الفصل الأول

تعريف : الضرب الديكارتي

إذا كان لدينا المجموعة الغير خالية A وكذلك المجموعة B فإن حاصل الضرب A×B يسمى الضرب الديكارتي وهو مكون من أزواج مرتبة على الصورة (a , b) بحيث أن $a \in A$ **و** $b \in B$ **أي أن :** $A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$

مثال : إذا كان لدينا المجموعة $A = \{1,2,3\}$ **وكذلك المجموعة** $B = \{0,4,6\}$ **فأوجد حاصل الضرب الديكارتي**

الحل :

$$A \times B = \{(1,0),(1,4),(1,6),(2,0),(2,4),(2,6),(3,O),(3,4),(3,6)\}$$

تمرين : أوجد حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$ **إذا كان :** $X = \{0,1,2\}, Y = \{5,7\}$

ملاحظة مهمة : $A \times B \neq B \times A$

وضح ذلك في التمرين السابق .

الدوال

تعريف : الدالة

إذا كانت A, B **مجموعتين غير خاليتين فإن** f **تسمى دالة من** A **إلى** B **إذا كانت** f **مجموعة جزئية من** $A \times B$ **أي أن :** $f \subset A \times B$ **وكذلك يكون كل عنصر في المجموعة** A **مرتبطا بعنصر واحد فقط من المجموعة** B **.**

- **إذا كانت الدالة** f **دالة من** A **إلى** B **وكان الزوج المرتب** (a,b) **ينتمي للدالة** f **أي أن :** $(a,b) \in f$ **فإن b هي قيمة الدالة** f **عند** a

ونكتب $b = f(a)$ **وعندئذ تسمى b صورة** a

مثال : إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ **و** $B = \{4,5,6\}$ **فإن :** $f_1 = \{(1,4),(2,5),(3,6)\}$ **دالة من** A **إلى** B **وذلك : لأن** $f_1 \subset A \times B$

تمرين : حدد ما إذا كانت العلاقات التالية تمثل دوال مستخدما المجموعتين السابقتين في المثال السابق :

١ - $f_2 = \{(1,6),(2,4),(3,5)\}$

٢ - $f_3 = \{(1,4),(2,6)\}$

٣ - $f_4 = \{(1,4),(2,5),(2,6)\}$

في المثال السابق تسمى المجموعة A التي بدأت منها العلاقة بمجال الدالة وتسمى المجموعة B التي انتهت إليها العلاقة بالمجال المقابل .

أما مجموعة الصور فقط فتسمى مدى الدالة

مثال :إذا كان : $A = \{5,6\}$ **و** $B = \{1,3,7\}$ **ولدينا دالة** f **بحيث :** $f = \{(5,1),(6,7)\}$
فحدد المجال والمجال المقابل والمدى لهذه الدالة :

الحل : $D_f = A$ **المجال**

المجال المقابل = B

مجموعة الصور = المدى $R_f = \{1,7\}$

- **يمكننا أن نعبر عن الدالة بمعرفة مجالها المقابل ومجالها وصور عناصر المجال :**
  $f : A \to B, y = f(X)$

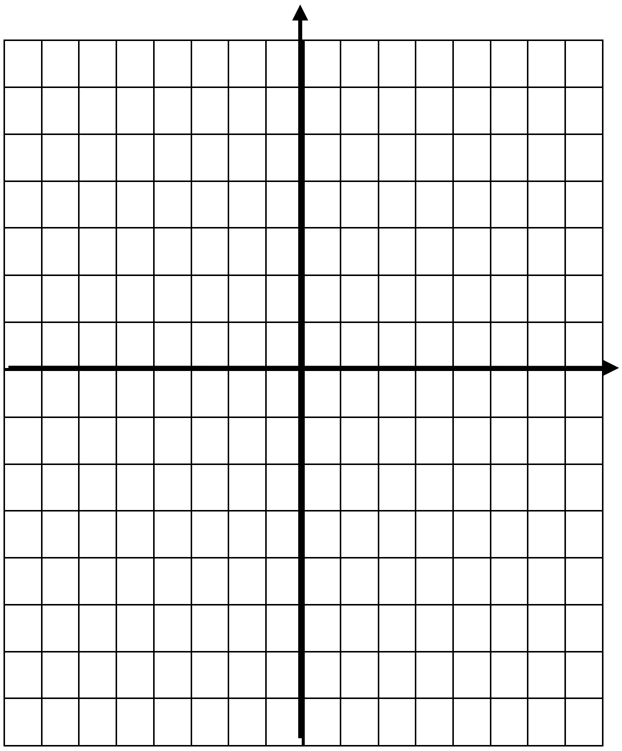
مثال : إذا كانت : $y = f(x) = x - 2$ **فأوجد** $f(0)$ **و** $f(-1)$ **و**
$f(2)$

