مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

وكالة التعلم الالكتروني والتعلم عن بعد
كلية الدراسات التطبيقية وخدمة المجتمع

الفصل الثاني

النهايات والاتصال :

مفهوم النهاية : مثال : لنأخذ الدالة $f(x)=\frac{x-1}{x-1}$ **وابحث عن قيمة الدالة وسلوكها بالقرب من العدد x=1**

- **إذا عوضنا عن x=1 في هذه الدالة نجد أ ن :** $f(1)=\frac{1-1}{1-1}=?$

وهذه ليس لها معنى .

وإذا كانت $x\neq 1$ **فإن** $f(x)=1$ **وتكون قيمة الدالة عند 1**

أي : غير معرفة .

وسندرس في هذا الجدول سلوك الدالة عند القرب من العدد x=1 علما أن x=1 لا ينتمي لمجال الدالة f .

X<1	F(x)	x>1	F(x)
0.5	1	1.05	1
o.9	1	1.01	1
0.99	1	1.001	1
0.999	1	1.0001	1

لهذا إذا اقتربت x من 1 بقيم أقل من 1 فإن f(x) تقترب من 1 والواقع في هذا المثال أنها تساوي 1 دائما .

ونقول إن نهاية f(x) من اليسار تساوي 1 عندما x تقترب من 1 من اليسار ونكتب :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=1$$

كما يتضح أيضا من الجدول أن :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=1$$

وفي هذا المثال نلاحظ :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

ومن المعلوم أنه إذا كانت :

$$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$$

فإننا نقول أن : $\lim_{x\to a} f(x)$ **غير موجودة**

- **تعريف النهاية اليسرى :**

إذا اقتربت الدالة من m عندما يزداد قرب x من a من الجهة اليمنى

$x > a, x \neq a$ **فإننا نقول أ ن نهاية الدالة اليمنى عند a هي m**

ونكتب :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = m$$

تمرين : أوجد نهاية الدالة (ابحث سلوك الدالة عند x=3 من اليمين واليسار)

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

نظرية :

تكون النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ **موجودة وتساوي** L **ونكتب :**

إذا وإذا فقط كانت: $\lim_{x\to a} f(x) = L$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

مثال : إذا كانت $f(x) = \begin{cases} 1, x > -1 \\ -1, x < -1 \end{cases}$ **فهل** $\lim_{x\to -1} f(x)$ **موجودة ؟**

الحل :

مثال : تكون النهاية موجودة إذا تحققت النظرية وهي : إذا كانت النهاية اليسرى تساوي النهاية اليمنى :

نكون الجدول التالي الذي يمثل سلوك الدالة عندما :

$x \to -1^+$ و $x \to -1^-$

X<-1	F(x)	x>-1	F(x)
-1.01	-1	-0.99	1
-1.001	-1	-0.999	1
-1.0001	-1	-0.9999	1

نلاحظ من الجدول أن :

$$\lim_{x \to \to -1^-} f(x) = -1$$

وأيضا $\lim_{x \to \to -1^+} f(x) = 1$

وبما أن النهاية اليسرى لا تساوي النهاية اليمنى فإن نهاية الدالة عند -1 غير موجودة

جبر النهايات

١) $\lim_{x\to a} c = c$ حيث c عدد ثابت ، $a \in R$

٢) $\lim_{x\to a} x = a$

مثال : احسب النهايات التالية :

a) $\lim_{x\to 1} 5$

b) $\lim_{x\to 0} -3$

c) $\lim_{x\to -2} x$

d) $\lim_{x\to 3} x$

نظرية : بفرض أن $\lim_{x\to a} f(x)$ ، $\lim_{x\to a} g(x)$ **موجودتان فإن :**

١) $\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$

٢) $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$

٣) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$

٤) $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ حيث $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

مثال : أوجد نهاية الدوال التالية :

١) $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)$

٢) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x+1}{x^2-2}$

نظرية : لأي كثيرة حدود ولكل $a\in R$ **فإن :**

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

نظرية : إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=L$ **، n عدد صحيح موجب فإن :**

