا في العمليات على المجموعات (الاتحاد)

خواص العمليات الجبرية لاتحاد الحوادث:

- إذا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

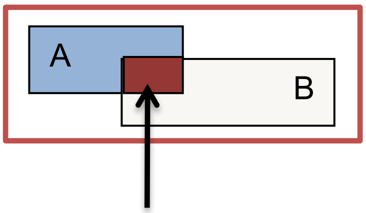
ويعني ذلك توزيع الاتحاد على التقاطع.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن :

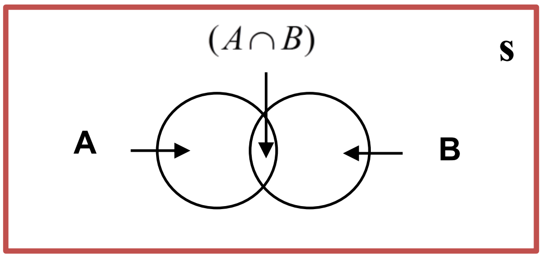
$$(A \cup B) = (B \cup A)$$

٣- تقاطع الحوادث Events Intersection :

لأي حادثتين A و B فإن الحادثة التي تتضمن كافة نقاط العينة التي تنتمي إلى A و B أو إلى كليهما معا في نفس الوقت يطلق عليها تقاطع حادثتين ويرمز لها $(A \cap B)$ أو (A و B) وباستخدام أشكال ِ فنْ يكون الجزء المحدد بـ A and B هو الذي يمثل تقاطع الحادثتين :



$(A \cap B)$



شكل فِنْ لتمثيل تقاطع حادثتين A و B

وبشكل عام لأي n حادثة An .... ,A1 , A2, A3 فإن تقاطع هده الحوادث هو :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 ......\cap_n$$

ويمكن القول أن $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ هو حدث يقع إذا وفقط وقعت كل الحوادث Ai على الأقل وهو ما يطلق عليه ضرب الحوادث.

فالتقاطع ∩ إذاً هو مجموعة العناصر المشتركة بين مجموعتين أو أكثر.

مثال:

A={1 , 2, -6 , -7}

B={-6, -7, -11}

$(A \cap B)$ = {-6, -7}

نفس ما تم دراسته سابقاً في العمليات على المجموعات (التقاطع)

خواص العمليات الجبرية لتقاطع الحوادث:

- إذا كانت A و B و C ثلاث حوادث فإن :

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

ويعني ذلك توزيع التقاطع على الاتحاد.

- وكذلك هناك خاصية التبديل والتي تعني أن :

$$(A\cap B)=(B\cap A)$$

٤- الحادثة المتممة Complementary Event :

لأي حادثة A فإن متممتها هي الحادثة التي تتضمن كافة العناصر التي لا تنتمي إلى A ويرمز لها بالرمز A^c أو $\overline{A}$ وهو حدث يتألف من جميع عناصر Ω غير المنتمية إلى A وباستخدام أشكال ِفنْ فإن الجزء المظلل يمثل الحادثة المتممة :

$$\overline{A} \quad A^c$$

شكل ِفنْ لتمثيل مكملة الحادثة A

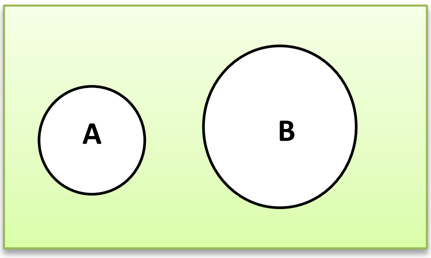
مثال:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20}
A={1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19}
B={1, 2, 3, 6, 8, 11, 12, 14, 16}
$\overline{A}$ ={2, 4, 6, 20}
$\overline{B}$ ={4, 5, 7, 9, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20}

نفس ما تم دراسته سابقاً في العمليات على المجموعات (المتممة أو المكملة)

٥- الحوادث المتنافية Mutually Execlusive Events :

الحادثتان A و B متنافيتان أو منفصلتان إذا كان تقاطعهما خاليا أي أن $A\cap B=\phi$
ويمكن القول أيضا أن $A\cap A^c=\phi$ ، وباستخدام أشكال ِفنْ فإن الحادثتان المنفصلتان يمثلان بالشكل التالي :



$$A\cap B=\phi$$

$$A\cap A^c=\phi$$

شكل ِفنْ لتمثيل حادثتان متنافيتان A و B

بعض العلاقات المهمة

$\overline{B \cup A} = \bar{B} \cap \bar{A}$	متممة اتحاد مجموعتين يساوي تقاطع متممة كلا المجموعتين	$A \cup A^c = S$	اتحاد أي مجموعة مع متممتها تساوي المجموعة الشاملة
$\overline{B \cap A} = \bar{B} \cup \bar{A}$	متممة تقاطع مجموعتين يساوي اتحاد متممة كلا المجموعتين	$A \cap A^c = \phi$	تقاطع أي مجموعة مع متممتها تساوي المجموعة الخالية
إذا كانت $A \subset B$ فإن : $A = A \cap B$ $B = A \cup B$ $\bar{B} \subset \bar{A}$	عندما نقول أن الـ A جزء من B فإن : الـ A تساوي تقاطع الـ A مع B الـ B تساوي اتحاد الـ A مع B متممة الـ B جزء من متممة الـ B	$\bar{S} = \phi$	متممة المجموعة الشاملة يساوي المجموعة الخالية
		$\bar{\phi} = S$	متممة المجموعة الخالية يساوي المجموعة الشاملة
		$A \cup S = S$	اتحاد أي مجموعة مع المجموعة الشاملة تساوي المجموعة الشاملة
		$A \cap S = A$	تقاطع أي مجموعة مع المجموعة الشاملة تساوي نفس المجموعة
		$A \cap \phi = \phi$	تقاطع أي مجموعة مع المجموعة الخالية يساوي المجموعة الخالية

أسئلة وتمارين :

١- يراد شراء ثلاثة أنواع من اللحوم من جزار معين ، فإذا رمزنا للحم الدجاج بـ A ولحم الضأن بـ B ، ولحم العجل بـ C فإن :

- توفر أنواع اللحوم الثلاثة يعني توفر لحم A و B و C أي بمعنى : $A \cap B \cap C$
- عدم توفر أي نوع من اللحوم يعني عدم توفر A و B و C أو كلها أي بمعنى : $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- توفر نوع واحد من اللحوم على الأقل هو توفر A أو B أو C أو كلها أي بمعنى : $A \cup B \cup C$
- توفر نوع A فقط يعني : $A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$
- توفر نوع واحد من اللحم يعني إما توفر A وعدم توفر النوعين الآخرين أو توفر B وعدم توفر النوعين الآخرين ، أو توفر C وعدم توفر النوعين الآخرين أي بمعنى : $(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C)$

٢- قذفت قطعة نقود معدنية ثلاث مرات ، أوجد المجموعة الشاملة Ω وعدد عناصرها واكتب الحوادث التالية وعدد عناصر كل منها:

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى.
- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.
- الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.
- الحادثة $(A \cap B)$
- الحادثة $(A \cup C)$
- الحادثة $(\bar{A} \cup B)$
- الحادثة $(A \cap \bar{B})$
- الحادثة $(\overline{A \cap B})$

الحل :

المجموعة الشاملة Ω يمكن إيجاده من خلال حساب ظهور كل رمية مباشرة على النحو التالي:

Ω= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)}

لقطعة النقد وجهين وجه صورة ووجه كتابة ممكن أن نرمز للصورة بـ H والكتابة بـ T
فنجد في المجموعة الشاملة جميع الاحتمالات عند رمي القطعة ثلاث مرات.