ملاحظة : تتساوى الدالتان f ، g **إذا كان لهما نفس المجال وكذلك كل عنصر** x **في المجال يكون :** $f(x) = g(x)$

مثال : إذا كانت : $f_1(x) = x$ **حيث** $x \in R$ **وكانت :** $f_2(x) = 2x$ **فإن :**
$f_1(0) = f_2(0)$ **بينما** $f_1(1) \neq f_2(1)$
إذا يتضح لنا أن الدالتين غير متساويتان

التمثيل البياني للدوال :

من أنسب طرائق تمثيل الدوال هو أسلوب التمثيل البياني وللحصول على هذا التمثيل نبدأ برسم خطين مستقيمين متعامدين ونضع تدريجا مناسبا على كل منهما كما هو موضح



يسمى السطح الناتج من تحديد النقاط وتقاطعها بالمستوى البياني ويقسم إلى أربعة أرباع كما هو موضح في الشكل

لاحظ : أن النقطة a **هي عبارة عن زوج مرتب مكون من إحداثيين** $a=(2,1)$
وكذلك $b=(4,3)$ **ونلاحظ أن** $2\in x$
وكذلك $1\in Y$ **في النقطة** a ، **أما النقطة** b **فإن** $4\in x$ **و** $3\in Y$

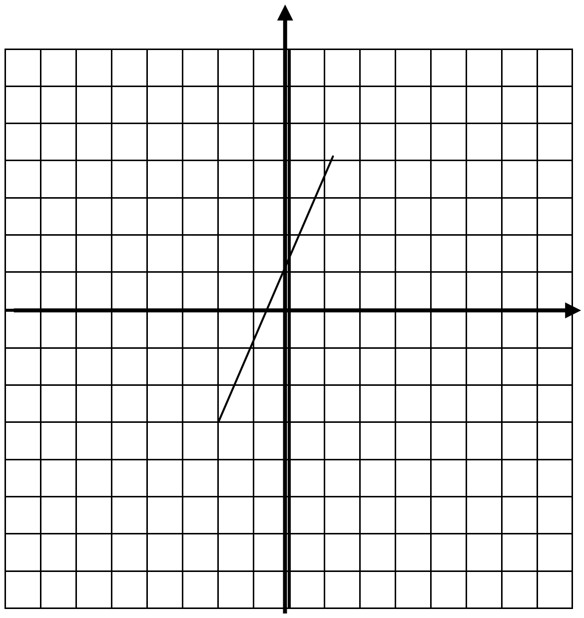
مثال : ارسم منحنى الدالة $f(x)=2x+1$

الحل : لكي نرسم هذه الدالة نكون أولا الجدول التالي لتسهيل عملية التمثيل

x	-2	-1	0	1	2
$y=f(x)$	-3	-1	1	3	5

ومن الواضح أن رسم الدالة يتحقق بعدد لانهائي من الأزواج المرتبة ولكن يكفي لرسم هذه الدالة نقطتان على الأقل :

هذا الجدول يحقق الرسم وبعدة أزواج مرتبة هي : $(-2,-3),(-1,-1),(0,1),(1,3),(2,5)$



تمرين : ارسم منحنى الدالة $f(x)=3x-1$

العمليات على الدوال

لتكن f_1 و f_2 دالتين فإن :

الجمع $(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x)$

الطرح $(f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x)$

الضرب $(f_1\cdot f_2)(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$

القسمة $\frac{f_1}{f_2}(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x)\neq 0$