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}=\sqrt[n]{L} \qquad L>0$$

مثال : احسب نهاية الدالة :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[5]{3x^2-2x}$$

الحل :

مثال : احسب $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$

الحل :

تمرين : احسب :

١) $\lim_{x\to -1} x^3$

٢) $\lim_{x\to 2}(3x+1)^4$

٣) $\lim_{x\to -3}(x^3-2x+1)^3$

٤) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{2x^2+3x+1}$

٥) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2+1}}$

نظرية : إذا كان b عددا ثابتا وكانت $\lim_{x\to a} f(x)=L$ **موجودة فإن :**

$$\lim_{x\to a} b^{f(x)} = b^{\lim_{x\to a} f(x)} = b^{L}$$

مثال : احسب $\lim_{x\to 2} e^{x}$

الحل : بتطبيق النظرية السابقة نجد :

نظرية إذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ **موجودة وموجبة فإن :**

$$\lim_{x\to a} \log_c f(x) = \log_c (\lim_{x\to c} f(x)) = \log_c L$$

مثال : أوجد $\lim_{x\to 2} \log(3x^{2}+5)$

الحل :

تمرين : أوجد

١) $\lim_{x\to 3} (e^{2x} - e^{x^{2}} + \log(x^{2}+5))$

٢) $\lim_{x\to 2} (e^{\sqrt{x}} \log(2x^{3}-1)$

ملاحظة مهمة :

إذا كانت الدالة f(x) معرفة وفق أكثر من قاعدة مثل :

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{2}+5, x \le 1 \\ 7x-2, x > 1 \end{cases}$$

وأردنا إيجاد $\lim_{x\to a} f(x)$ **فقد تنشأ إحدى ثلاث حالات هي :**

١) a تقع ضمن مجال القاعدة الأولى
٢) a تقع ضمن مجال القاعدة الثانية
٣) a تقع على الحد الفاصل بين المجالين

من خلال الدالة السابقة أوجد :

١) $\lim_{x\to 3} f(x)$

٢) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$

٣) $\lim_{x\to 1} f(x)$

نظرية (ساندويتش)

إذا كانت : $f(x)\le h(x)\le g(x)$ ، **وكان** $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=L$ **فإن** $\lim_{x\to a} h(x)=L$ **:**

مثال أوجد نهاية :

$$\lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})$$

الحل :

نظرية : $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ ، **حيث e العدد النايبيري**

مثال : **أوجد** $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$

الحل :

مثال : **أوجد** $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{3x}$

الحل :

مثال : **أوجد** $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

الحل

نظرية :

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

مثال : أوجد نهاية : $\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}$

تمرين أوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 7x}$$

الحل :

مثال : أوجد

$$\lim_{x\to o}\frac{\tan x}{x}$$

الحل :

*** مثال إذا كانت**

$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

فأوجد :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$$

الحل : نكون الجدول التالي الذي يبين سلوك الدالة عندما

$x\to 0^+$ و $x\to 0^-$

F(x)	X<0	F(x)	x>0
1	-1	1	1
100	-0.1	100	0.1
1000	-0.01	1000	0.01
1000000	-0.001	1000000	0.001

ونلاحظ أن قيم f(x) تزداد بدون حد عندما تقترب x من الصفر ونقول أن f(x) تؤول إلى مالانهاية ونرمز لها بالرمز ∞ عندما تقترب x من الصفر أي أن :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

- **نهاية المقادير غير المحدودة عند نقطة :**

نلاحظ أنه بإمكاننا الحصول على النهاية عن طريق تعويض ما تؤول إليه x . وفي كثي من الأحيان نحصل بالتعويض المباشر على القيمة $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ وفي هذه الحالة نوجد لأساليب للتخلص من المشكلة وتوضحها هذه الأمثلة :

١) أسلوب التحليل

مثال: أوجد $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

الحل : نقوم بعملية التحليل لأن هذا المقدار لو عوضنا عن قيمة x=1 لأصبح لدينا حالة عدم تعيين $\frac{0}{0}$

٢) أسلوب الضرب فى المرافق

مثال : أ،جد : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

الحل : حالة عدم تعيين

- **النهاية عندما** $x \to \infty$

مثال : أوجد:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+5x}{2x^2-4}$$

نظرية :