- الحادثة A ظهور صورة في الرمية الأولى:

A= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)}

هنا نأخذ العناصر التي تبدأ الرمية الأولى بصورة H من المجموعة الشاملة

- الحادثة B ظهور صورة واحدة على الأقل.

B= {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)}

هنا نأخذ العناصر التي بها صورة أو أكثر H من المجموعة الشاملة.

- الحادثة C ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية.

C = {(THH), (TTH)}

هنا نأخذ العناصر التي تبدأ الرمية الأولى بكتابة T والرمية الثالثة بصورة H من المجموعة الشاملة.

$(A\cap B)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT)} تقاطع A مع B

$(A\cup C)$ = {(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH)} اتحاد A مع C

$(\bar{A}\cup \bar{B})$ = {(THH), (THT), (TTH), (TTT)} متممة الـ A اتحاد متممة الـ B

$(A\cap \bar{B})$ = ϕ تقاطع الـ A مع متممة الـ B

$(\overline{A\cap B})$ = { (THH), (THT), (TTH), (TTT)} متممة تقاطع الـ A مع الـ B

المحاضرة الثانية

طرق العد ونظرية الاحتمالات

تعريف الاحتمالات:

- يمكن تعريف الاحتمالات بطرق عديدة غير أن أبسطها

"هو مقياس لإمكانية وقوع حدث (Event) معين"

- وتستعمل كلمة احتمالات بشكل دائم في حياتنا اليومية مثل:
  - ✓ احتمال أن ينجح الطالب في مقرر دراسي.
  - ✓ احتمال نزول المطر اليوم

وفي أحيان أخرى تستخدم كلمة احتمالات كلمة مرادفة لبعض الكلمات الأخرى **مثل**: ممكن ، غالبا ، مؤكد ، مستحيل ...

وقد ارتبط المفهوم التقليدي للاحتمال بألعاب الحظ لمدة طويلة ، وتختلف درجة إمكانية تحقق أي حادثة من شخص إلى آخر حسب خبرته والمعلومات المتوفرة لديه عن الحادثة.

وقد تطور علم الاحتمالات تطورا كبيرا وسريعا وأصبح أساسا لعلم الإحصاء وبحوث العمليات وغيرها.

١- التجربة العشوائية Random Experiment :

هي تلك التجربة التي تكون جميع نتائجها معلومة مسبقا ولكن لا يمكن التنبؤ بحدوث أي من هذه النتائج بصفة مؤكدة مثلا:

- رمي حجر نرد مرة واحدة يعتبر تجربة عشوائية ، حيث نعلم جميع قيم نتائج التجربة وهي إما ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ولكن لا يمكن تحديد أي الأرقام يظهر إلى الأعلى بصورة مؤكدة قبل إجراء التجربة.
- رمي عملة معدنية مرة واحدة أو عدد من المرات يعتبر تجربة عشوائية معروف جميع نتائجها قبل أن تبدأ التجربة ، ولكن لا يمكن الجزم بظهور أي منها في رمية معينة.
- المشاركة في سباق الخيل لحصان معين يعتبر تجربة عشوائية فهو إما أن يفوز أو يخسر أو يتعادل.

نستنتج من ذلك أنه في مثل هذه التجارب تكون النتائج التي نحصل عليها من تكرار للتجربة تتذبذب عشوائيا ومهما حاولنا التحكم بظروف التجربة فإن النتائج المتعاقبة ستتغير بشكل غير منتظم.

٢- الحادث والفراغ العيني:

فراغ العينة : هو المجموعة الشاملة التي تحتوي على جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية ويرمز له بالرمز Ω ويطلق علية الحالات الممكنة Possible Cases.

افترض أننا نقوم بإجراء تجربة ما كرمي زهرة النرد مثلاً ونلاحظ كل النتائج الممكنة وهي ظهور أحد الأوجه الستة ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ ونفترض أننا مهتمون بظهور رقم فردي أي ١ أو ٣ أو ٥ من التجربة ، وهكذا فإن عملية رمي الزهرة تسمى تجربة (Experiment) وظهور رقم فردي هو محل اهتمامنا يسمى حادثاً (Event) و مجموعة جميع الحالات الممكنة الظهور تسمى بالفراغ العيني (Sample Space) ويلاحظ أن الحادث قد يكون حالة أو اكثر من الفراغ العيني .

الحادثة : هي مجموعة جزئية من فراغ العينة وتمثل مجموعة النتائج التي تحقق الحدث وتسمى أيضا الحالات المواتية Favorable Cases ، فمثلا الحصول على رقم زوجي في تجربة رمي زهرة النرد مرة واحدة تكون الحادثة هي {٢ ، ٤ ، ٦} ، ويمكن أن تحتوي الحادثة على عنصر واحد أو أكثر.

أمثلة وتمارين :

المثال الأول / أوجد فراغ العينة في كل من التجارب العشوائية التالية:

١- رمي عملة معدنية واحدة.

٢- رمي عملة معدنية مرتين.

٣- رمي حجر نرد مرتين.

الحل :

١- عند رمي عملة معدنية مرة واحدة جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما صورة H أو كتابة T، فيكون بالتالي فراغ العينة :

$\Omega = \{H , T\}$

٢- عند رمي عملة معدنية مرتين تكون جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما صورة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثانية أو صورة في الرمية الأولى وكتابة في الرمية الثانية أو كتابة في الرمية الأولى وصورة في الثانية أو كتابة في الأولى وكتابة في الثانية فيكون بالتالي فراغ العينة في هذه التجربة :

$\Omega=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

٣- عند رمي حجر نرد مرتين (حجر النرد هو مكعب صغير كتب أو رسم على أوجهه الستة الأرقام من ١ إلى ٦) فتكون جميع النتائج الممكن الحصول عليها إما ظهور رقم ١ في الرمية الأولى ورقم ١ في الرمية الثانية أو رقم ١ في الرمية الأولى ورقم ٢ في الرمية الثانية وهكذا، فيكون بالتالي فراغ العينة في هذه التجربة :

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

كما يمكننا كتابة فراغ العينة في تجربة رمي حجر النرد مرتين على شكل جدول كالتالي:

X,y	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

المثال الثاني / في تجربة رمي عملة معدنية ثلاث مرات، اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وعبر عن الحوادث التالية:

١- الحصول على H (صورة) مرة واحدة.

٢- الحصول على H (صورة) مرتين.

٣- الحصول على H (صورة) ثلاث مرات.

٤- عدم الحصول على H (صورة).