التركيب $(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))$

مثال : إذا كانت : $f_1(x)=3x+5$ ، $f_2(x)=x^2+1$ فإن :

$$(f_1+f_2)(x)=3x+x^2+6$$

$$(f_1-f_2)(x)=3x-x^2+4$$

$$(f_1\cdot f_2)(x)=(3x+5)(x^2+1)=3x^3+3x+5x^2+5$$

$$(\frac{f_1}{f_2})(x)=\frac{3x+5}{x^2+1}, x^2+1\neq 0$$

$$(f_1\circ f_2)(x)=f_1(f_2(x))=3(x^2+1)+5=3x^2+8$$

معكوس الدالة

إذا كانت $y = f_1(x)$ دالة فإن معكوسها يعني ايجاد x كدالة في y أي أن :

$x = f_2(y)$ فمثلا إذا كانت :

$y = f_1(x) = 3x + 1$ فإن :

$x = \frac{y-1}{3} = f_2(y)$ وهذا معكوس f_1

تمارين :

١) إذا كانت $f(x) = 2x^3 + x - 1$ فأوجد :
$f(0), f(-1), f(2)$

٢) مثل الدالة $y = 2x - 3$ في المستوى البياني

٣) عين النقاط التالية على السطح البياني
$A = (0,-2), B = (-1,3), C = (-2,-3)$

٤) إذا كانت $f_1(x) = x + 1, f_2(x) = x^2$ أوجد :

١) $(f_1 + f_2)(x) =$

٢) $(f_1 \cdot f_2)(x) =$

٣) $(f_1 \div f_2)(x) =$

٤) $(f_1 \circ f_2)(x) =$

٥) $(f_1 - f_2)(x) =$

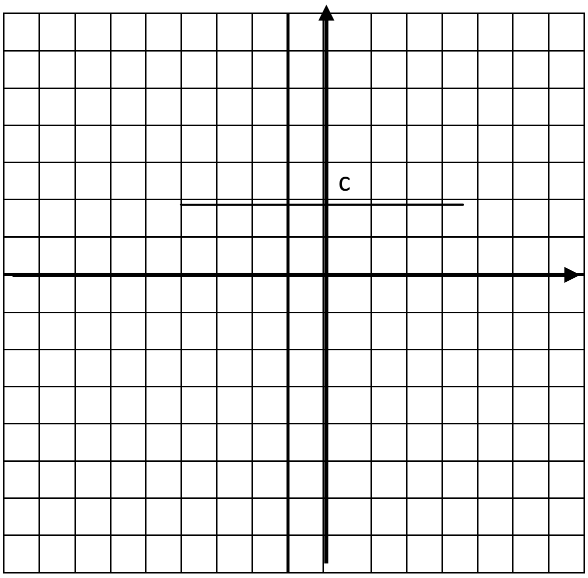
٦) معكوس الدالة f_1

بعض أنواع الدوال

١) الدالة الثابتة :

تسمى f دالة ثابتة إذا كان مدى هذه الدالة مجموعة أحادية مكونة من عنصر واحد فقط. فمثلا إذا كانت $f(x)=4$ حيث x عدد حقيقي فهذا يعني أنه مهما كانت قيمة x فإن قيمة $f(x)$ تساوي 4 دائما فمثلا $f(0)=4$ ، $f(1)=4$ ، $f(-2)=4$ وهكذا ...

ومن الواضح أن بيان هذه الدالة الثابتة $f(x)=c$ هو خط مستقيم يوازي محور x



تمرين :

مثل بيانيا الدوال الثابتة التالية :

$f(x)=-3$ و $f(x)=\frac{1}{2}$ و $f(x)=0$

٢) الدالة الخطية

هي الدالة التي على الصورة $f(x) = mx + c$ حيث m ، c عددان حقيقيان وبطبيعة الحال هذه الدالة تمثل خطا مستقيما كما رأينا في مثال سابق .

تمرين : مثل الدالة التالية في المستوى البياني
$f(x) = 2x + 1$

سنتعرف لاحقا على معادلة الخط المستقيم وأشكالها المختلفة وتطبيقاتها الاقتصادية حسب الخطة .

ميل المستقيم

تعريف : ميل المستقيم هو نسبة ارتفاعه العمودي إلى المسافة الأفقية

الميل = الارتفاع العمودي ÷ المسافة الأفقية

مفهوم أساسي :
الميل m لمستقيم يحتوي النقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ يعطى بالقانون :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

ملاحظة مهمة :
إذا كان ميل المستقيم موجبا فإن المستقيم يكون صاعدا عندما تتحرك من اليسار إلى اليمين أي أن الدالة الخطية تزايدية أما إذا كان ميل المستقيم سالبا فإن المستقيم يكون نازلا عندما تتحرك من اليسار إلى اليمين أي أن الدالة الخطية تناقصية .

