الفصل الرابع

حساب التكامل

يهدف هذا الفصل إلى التعرف على بعض طرائق حساب التكامل وتطبيقاته العملية .

١) العملة العكسية لعملية الاشتقاق

a) مفهوم التكامل غير المحدود : نعلم أن هناك الكثير من العمليات المتعاكسة فالطرح عكس الجمع والضرب عكس القسمة وهكذا ...

من التفاضل نعرف كيف نجد المشتقة $f'(x)$ للدالة $f(x)$ والسؤال الذي ينشأ الآن هو : إذا علمت المشتقة $f'(x)$ فكيف يمكن إيجاد الدالة الأصلية $f(x)$ ؟ فمثلا إذا أعطينا أن :

$$\frac{dy}{dx} = x^3$$

وطلب منا إيجاد y بدلالة x فنلاحظ أنه إذا كانت $y = \frac{x^4}{4} + c$ حيث c عدد ثابت فإن : $y' = x^3$

تسمى عملية إيجاد y إذا علمت مشتقتها y' بعملية التكامل فنقول أن :

$\frac{x^4}{4} + c$ هي تكامل x^3 بالنسبة ل x ونكتب : $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$

حيث c عدد ثابت

وكذلك إذا عرفنا $\frac{dy}{dx} = g(x)$ يمكن أن نكتب :

$$y = \int g(x) dx$$

وتسمى $\frac{dy}{dx} = g(x)$ معادلة تفاضلية

ويسمى $\int g(x)dx$ بالتكامل الغير محدود

b) قوانين التكامل

فيما يلي بعض القوانين التي تساعدنا في إيجاد التكاملات :

مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

1) $\int dx = x + c$

2) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

4) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

5) $\int e^x dx = e^x + c$

6) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

7) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$

8) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

9) $\int \sec^2(x)dx = \tan x + c$

10) $\int \csc^2(x)dx = -\cot x + c$

11) $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + c$

12) $\int \csc(x)\cot(x)dx = -\csc x + c$

الأمثلة :

مثال1 : أوجد $\int (7x+3)dx$

مثال 2 : $\int \frac{x^6+2x^2+1}{x^2}$

مثال 3 : $\int (3\sin(x)+2x)dx$

مثال 4 : $\int (\sin(x)+\cos(x))dx$

مثال 5 : $\int (x+3\sec^2(x))dx$

مثال 6 : $\int 5dx$

مثال 7 : $\int (x^{\frac{1}{2}}+4)dx$

مثال 8 : $\int (4e^x+x^{-1})dx$

مثال 9 : $\int (3x^{-2}+4x^{-1}+5)dx$

مثال 10 : $\int (x^{-2} + 2\sin(x) + 3\sqrt{x})dx$

مثال 11 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$5x^4 = \frac{dy}{dx}$$

مثال 12 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = x^3 y^{-2}$$

مثال 13 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 y^3$$

مثال 14 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = x^{-1}y$$

مثال 15 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$y' = xe^{-y}$$

مثال 16 : حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$\frac{dy}{dx} = 3e^{-y}$$

c) التكامل بالتعويض

في كثير من الحالات قد نواجه مسائل يطلب إيجاد التكامل $\int (f(x))^n g(x)dx$

حيث n عدد حقيقي

فإذا فرضنا أن : $u = f(x)$ **فإن تفاضل u هي :** $\frac{du}{dx} = f'(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$

فإذا فرضنا أن $f'(x) = ag(x)$ **حيث a ثابت فإن :** $\int (f(x))^n g(x) = \frac{1}{a}\int u^n du$

وهذا التكامل يمكن حسابه . يسمى هذا الأسلوب بالتكامل بالتعويض

مثال 17 : أوجد : $\int (x+1)^5 dx$

مثال 18 : أوجد : $\int (x^2+1)^3 x dx$

مثال 19 : $\int x^2 (x^3+1)^{\frac{1}{2}} dx$

مثال 20 : $\int \frac{1}{(3x+2)^2} dx$

مثال 21 : $\int (3x-5)^4 dx$

مثال 22 : $\int \frac{3x^2+2}{\sqrt{x^3+2x}}dx$

مثال 23 : $\int (x\sqrt{x^2+3})dx$

مثال 24 : $\int \sin(x)\cos(x)dx$

مثال 25 : $\int \sin^2(x)\cos(x)dx$

مثال 26 : $\int xe^{x^2}dx$

مثال 27 : $\int e^{-3x}dx$

مثال 28 : $\int \frac{2x}{1+x^2}dx$

مثال 29 : $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$

d) التكامل بالتجزيء

نعلم أن :

$$(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x) + g(x)\cdot f'(x)$$

أي أن :

$$f(x)\cdot g'(x) = (f(x)\cdot g(x))' - g(x)\cdot f'(x)$$

$$\Rightarrow \int f(x)\cdot g'(x)dx = \int (f(x)\cdot g(x))' - \int g(x)\cdot f'(x)dx$$