الحل:

❖ عند رمي عملة معدنية ثلاث مرات فيكون بالتالي فراغ العينة :

Ω= {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

١- ويمكن الحصول على الحادثة H (صورة) لمرة واحدة ونرمز لها بالرمز A1 كالتالي:

A1 ={HTT, THT, TTH}

٢- ويمكن الحصول على الحادثة H (صورة) لمرتين ونرمز لها بالرمز A2 كالتالي:

A2 ={HHT, HTH, THH}

٣- - ويمكن الحصول على الحادثة H (صورة) ثلاث مرات ونرمز لها بالرمز A3 كالتالي:

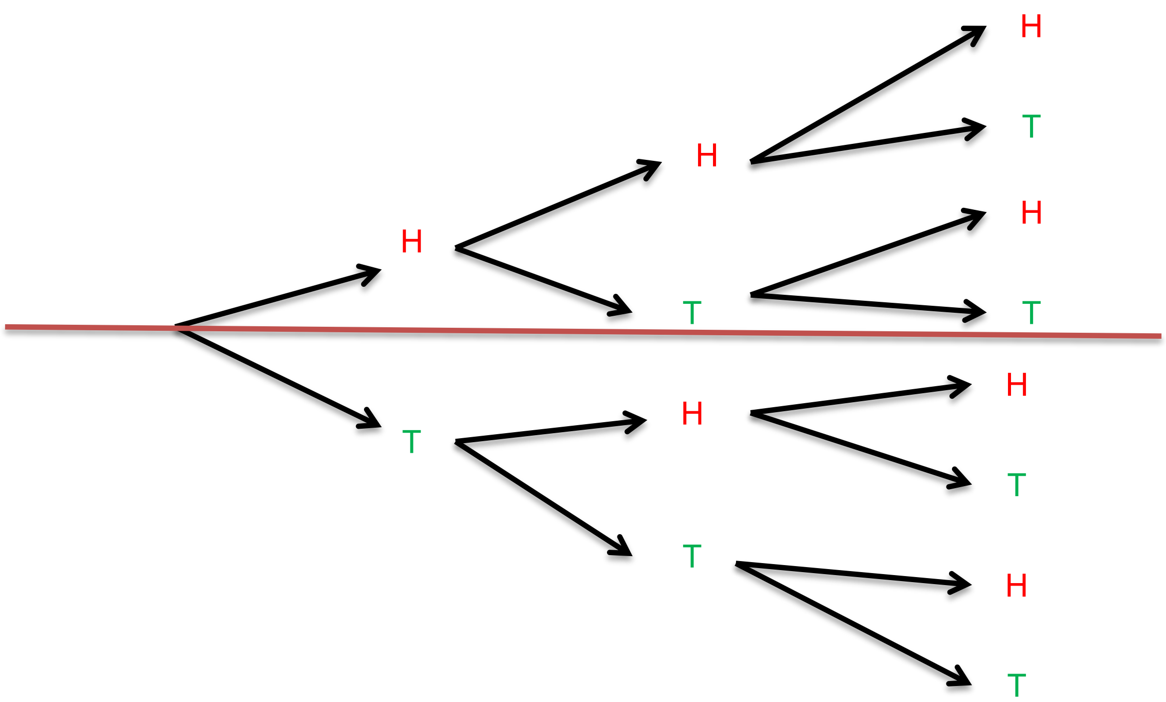
A3 ={HHH}

٤- ويمكن عدم الحصول على الحادثة H (صورة) ونرمز لها بالرمز A4 كالتالي:

A4 ={TTT}

هذا المثال بسيط وواضح حيث نرمز للصورة بـ H ونرمز للكتابة بـ T فعندما نرمي قطعة العملة ثلاث مرات تكون جميع الاحتمالات كما هو في فراغ العينة . وبعد ذلك نتابع النقاط من واحد إلى أربعه فمثلاً إذا رمينها ثلاث مرات يمكن أن نرى صوره في ثلاث احتمالات كما في A1 وهكذا.

ويمكن من خلال استخدام الرسم الشجري معرفة فراغ العينة للمثال السابق (في تجربة رمي عملة معدنية ثلاث مرات) كالتالي:



المثال الثالث /

في طريقك إلى الجامعة توجد إشارتا مرور ، ما هو فضاء العينة لتجربة ذهابك إلى الجامعة؟

الحل:

نفترض أنه عندما تكون الإشارة خضراء نرمز لها بالرمز G وعندما تكون حمراء نرمز لها بالرمز R فيكون بالتالي فضاء العينة كالتالي:

Ω={GG, GR, RG, RR}

هنا أيضا مثال بسيط اشارتين ممكن أجد كلها GG وممكن أجد واحدة خضراء وواحدة حمراء وهكذا تكون الاحتمالات.

المثال الرابع / في تجربة رمي **حجر نرد مرتين** عبر عن الحوادث التالية بدلالة نقاط العينة والصفة المميزة؟

١- A : الحصول على مجموع يساوي ٧
٢- B : الفرق بين العددين الناتجين يساوي القيمة المطلقة ١
٣- C : الحصول على مجموع يساوي ٩ على الأقل
٤- D : الحصول على ١ في الرمية الأولى
٥- E : الحصول على حاصل ضرب يساوي ٦ على الأكثر
٦- F : الحصول على مجموع أقل من أو يساوي ٢

الحل:

يمكننا كتابة فراغ العينة في تجربة رمي حجر النرد مرتين على شكل جدول كالتالي:

X,y	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

وإذا رمزنا للرمية الأولى بـ x والرمية الثانية بـ y فإنه يمكننا كتابة الحوادث المطلوبة في السؤال على النحو التالي :

١- الحصول على **مجموع يساوي 7** :

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

A={(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)}

- بطريقة الصفة المميزة:

A={ (x,y) : x + y = 7 }

٢- الفرق بين العددين الناتجين يساوي القيمة المطلقة **1**

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

B={(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,5), (5,4), (5,6), (6,5)}

- بطريقة الصفة المميزة:

B={ (x,y) : x – y = | 1 |}

٣- الحصول على **مجموع يساوي 9** على الأقل :

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

C={(4,5), (4,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,3), (3,6) , (6,4), (6,5), (6,6)}

- بطريقة الصفة المميزة:

C={ (x,y) : x + y ≥ 9 }

٤- الحصول على **الرقم 1** في الرمية الأولى :

- - بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

D={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)}

- – بطريقة الصفة المميزة:

D={ (x,y) : x = 1 }

٥- الحصول على حاصل ضرب يساوي 6 على الأكثر :

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

E={(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (1,6), (6,1), (5,1)}

- بطريقة الصفة المميزة:

$E=\{ (x,y) : x * y \leq 6 \}$

٦- الحصول على مجموع أقل من أو يساوي 2 :

- بطريقة سرد جميع العناصر بينهما فاصلة (طريقة نقاط العينة):

F={(1,1)}

- بطريقة الصفة المميزة:

$F=\{ (x,y) : x + y \leq 2 \}$

المثال الرابع / عبر بالكلمات عن كل الحوادث الممثلة بالمجموعات الجزئية التالية من نقاط العينة:

G ={(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)}
H ={(1,1), (2,1), (1,2), (3,1), (2,2), (1,3)}
I ={(5,1), (1,5), (6,2), (2,6)}
J ={(1,4), (2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)}
K ={(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)}

الحل :

الحادثة	التعبير بالكلمات عن الحوادث
الحادثة G	تعني الحصول على نفس العدد في الرمية الأولى والرمية الثانية
الحادثة H	تعني الحصول على مجموع رميتين أقل من (٥)
الحادثة I	تعني الحصول على فرق بين الرميتين يساوي (٤)
الحادثة J	تعني الحصول على (٤) في الرمية الثانية
الحادثة K	تعني الحصول على عدد زوجي في كلا الرميتين

٣- الحالات الممكنة (Possible Cases)

هي الحالات أو النتائج المختلفة التي يمكن أن تظهر نتيجة لإجراء تجربة معينة ، فمثلاً : عند رمي قطعة عملة تكون نتيجتها صورة أو كتابة.