مثال : أوجد ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين : $A = (2,3), B = (-1,2)$ وهل المستقيم صاعدا أم نازلا ؟

الحل : الميل = m

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, x_1 \neq x_2$$

$$m = \frac{2-3}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$ وبما أن الميل موجب فإن المستقيم صاعدا

يستعمل ميل المستقيم لوصف معدل التغير (كيف تتغير الكمية مع الزمن)

مثال تطبيقي :

إذا كانت مبيعات إحدى الشركات 20000 سيارة في عام 2011 م وكانت مبيعاتها عام 2012م قد بلغت 32000 سيارة فإذا حافظت هذه الشركة على نفس المعدل من الزيادة فكم يكون عدد مبيعاتها من السيارات عام 2015م ؟

الحل : نفرض أن معدل التغير هو m

$$m = 32000 - 20000 = 12000$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$(x_1, y_1) = (2011, 20000)$$

$$(x_2, y_2) = (2015, y_2)$$

$$m = 12000 = \frac{y_2 - 20000}{2015 - 2011} = \frac{y_2 - 20000}{4}$$

$$12000 \times 4 = y_2 - 20000$$

إذا $y_2 = 48000 + 20000 = 68000$

إذا عدد السيارات في عام 2015 سيكون 68000 سيارة

تمرين على المثال السابق :

احسب عدد الطاولات المصنعة عام 2012 م إذا كان المصنع قد أنتج 8000 طاولة عام 2003 م ثم أنتج 12000 طاولة في عام 2004 م وحافظ على نفس المعدل من الإنتاج حتى هذا العام .

معادلة الخط المستقيم

يمكننا كتابة معادلة المستقيم إذا علم أي مما يلي :

- الميل والمقطع من محور y
- الميل ونقطة على المستقيم
- نقطتان على المستقيم

مثال :

أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 2 ويقطع محور y عند النقطة $(0,3)$

الحل : معادلة المستقيم هي $y = mx + c$ حيث c المقطع على محور y و m الميل

وبالتعويض عن المعطيات في السؤال نحصل على المعادلة $y = 2x + 3$

تمرين : أكتب معادلة المستقيم الذي ميله -3 ويقطع محور y عند النقطة $(0,2)$

مثال :

أكتب معادلة المستقيم الذي ميله 5 ويمر في النقطة $(2,3)$

الحل :

يمكن كتابة المعادلة بهذه الطريقة : $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

$$y - 3 = 5(x - 2)$$

$$y - 3 = 5x - 10$$

$$y = 5x - 7$$

تمرين : أكتب معادلة المستقيم الذي ميله -2 ويمر بالنقطة $(1,3)$

مثال :

أكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين $(2,5)$ و $(-4,2)$.

الحل :

أولا علينا إيجاد ميل هذا المستقيم

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-5}{-4-2}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$$

الآن نعوض في المعادلة :

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-5=\frac{1}{2}(x-2)$$
$$y-5=\frac{1}{2}x-1$$
$$y=\frac{1}{2}x+4$$

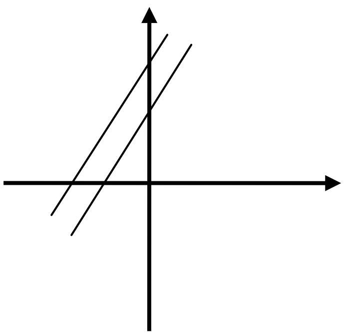
تمرين :

أكتب معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين : $(-3,1),(2,5)$

المستقيمان المتوازيان

- يتوازى مستقيمان إذا كان لهما نفس الميل أي أن :

$$y_1=m_1x+c_1$$
$$y_2=m_2x+c_2$$



المستقيمان متوازيان إذا وفقط إذا كان $m_1=m_2$

$$y_1//y_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$$

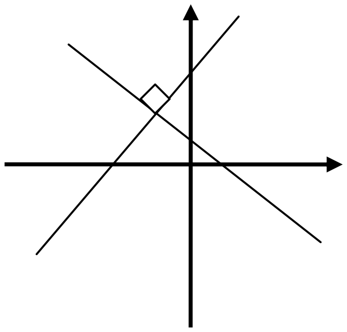
مثال : وضح هل المستقيمان التاليان متوازيان ولماذا ؟

$$y_1=3x+5$$
$$y_2=3x-2$$

الحل : المستقيمان متوازيان لأن لهما نفس الميل ويساوي في المعادلتين 3

تمرين : أكتب معادلة مستقيم يوازي المستقيم الذي معادلته $y = -2x + 4$

المستقيمان المتعامدان



يتعامد المستقيمان إذا كان حاصل ضرب ميليهما يساوي 1-

أي أن :