يسمى هذا الأسلوب أسلوب التكامل بالأجزاء

$$u\cdot v - \int v\,du$$

مثال 30 : $\int x(x+1)^9 dx$

مثال 31 : $\int (5x\sqrt{x+3})dx$

مثال 32 : $\int x\sin(x)dx$

مثال 33 : $\int x^2\sin(x)dx$

مثال 34 : $\int xe^x dx$

مثال 35 : $\int \ln(x)dx$

٢) التكامل المحدود :

مفهوم التكامل المحدود : إذا كانت F(x) تحقق $F'(x)=f(x)$ فإن :

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ويسمى هذا المقدار بالتكامل المحدود للدالة f(x)

على الفترة [a,b]

مثال 38 : $\int_1^2 (x^2-1)dx$

مثال 39 : $\int_0^2 (x+1)^3 dx$

خواص التكامل المحدود

$$1)\int_a^b f(x)dx = 0$$

$$2)\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$4)\int_a^b f_1(x)dx \le \int_a^b f_2(x)d$$

مثال (1) إذا كانت : $f(x)=\begin{cases} 3x+4, if\ 0\le x\le 2 \\ 5, if\ 2\le x\le 3 \end{cases}$ **أوجد** $\int_0^3 f(x)dx$

تمارين

$$1)\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$$

$$2)\int_0^2 x dx$$

$$3)\int_1^3 (x^2+x)dx$$

$$4)\int_1^2 \frac{1}{x}dx$$

$$5)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{3-2x}}dx$$

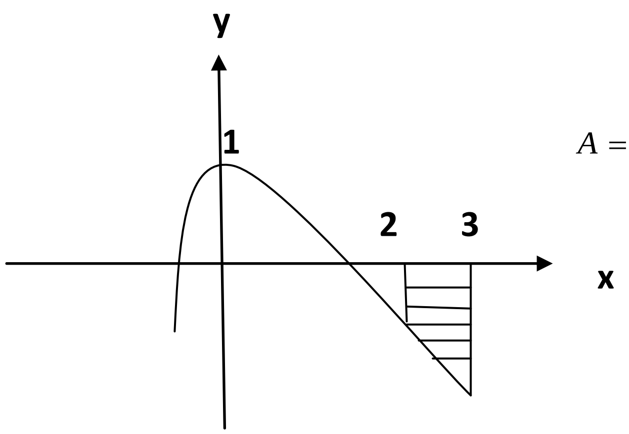
$$6)\int_{-1}^1 (x^2+x^3)dx$$

تطبيقات

١) تطبيقات على المساحة

أوجد المساحة المحصورة بين $f(x)=1-x^2$ **ومحور x والمستقيمين x=2 ، x=3**

الحل : نرسم الدالة



$$A=\int_2^3 (1-x^2)dx = \frac{16}{3}$$

تمرين : أوجد المساحة المحصورة بين $f(x)=x^2$ **ومحور x والمستقيمين x=1 وx=2**

تطبيقات اقتصادية

١) الدخل الحدي : إذا كان f(t) معدل الدخل بالريالات في السنة فيكون مجمل الدخل T خلال t من الزمن معطى بالعلاقة :

$$T=\int_0^t f(t)dt$$

مثال : إذا كان معدل الدخل عن رسوم الطلاب معطى بالعلاقة

$$f(t) = (t+1)^{\frac{-1}{2}}(90000)$$

حيث t هو الزمن بالسنوات فأحسب الدخل الكلي المتوقع من الرسوم خلال 3 سنوات

٢) القيمة الرأسمالية

لقد وضحنا سابقا أن إجمالي الريالات اليوم يصبح e^{tr} ريالا في t من السنوات بفائدة مركبة متواصلة قدرها r
وإذا كان f(t) معدل الدخل فإن القيمة الحالية على فترة من الزمن من صفر إلى t_1 معطاة بالعلاقة :

$$\int_0^{t_1} e^{-tr} f(t)dt$$

ويسمى هذا التكامل بالقيمة الرأسمالية

مثال : إذا أعتبرنا دخلا ثابتا مقداره 50 ريالا في الشهر على فترة 3 سنوات فما هي القيمة الرأسمالية لهذا الدخل إذا كانت الفائدة هي : 6% ؟
الحل :

٣) التحليل الحدي

لاحظنا سابقا أن الدخل الحدي يساوي $\frac{dT}{dx}$ عند x=n والآن :

$$T = \int \frac{dT}{dx} dx$$

مثال : إذا كان الدخل الحدي بالنسبة لمبيعات سيارات هو معطى بالعلاقة :

$$\frac{dT}{dx} = 60x^2 + 40x + 1$$

أوجد الدخل الكلي الناتج عن بيع 5 سيارات

الحل :