وعند رمي زهرة نرد تكون نتيجتها ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ فيقال أن عدد الحالات الممكنة ٢ في حالة رمي قطعة العملة و ٦ في حالة رمي زهرة النرد.

٤- الحالات المواتية (Favorable Cases)

هي النتائج أو الحالات التي تؤدي إلى تحقيق الحادث الذي هو موضع اهتمامنا ، فإذا كان الحادث هو الحصول على رقم فردي في حالة رمي زهرة النرد فإن الحالات التي تحقق هذا الحادث هي الحصول على ١ أو ٣ أو ٥ ، هذه الحالات الثلاثة تسمى الحالات المواتية.

٥- الحالات المتماثلة (Equally Likely Cases)

إذا كان لدينا عدة كرات معدنية مصنوعة من مادة واحدة متجانسة في الكثافة ولها نفس الوزن والحجم وضعناها في كيس وسحبنا كرة منها بعد خلطها جيداً فإن هذه الكرات تكون حالات متماثلة أي يكون لكل منها نفس النصيب في السحب.

٦- الحوادث المتنافية (Mutually Exclusive Events)

يقال عن الحادثين A و B أنهما متنافيان إذا استحال حدوثهما معا ، فمثلاً : عند رمي عملة معدنية لا يمكن الحصول على وجهين في وقت واحد.

٧- الحوادث المستقلة (Independent Events)

يعتبر الحادثين A أو B حادثين مستقلين إذا كان وقوع إحداهما أو عدم وقوعه لا يؤثر في وقوع الآخر ، فمثلاً : عند رمي قطعة عملة واحدة مرتين متتاليتين فإن نتيجة الرمية الثانية لا تتأثر بنتيجة الأولى.

٨- الحوادث الشاملة (Exhaustive Events)

تسمى الحوادث A ، B ، C ... حوادث شاملة في تجربة ما إذا كان لابد من حدوث إحداها عند إجراء التجربة.

فمثلاً : عند اختيار طالب من الجامعة لمعرفة حالته ما إذا كان مدخنا أو غير مدخن تعتبر هذه الحالات حوادث شاملة لأنه لابد للفرد أن يكون له صفة واحدة من هذه الصفات ، كذلك فإن الحصول على العدد ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ عند رمي حجر النرد تعتبر حوادث شاملة لأنه لابد من حدوث إحداها.

➢ طرق العد :

إن من المهم لحساب احتمال حدوث معين في تجربة ما هو أن نعرف عدد مرات حدوث هذا الحادث بالنسبة لعدد الاحتمالات الممكنة لتلك التجربة ، وقد يكون من السهل عد الاحتمالات الممكنة ومرات حدوث ذلك الحادث في بعض التجارب كما في تجربة إلقاء حجر نرد أو قطعة نقد، إلا إنه في كثير من الأحيان يصعب فعل ذلك باستخدام العد لكل احتمال ممكن بعينه ، فيستلزم بالتالي أن نستخدم طرق رياضية لحساب عدد مرات الحدوث بدون الحاجة لمعرفة كل عنصر بالتحديد من عناصر مجموعتي الحادث والمجموعة الشاملة.

١- طريقة الضرب :

إذا كانت التجربة E_1 تحدث n من الطرق ومع كل طريق من هذه الطرق كانت التجربة E_2 تحدث في m من الطرق فإن التجربتين تحدثان معاً في $n \times m$ من الطرق.

مثال (١) :

إذا كان هناك طريقان يمكن أن يستخدمها المسافر من الأحساء إلى الرياض ، و ٣ طرق مختلفة يمكن أن يستخدمها المسافر من الرياض إلى مكة المكرمة.

فإن عدد الطرق التي يمكن أن يستخدمها المسافر من الأحساء إلى مكة المكرمة مروراً بالرياض هي :

- السفر من الأحساء إلى الرياض : E_1 ويحصل في عدد من الطرق مقداره : $n = 2$
- السفر من الرياض إلى مكة المكرمة : E_2 ويحصل في عدد من الطرق مقداره : $m = 3$
- إذا عدد الطرق للسفر من الأحساء إلى الرياض مروراً بالرياض : $n \times m = 2 \times 3 = 6$

مثال (٢) :

إذا فرض أن بإمكان طالب أن يسجل ٣ مقررات هذا الفصل ، بحيث يختار مقرر من قسم المحاسبة من بين ٤ مقررات متاحة ، ويختار مقرر واحد من قسم التمويل من بين ٣ مقررات متاحة ، ومقرر واحد من قسم إدارة الأعمال من بين مقررين متاحين .

عدد الطرق لاختيار هذه المقررات الثلاثة : $4 \times 3 \times 2 = 24$

٢- طريقة الجمع :

إذا كانت تجربتان مانعتين لبعضهما البعض وكانت الأولى تحدث في n من الطرق وكانت الثانية تحدث في m من الطرق فإن واحدة منهما أو الأخرى تحدث في $n + m$ من الطرق.

مثال :

إذا فرض أن طالباً من كلية العلوم الإدارية متاح له أن يسجل مقرر واحد فقط من كلية التربية كمتطلب للتخرج بحيث يختاره حسب اختياره من بين الأقسام العلمية في الكلية المتاحة له ، ما عدد الطرق لاختيار هذا المقرر إذا علمت أن المقررات المتاحة له كالآتي :

م	القسم	عدد المقررات المتاحة
1	الدراسات الإسلامية	3
2	اللغة العربية	4
3	اللغة الإنجليزية	2
4	علم النفس	1

عدد الطرق المتاحة لاختيار مقرر من بين هذه المقررات هو :

$3 + 4 + 2 + 1 = 10$

٣- المضروب :

عدد الطرق التي يمكن أن نرتب بها n من الأشياء ويرمز له بالرمز $n!$

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots\ldots\ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

ملاحظة:

$0! = 1$

مضروب الصفر دائماً يساوي واحد

ملاحظة:

$$\begin{aligned} n! &= n \times (n-1)! \\ &= n \times (n-1) \times (n-2)! \\ &= n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)! \end{aligned}$$

أمثلة (١) :

$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$
$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$
$= 5 \times 4!$
$= 5 \times 4 \times 3!$
$= 5 \times 4 \times 3 \times 2!$
$= 120$

في هذا المثال نجد أن مضروب الـ 3 مثلاً يساوي :
$n! = n \times (n-1) \times (n-2)$
$3! = 3 \times (3-1) \times (3-2)$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$
وهكذا على البقية ثم فصل لنا مضروب الـ 5
حيث نقدر نقول أن مضروب الـ 5 هو :
$5! = 5 \times 4!$
$= 5 \times 24 = 120$

أمثلة (٢) :

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7 \times 6!}{6!} = 7$$
$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

في هذا المثال نجد أن مضروب الـ 7 يساوي :
$n! = n \times (n-1)!$
$7! = 7 \times (7-1)!$
$7! = 7 \times 6!$
وهذا كما ظهر لنا بالبسط ويروح مضروب الـ 6 في البسط مع مضروب الـ 6 في المقام يبقى الناتج 7 ، وكذلك الأمر على المثال الأخر.