١) $\lim_{x\to+\infty} c = c$ ، $\lim_{x\to-\infty} c = c$ **حيث c عدد حقيقي**

٢) إذا كان ى عدد نسبي موجب وكان c عدد حقيقي فإن :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c}{x^n} = 0 \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x^n} = 0$$

مثال : أوجد:

١) $\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^{10}}$

٢) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{7}$

٣) $\lim_{x\to\infty} -5$

٤) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-6}{x^{\frac{2}{5}}}$

ملاحظة مهمة : إذا كان لدينا كثيرتي حدود $f(x)$ ، $g(x)$ ، وكان : $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

فإننا نقسم كل من البسط والمقام على x بأكبر قوة مع ملاحظة :

١) إذا كانت قوة البسط أكبر من قوة المقام فالنهاية تساوي ∞

٢) إذا كانت قوة المقام أكبر من قوة البسط فإنها تساوي الصفر

٣) أما إذا كانت تساوت قوة البسط مع قوة المقام فإن النهاية تساوي قسمة المعاملين للمتغير بأكبر قوة .

مثال : أحسب

١) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^5+4x+3}{3x^2+2x+1}$

٢) $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+x+1}{5x^6-2x^2+5}$

٣) $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+2x^3-3}{2x^4-5x^2+3x}$

تطبيقات على النهايات

١) الدخل :

مثال : إذا كان الدخل بالر يال لأحد مزارعي النخيل هو

$$f(x)=10000-10000e^{-0.010x}$$

حيث x تمثل عدد العمال الذين يعملون بالمزرعة ،

المطلوب

أ) أوجد الدخل عندما تكون x=30

ب) أوجد الدخل عندما تكون x=300

ج) أوجد أكبر دخل يتوقعه المزارع

الحل :

٢) الفائدة المستمرة :

افرض أن مبلغا من المال m قد وضع في بنك بسعر $p=100x$ **و أن الربح يضاف n مرة خلال العام الواحد ، لهذا فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام هي :**

$$s=m(1+\frac{x}{n})^n$$

وإذا سمحنا لعدد المرات n أن يؤول إلى ما لانهاية ، أي أن الفائدة مستمرة فإن جملة هذا المبلغ في نهاية العام :

$$\lim_{n\to\infty} s = m(\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n) = me^x$$

ويمثل هذا المقدار me^x قيمة المبلغ m بعد سنة من الآن .وكتعميم لذلك يكون لتصبح قيمة s بعد h من السنوات يعطى بالعلاقة :

$$m = se^{-nh}$$

مثال :

وضع 10 ريال بربح مستمر 5% فبعد كم سنة تصبح جملة هذا المبلغ 20 ريال ؟

الحل :

الاتصال

تعريف : نقول إن الدالة f(x) متصلة عند نقطة c إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية :

١) $f(c)$ **معرفة**

٢) $\lim_{x\to c} f(x)$ **موجودة**

٣) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أي من الشروط السابقة فإن الدالة f(x) غير متصلة عند c

تعريف : تكون الدالة f(x) متصلة في الفترة I إذا كانت متصلة عند جميع النقاط الواقعة في هذه الفترة .

مثال أثبت أن الدالة $f(x) = \begin{cases} x, x \neq 1 \\ 2, x = 1 \end{cases}$ **غير متصلة عند x=1**

الحل :

مثال : أثبت أن الدالة $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ **غير متصلة عندما x=-1**

الحل :

مثال : أثبت أن الدالة التالية $f(x)=\begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$ **متصلة عند x=0**

الحل :

مثال اثبت أن الدالة $f(x)=x$ **متصلة عند X=2**

الحل :

تمارين :

ابحث اتصال الدوال التالية :

١) $f(x)=\begin{cases} 2x-3, x \neq 3 \\ 2, x=3 \end{cases}$ **عند x=3**

٢) $f(x)=\frac{x^2+1}{2x}$ عند x=2

٣) $f(x)=\frac{1}{x-1}$ عند x=1