٤- التباديل :

هي ترتيب جميع عناصر أو جزء من عناصر أي مجموعة ويرمز له بالرمز : P

والتباديل يأخذ صوراً مختلفة يمكن تصنيفها كالآتي :

أ- ترتيب n من الأشياء المميزة مأخوذة سوياً (جميعها) :

$$P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

مثال (١) :

ترتيب الحروف : a, b, c

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$

$p(n,n) = n! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

هنا قلنا أن :
$P(n,n) = n!$
مباشرة نحسب n! وذلك مثل ما درسناه سابقاً في المضروب.

مثال (٢) :

ترتيب ستة أشخاص على ستة كراسي :

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

هنا قلنا أن :
$P(n,n) = n!$
مباشرة نحسب n! (6!) وذلك مثل ما درسناه سابقاً في المضروب.

ب- ترتيب n من الأشياء المميزة مأخوذة r في كل مرة حيث : $r \le n$

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (١) :

بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف : $a, b, c, d.e$

$$P(5,2) = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 5 \times 4 = 20$$

عدد الحروف 5 وطلب في السؤال ترتيب حرفين فعوضنا بهذه الطريقة وطبقنا القانون.

طريقة أخرى :

$$P(5,2) = 5 \times 4 = 20$$

هنا نحل بطريقة أسهل بدون استخدام القانون حيث نضرب الخمسة في العدد 1-5 لأن r = 2

ولتوضيح ذلك أكثر :

$$P(100,3) = 100 \times 99 \times 98 = 970200$$
$$P(32,4) = 32 \times 31 \times 30 \times 29 = 863040$$

وهنا نفس الشيء مرة الـ r = 3 ومرة تساوي 4 وذلك للتوضيح وجرب حسابها بالقانون ☺

مثال (٢) :

ترتيب 4 من الأشخاص على 6 كراسي في خط أفقي :

$$P(6,4) = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

وبالطريقة الأسهل ☺ $P(6,4) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$

ج- ترتيب n من الأشياء التي من بينها n_1 عنصراً متماثلاً ، و n_2 عنصراً متماثلاً و n_3 عنصراً متماثلاً ...الخ :

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times n_3! \ldots}$$

مثال :

بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة : ***Statistics***

$$\frac{10!}{3! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1!}$$

$$= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2 = 50400$$

لاحظ كلمة ***Statistics*** بها أحرف مكرره لذلك تجد وضعنا في المقام أن S تكرر 3 مرات وكذلك الـ t أما الـ i تكرر مرتين و الـ a والـ c لم تتكرر فعبرنا عنها بـ !1 ، وعدد حروف الكلمة 10 لذلك وضعنا البسط !10

ولو كانت كلمة أخرى من عشرة أحرف لا يوجد بها أحرف مكررة نحسب !10 فقط.

٥- **السحب مع الإرجاع :**

مثال (١) :

بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من عشر خانات من بين الأعداد : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الخانة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الخيارات الممكنة	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠	١٠

$$10^{10} = 10{,}000{,}000{,}000$$

مثال (٢) :

بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من ثلاث خانات من بين الأعداد : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

الخانة	١	٢	٣
الخيارات الممكنة	١٠	١٠	١٠

$$10^3 = 1000$$

٦- **السحب بدون إرجاع :**

نفس طريقة المضروب ، حيث لا تتكرر الأعداد

مثال (١) :

بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من عشر خانات من بين الأعداد : $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$

الخانة	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الخيارات الممكنة	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١

$$10! = 10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 3628800$$

مثال (٢) :

بكم طريقة يمكن ترتيب رقم مكون من ثلاث خانات من بين الأعداد : $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$

الخانة	١	٢	٣
الخيارات الممكنة	١٠	٩	٨

$$P(10,3) = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{10\times9\times8\times\cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 10\times9\times8 = 720$$

٧- **التوافيق :**

هي الطرق التي نختارها عدداً معيناً من عناصر مجموعة معينة دون النظر إلى الترتيب ، ويرمز له بالرمز : $C(n,r)$

ويتم استخدام العلاقة التالية :

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

مثال (١) :

ما عدد الطرق التي نختارها حرفين من الحروف : a,b,c

الحل : ab, ac, bc

$$C(n,r) = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\times(3-2)!} = \frac{3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}\times1!} = 3$$

نلاحظ هنا بأنه ذكر في السؤال نختار حرفين
في المعادلة نعوض عدد الحروف n وهو ثلاثة
والاختيار r و حرفين 2

مثال (٢) :

بكم طريقة يمكن اختيار 4 طلاب من بين 20 طالباً لا عفاءهم من دخول الاختبار ؟ :

الحل :

$$C(20,4) == \frac{20!}{4!\times16!} = \frac{20\times19\times18\times17\times\cancel{16!}}{4!\times\cancel{16!}} = \frac{116280}{24} = 4845$$

مثال (٣) :

إذا فرض أن طالباً يحق له تسجيل 5 مقررات هذا الفصل من بين 8 مقررات متاحة له ، فبكم طريقة يمكنه اختيار هذه المقررات الخمسة ؟

الحل :

$$C(8,5) == \frac{8!}{5!\times3!} = \frac{8\times7\times6\times\cancel{5!}}{\cancel{5!}\times3!} = \frac{336}{3\times2\times1} = 56$$

ملاحظات :

$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-1}$ ، $\binom{n}{0} = 1$ ، $\binom{n}{n} = 1$ ، $\binom{n}{1} = n$

مثال (٤) :

قيمة كلاً مما يلي :

- $\binom{12}{1} = 12$
- $\binom{20}{20} = 1$
- $\binom{23}{23} = 1$
- $\binom{9}{3} = \frac{9!}{3!\times 6!} = \frac{9!}{6!\times 3!} = \binom{9}{6}$

عدد اختيار عنصر من 12 = 1

عدد اختيار 20 عنصر من 20 = 1

وهكذا

عدد اختيار ثلاث من بين تسعه يساوي عدد اختيار سته من بين تسعه.

والسبب أن الفرق بين تسعه وثلاثة يساوي سته ، والفرق بين تسعه وسته يساوي ثلاثة.

المحاضرة الثالثة

نظرية الاحتمالات

مقدمه :

ترتبط كلمة احتمال دائما بذكر حدثا ما ، فاحتمال وقوع حدث معين هو نسبة وقوع هذا الحدث في الأجل الطويل ، فعندما نقول إن احتمال الحصول على وحدة معيبة من إنتاج إحدى الآلات هو 0.08 ، فإننا نعني بذلك أن 8 في المئة من إنتاج هذه الآلة في الأجل الطويل سيكون معيبا ، ونحن لا نستطيع ضمان وجود نسبة معينة من الوحدات المعيبة بالضبط في أي 100 وحدة من إنتاج هذه الآلة ، ولكننا نتوقع أن نجد نسبة معينة في المئة من إنتاج هذه الآلة معيبا إذا فحصنا عددا كبيرا وكافيا من إنتاجها.

وللاحتمالات تعريفات عدة سنتعرض لها فيما يلي:

➢ **التعريف النسبي للاحتمالات Rational Probability Definition :**

عند إجراء تجربة عدد N من المرات وكان A حدثا عشوائيا متعلقا بهذه التجربة فإن التكرار النسبي يعرف على أنه **حاصل قسمة عدد مرات حدوث الحادثة A مقسوما على عدد مرات حدوث التجربة** أو **بمعنى :** $f_N(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}$ **أي أن التكرار النسبي لـ A يساوي تكرار A مقسوما على التكرار الكلي.**

- $0\le f_N(A)\le 1$ التكرار النسبي لـ A أكبر من أو يساوي (صفر) وأصغر من أو يساوي (١)
- $f_N(A)=1$ إذا وفقط إذا وقع الحدث A في N مرة أجريت فيها التجربة.
- $f_N(A)=0$ إذا وفقط إذا لم يقع الحدث A في N مرة أجريت فيها التجربة.
- إذا كان A و B حادثتان متنافيتان فإن : $f_N(A\cup B)=f_N(A)+f_N(B)$
- إن التكرار النسبي $f_N(A)$ لحادثة A يأخذ قيمة ثابتة إذا زاد عدد محاولات التجربة عن عدد معين ، ويكون في العادة العدد كبير ، وهذا ما نسميه احتمال وقوع الحادثة A .

مثال :

إذا أخذنا التجربة العشوائية رمي قطعة نقود عدة مرات وتسجيل عدد مرات ظهور الحادثة الحصول على صورة H وكررنا التجربة لعدد من المرات سجلت النتائج في الجدول التالي:

عدد الرميات الكلي N	عدد مرات ظهور الصورة H	التكرار النسبي
30	12	12 / 30
50	20	20 / 50
80	38	0.475
100	49	0.49
300	150	0.5
500	250	0.5
1000	500	0.5
1500	750	0.5

نلاحظ : **أنه كلما زاد عدد الرميات N** فإن التكرار النسبي يختلف اختلافا بسيطا **حتى تستقر عند قيمة معينة 0.5**

وهذا يوضح لنا تعريف الاحتمال وفق مفهوم التكرار النسبي.

➢ التعريف التقليدي للاحتمالات Classical Probability Definition :

لأي حادثة A فإن احتمال حدوثها يمثل نسبة عدد حالات ظهورها إلى عدد حالات ظهور فراغ العينة الكلي أي بمعنى:

$P(A)=\frac{N_A}{N_\Omega}$ **أي أن :** $\frac{\text{عدد الحالات المواتية}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$

وللتعريف التقليدي للاحتمال عدد من المسلمات وهي :

- قيمة أي احتمال أكبر من أو يساوي صفر ، بمعنى أنه لأي حادثة A فإن : $P(A)\geq 0$
- قيمة احتمال فراغ العينة يساوي واحد صحيح : $P(\Omega)=1$
- إذا كانت A1 و A2 حادثين متنافيين أو منفصلين بمعنى : $A_1\cap A_2=\phi$

فإن : $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)$

- ويمكن القول بشكل عام لأي n حادثة منفصلة :

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup .....\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)...+P(A_n)$$

مثال (١):

رمي حجر نرد مرة واحدة ، أحسب التالي:

- احتمال الحصول على رقم ٥
- احتمال الحصول على رقم زوجي
- احتمال الحصول على رقم أكبر من ٢
- احتمال الحصول على رقم أقل من ٧
- احتمال الحصول على رقم ٧

لو رجعنا لما درسناه بالإحصاء التكرار النسبي نجد بأنه نفسه التكرار على المجموع الكلي

الحل:

فراغ العينة لهذه التجربة هو : Ω= {1, 2, 3, 4, 5, 6} فيكون بالتالي الحل كما يلي:

P(A=5)=1/6

P(A=2,4, 6)=3/6

P(A>2)=4/6

P(A<7)=6/6=1

P(A=7)=0/6=0

ويستنتج من ذلك أن أقل قيمة للاحتمال تساوي الصفر ويقال أن الحدث في هده الحالة (حدث مستحيل) بينما تساوي واحد إذا كان الحدث مؤكد.

مثال (٢):

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الدي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختر عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية، ثم احسب الاحتمالات التالية:

- أن يكون أعزبا.
- أن يكون متزوجا.
- أن يكون من القسم الأول.
- أن يكون من القسم الأول أو الثاني.
- أن يكون من القسم الأول وأعزب.

تذكرون التكرار النسبي في الإحصاء في الإدارة نفسه بالضبط التكرار تقسيم مجموع التكرار.

الحل:

- نفرض أن الحادثة A أن يكون العامل أعزب أي A = {أن يكون العامل أعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(A)= \frac{\text{عدد العمال العزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 23/50= 0.46$$

- نفرض أن الحادثة B أن يكون العامل متزوج أي أن B = {أن يكون العامل متزوج} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(B)= \frac{\text{عدد العمال المتزوجين}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 27/50= 0.54$$

- نفرض أن الحادثة C أن يكون العامل من القسم الأول أي أن C = {أن يكون العامل من القسم الأول} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(C)= \frac{\text{عدد عمال القسم الأول}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 12/50= 0.24$$

- نفرض أن الحادثة D أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني أي أن D = {أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(D)= \frac{\text{عدد عمال القسم الأول أو الثاني}}{\text{عدد العمال الكلي}} =(12+22)/50=34/50=0.68$$

- نفرض أن الحادثة E أن يكون العامل من القسم الأول و أعزب أي أن E = {أن يكون العامل من القسم الأول وأعزب} فيكون الاحتمال المطلوب:

$$P(D)= \frac{\text{عدد عمال القسم الأول وعزاب}}{\text{عدد العمال الكلي}} = 5/50=0.1$$

بدهيات الاحتمال :

١- احتمال وقوع الحادث الأكيد يساوي واحداً :

$P(S)=1$ **مثلاً :** احتمال ظهور رقم من أرقام النرد الستة عند رمية.

٢- احتمال وقوع الحادث المستحيل يساوي صفراً

$P(\phi)=0$ **مثلاً :** احتمال ظهور رقم سبعة عند رمي حجر النرد.

٣- إذا كان الحادث A مجموعة جزئية من الفضاء العيني S فإن :

$0 \le P(A) \le 1$ - قيمة الاحتمال دائماً تكون محصورة ما بين واحد وصفر.

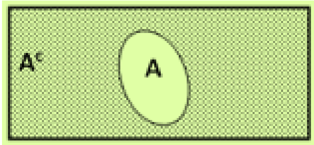
٤- إذا كان A و B حادثين منفصلين بمعنى : $P(A \cap B)=0$

فإن :

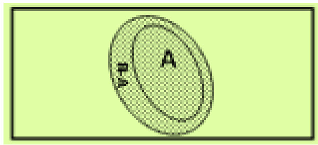
$$P(A \cap B)=P(A)+P(B)$$

نظريات الاحتمال :

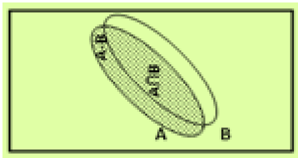
١- إذا كانت A^c متممة الحادث A فإن : $P(A^c)=1-P(A)$



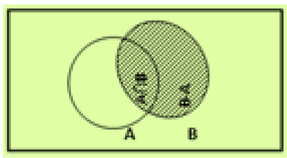
٢- إذا كان $A\subset B$ فإن : $P(A)\le P(B)$



٣- إذا كان **A** و **B** أي حادثتين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$



٤- إذا كان **A** و **B** أي حادثين فإن : $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$



مثال (١) :

أجري امتحانان في مادة الإحصاء على 100 طالب فنجح في الامتحان الأول 60 طالباً ونجح في الامتحان الثاني 40 طالباً ونجح في الامتحانين معاً 20 طالباً ، أوجد احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول واحتمال نجاح الطلاب في الامتحان الثاني واحتمال نجاح الطلاب في الامتحانين معاً ، ثم أوجد احتمال نجاح الطلاب في الامتحان الأول أو الامتحان الثاني.

أولاً نفرض :

- نجاح الطلاب في الامتحان الأول = **A**
- نجاح الطلاب في الامتحان الثاني = **B**
- نجاح الطلاب في الامتحانين معاً = $A\cap B$
- نجاح الطلاب في أحد الامتحانين = $A\cup B$

هذا المثال واضح لو أخذنا أول سؤال نجاح الطلاب في الامتحان الأول عددهم ستين نقسمه على العدد الكلي للطلاب اللي هو 100 يعطينا الناتج وهكذا

الحل :

- $P(A)=\dfrac{60}{100}$
- $P(B)=\dfrac{40}{100}$
- $P(A\cap B)=\dfrac{20}{100}$

- $$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{60}{100}+\frac{40}{100}+\frac{20}{100}$$
$$=\frac{80}{100}$$

مثال (٢) :

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية ، احسب الاحتمالات التالية:

- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول أو الثاني.
- احتمال أن يكون العامل متزوجا أو من القسم الأول
- احتمال أن يكون العامل من القسم الثالث أو أعزب

نعوض مباشرة من الجدول ونقسم على المجموع الكلي ٥٠ ودائماً اقرأ السؤال صحيح هل هو مشروط أم لا حيث سـ ندرس ذلك لاحقاً في الاحتمال الشرطي

الحل :

- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون **العامل من القسم الأول** أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون **العامل من القسم الثاني** أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الثاني}

فيكون الاحتمال المطلوب:

P(A1)=12/50

P(A2)=22/50

P(A1 u A2) =P(A1)+P(A2)= (12/50)+(22/50) = 34/50= 0.68

- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون **العامل متزوجا** أي أن A1 = {أن يكون العامل متزوج}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون **العامل من القسم الأول** أي أن A2 = {أن يكون العامل من القسم الأول}

فيكون الاحتمال المطلوب:

P(A1)=27/50

P(A2)=12/50

P(A1 u A2) =P(A1)+P(A2)-P(A1 ∩ A2) = (27/50)+(12/50)-(7/50) = 32/50= 0.64

- نفرض أن الحادثة A1 أن يكون **العامل من القسم الثالث** أي أن A1 = {أن يكون العامل من القسم الثالث}

نفرض أن الحادثة A2 أن يكون **العامل أعزب** أي أن A2 = {أن يكون العامل أعزب}

فيكون الاحتمال المطلوب:

P(A1)=16/50

P(A2)=23/50

P(A1 u A2) =P(A1)+P(A2)-P(A1 ∩ A2) = (16/50)+(23/50)-(10/50) = 29/50= 0.58

الاحتـمال الشرطي Conditional Probability

إذا كان لدينا الحادثين *A1* , *A2* وكان *P: (A2)* لا يساوي الصفر فأن الاحتمال الشرطي للحادث *A1* بشرط وقوع الحادث *A2* يعطي بالمعادلة التالية:

$$\mathbf{P\ (A1|A2)} = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)}$$

أي أن الاحتمال الشرطي للحادث *A1* بشرط وقوع الحادث *A2* يساوي حاصل قسمة الاحتمال المركب لـ *A1 , A2* على احتمال الحادث *A2*

مثال (١) :

إذا كان احتمال نجاح طالب في مقرر الرياضيات 0.64 واحتمال نجاحه في مقرر الإحصاء ومقرر الرياضيات معا 0.32 فما هو احتمال نجاحه في مقرر الإحصاء؟ علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات.

الحل:

نفرض أن *A1*= {نجاح الطالب في مقرر الإحصاء}

A2= {نجاح الطالب في مقرر الرياضيات}

هنا نقسم مباشرة احتمال نجاحه في مقرر الاحصاء ومقرر الرياضيات على احتمال نجاحه في مقرر الرياضيات يعطينا احتمال نجاحه في الاحصاء.

وبذلك يكون:

P(A2)=0.64

P(A1∩A2)=0.32

ويكون المطلوب في هذه المسألة هو حساب P (A1|A2) وبتطبيق العلاقة :

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{0.32}{0.64} = 0.5$$

إذا احتمال نجاح الطالب في مقرر الإحصاء علما بأنه نجح في مقرر الرياضيات هو 0.5

مثال (٢) :

الجدول التالي يمثل توزيع عمال أحد المصانع حسب الحالة الاجتماعية للعامل والقسم الذي يعمل به:

الحالة الاجتماعية	أعزب	متزوج	المجموع
القسم الأول	٥	٧	١٢
القسم الثاني	٨	١٤	٢٢
القسم الثالث	١٠	٦	١٦
المجموع	٢٣	٢٧	٥٠

اختير عامل من الجدول السابق بطريقة عشوائية ، احسب الاحتمالات التالية:

١- احسب احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج؟

٢- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث؟

الحل:

نفرض أن *A1*= {أن يكون العامل من القسم الأول}

A2= {أن يكون العامل متزوج}

B1= {أن يكون العامل من القسم الثالث}

B2= {أن يكون العامل أعزب}

في هذا المثال نعوض مباشرة من الجدول ونقسم على المجموع الكلي ٥٠ ودائماً اقرأ السؤال صحيح هل هو مشروط أم لا.

فيكون بالتالي:

١- احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون من القسم الأول ومتزوج}}{\text{احتمال أن يكون متزوج}}$$

$$P(A1|A2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{7}{50}}{\frac{27}{50}} = \frac{7}{27} = 0.259$$

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول بشرط أنه متزوج هو 0.259

٢- احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو:

$$\frac{\text{احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث}}{\text{احتمال أن يكون من القسم الثالث}}$$

$$P\,(B1|B2) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_2)} = \frac{\frac{10}{50}}{\frac{16}{50}} = \frac{10}{16} = 0.625$$

إذا احتمال أن يكون العامل أعزب بشرط أنه من القسم الثالث هو 0.625

➢ **ضرب الاحتمالات :**

قانون ضرب الاحتمالات :

من قانون الاحتمال الشرطي نستنتج :

$$P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نستنتج أن :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \setminus B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(A \setminus B)$$

ولو كانت ثلاثة حوادث تكون كالتالي :

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times (B \setminus A) \times (C \setminus A, B)$$

مثال (١) :

إذا كان الجدول التالي يمثل الاحتمال لرغبة زبون على الشراء من محل تجاري :

الرغبة \ القدرة	عنده قدرة الشراء	ليس عنده قدرة الشراء
عنده رغبة الشراء	0.3	0.1
ليس عنده رغبة الشراء	0.2	0.4

١- ما احتمال أن يكون لدى هذا الزبون رغبة الشراء ؟

$$P(A) = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

٢- ما احتمال أن يكون قادراً على الشراء إذا كان يرغب في الشراء ؟

$$P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

مثال (٢) :

إذا فرض أن مركزاً لتحليل الأسواق المالية يعتقد أنه سوف يكون هناك ارتفاع عام في القيمة السوقية باحتمالية 60% وأنه في حال حصل ذلك فإن احتمالية أن تحقق محفظة البركة المالية أرباحاً كبيرة هي 85% ، فأوجد احتمال أن تحقق أن يحصل ارتفاع عام وأن تحقق المحفظة المذكورة أرباحاً كبيرة.

الحل :

نفرض أن :

- **ارتفاع عام في القيمة السوقية** = A
- **تحقيق محفظة البركة المالية أرباحاً كبيرة في حال حصل ارتفاع عام** = $B \setminus A$
- **حصول ارتفاع عام وتحقيق المحفظة أرباحاً كبيرة** = $A \cap B$

طبعاً هنا تعويض مباشرة من السؤال والـ 100 اللي هي النسبة 100%

ولا ننسى موضوع الشرط \

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$

$$= \frac{60}{100} \times \frac{85}{100} = \frac{5100}{10000} = 51\%$$

المحاضرة الرابعة

تابع نظرية الاحتمالات

استقلال الحوادث

يقال عن حادثين A و B انهما مستقلان إذا حدوث أحدهما لا يعتمد على حدوث الآخر والمعنى الرياضي لذلك هو:

$$P(A \setminus B) = P(A)$$
$$P(B \setminus A) = P(B)$$

وبالتالي فإن احتمال وقوعهما معاً مساوٍ لحاصل ضرب احتمال كل منهما ونكتب رياضياً :

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A \setminus B)$$
$$= P(B) \times P(A)$$

وكذلك :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B \setminus A)$$
$$= P(A) \times P(B)$$

مثال :

إذا كان A و B حادثين في S بحيث أن :

$$P(A) = 0.5 \quad ، \quad P(B) = 0.6 \quad ، \quad P(A \cup B) = 0.8$$

هل A و B حادثان مستقلان ؟

الحل :

أولاً : من المعلوم أنه لأي حادثتين A و B فإن :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.8 = 0.5 + 0.6 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = 0.5 + 0.6 - 0.8$$
$$= 0.3$$

ثانياً: نحسب حاصل ضرب احتمالي وقوع الحادثتين :

$$P(A) \times P(B) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$$

وبما أن العلاقة التالية تتحقق :

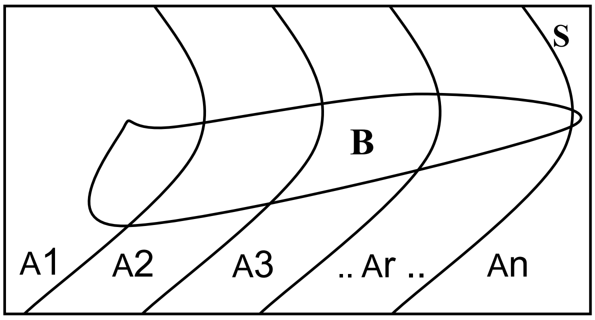
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

إذا الحادثان A و B مستقلان.

نظريــة بايــز (Bayes' Theorem)

إذا كانت A1, A2, …….. An مجموعة أحداث متنافية وكانت احتمالات حدوثها P(A1), P(A2), ……… P(An) وإذا كان هناك حدث B يحدث إذا حدث أي من الأحداث المتنافية أنظر الشكل بالأسفل ، فإن احتمال حدوث الحدث Ar بشرط حدوث B هو :

$$P(A_r | B) = \frac{P(A_r)P(B|A_r)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)} \qquad 1 \le r \le n$$



مثال:

مصنع يقوم بإنتاج سلعة معينة به ثلاث آلات ، تنتج الآلة الأولى ٢٠٪ من إجمالي إنتاج السلعة وتنتج الآلة الثانية نسبة ٣٥٪ والثالثة بنسبة ٤٥٪ ، فإذا كانت نسبة الإنتاج المعيب في الثلاث آلات على الترتيب هو ٢٪ و ٢.٥٪ و ٣٪ ، سحبت وحدة عشوائيا من إنتاج المصنع فوجد أنها معيبة ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الأولى؟

٢- أن تكون القطعة المعيبة من إنتاج الآلة الثانية؟

الحل:

نفرض أن :

A1= {إنتاج الآلة الأولى} P(A1)=0.2

A2= {إنتاج الآلة الثانية} P(A2)=0.35

A3= {إنتاج الآلة الثالثة} P(A3)=0.45

B= {إنتاج سلعة معينة}

فيكون بالتالي:

P(B|A1)=0.02

P(B|A2)=0.025

P(B|A3)=0.03

إذا أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الأولى إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.2\times 0.02}{(0.2\times 0.02)+(0.35\times 0.025)+(0.45\times 0.03)}=0.152$$

واحتمال أن تكون السلعة من إنتاج الآلة الثانية إذا علم - بشرط - أنها معيبة هو:

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.35\times 0.025}{(0.2\times 0.02)+(0.35\times 0.025)+(0.45\times 0.03)}=0.333$$

مثال:

مستشفى به أربعة أقسام، نسب عمال النظافة في هده الأقسام هي ٣٠٪ ، ٤٠٪ ، ٢٠٪ ، ١٠٪ على التوالي ، إذا كانت نسب العمال المدخنين بهذه الأقسام هي ١٥٪ ، ١٨٪ ، ١٢٪ ، ٩٪ على التوالي ، اختير عامل عشوائيا فوجد أنه مدخن ، احسب الاحتمالات التالية:

١- أن يكون العامل من القسم الأول؟

٢- أن يكون العامل من القسم الثاني؟

٣- أن لا يكون العامل من القسم الأول؟

الحل:

نفرض أن

A1= {أن يكون العامل من القسم الأول}	P(B|A1)=0.15	P(A1)=0.3
A2= {أن يكون العامل من القسم الثاني}	P(B|A2)=0.18	P(A2)=0.4
A3= {أن يكون العامل من القسم الثالث}	P(B|A3)=0.12	P(A3)=0.2
A4= {أن يكون العامل من القسم الرابع}	P(B|A4)=0.09	P(A4)=0.1

إذا احتمال أن يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.3\times0.15}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.3$$

واحتمال أن يكون العامل من القسم الثاني إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{\sum_{i=1}^{4}P(A_i)P(B|A_i)}=\frac{0.4\times0.18}{(0.3\times0.15)+(0.4\times0.18)+(0.2\times0.12)+(0.1\times0.09)}=0.48$$

واحتمال أن لا يكون العامل من القسم الأول إذا علم – بشرط – أنه مدخن :

$$P(A_1^c|B)=1-0.3=0.7$$