المستقيمان متعامدان إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال :

أوجد معادلة المستقيم العمودي على المستقيم الذي معادلته $y = 3x + 2$ ويمر في النقطة $(1, 2)$

الحل : $m_1 = 3$ وبالتالي $m_2 = \frac{-1}{3}$

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

حل نظام من المعادلات من الدرجة الأولى في مجهولين

تعتبر المعادلة التي تحتوي على مجهولين أو أكثر من الدرجة الأولى إذا كان أس كل منها واحد فمثلا :

المعادلة $3x^2 + 2y = 1$ ليست من الدرجة الأولى.

- سنعرض ثلاث طرق لحل نظام من معادلات الدرجة الأولى :

١) طريقة التعويض

وفي هذه الطريقة نقوم بإيجاد قيمة أحد المجاهيل في معادلة بدلالة المجهول الآخر ثم نعوض بهذه القيمة في المعادلة الأخرى .

مثال :

حل النظام التالي باستخدام التعويض :

$$3x + 6y = 33$$
$$2x - 4y = -10$$

الحل :

من المعادلة الأولى نجد أن : $x = 11 - 2y$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن

$$2(11 - 2y) - 4y = -10$$
$$y = 4$$

وبتعويض هذه القيمة في إحدى المعالتين نجد أن :

$$2x - 16 = -10$$
$$x = 3$$

وبهذا نكون قد وجدنا حلا للنظام هو

$$x = 3, y = 4$$

تمرين :

حل النظام التالي بطريقة التعويض

$$x - 2y = 1$$
$$2x - y = 5$$

٢) طريقة الحذف :

وفي هذه الطريقة نبدأ بحذف أحد المجاهيل من المعادلتين وبالتالي نحصل على معادلة من الدرجة الأولى في مجهول واحد نحلها ثم نجد قيمة المجهول التالي باستعمال أسلوب التعويض

مثال : حل النظام التالي باستخدام طريقة الحذف :

$$2x - 3y = 2$$
$$x + 3y = 4$$

الحل:

نقوم بجمع المعادلتين فنحصل على

$$3x = 6$$

ومنها نحصل على قيمة x

$$x = 2$$

نقوم بالتعويض عن x في المعادلة الثانية

$$2 + 3y = 4$$
$$3y = 4 - 2 = 2$$
$$y = \frac{2}{3}$$

وبهذا نكون قد وجدنا حلا للنظام هو : $y = \frac{2}{3}, x = 2$

تمرين : حل النظام التالي بطريقة الحذف :

$$3x - y = 2$$
$$2x + y = 3$$

٣) طريقة الرسم البياني :

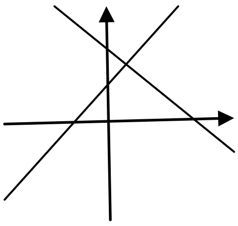
وفي هذه الطريقة نرسم الخطين المستقيمين على المستوى الاحداثي فيكون نقطة تقاطعهما هو الحل.

مثال :

حل النظام التالي باستخدام الرسم البياني

$$2x + 3y = 8$$
$$x - y = -1$$

الحل : نقوم برسم المستقيمين كما تم توضيحه سابقا :



ومن ملاحظة الرسم نجد أن المستقيمين يتقاطعان في النقطة $(1,2)$
وبهذا تكون هذه النقطة هي حل النظام

تمرين :

حل النظام التالي باستخدام الرسم البياني

$$x + y = 1$$
$$2x - y = 2$$

- المسافة بين نقطتين :

تعطى المسافة بين نقطتين حسب القانون التالي : $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

حيث (x_1, y_1) النقطة الأولى و
(x_2, y_2) النقطة الثانية

تمرين : احسب المسافة بين النقطتين :

$$(-1,5),(2,3)$$

تطبيقات اقتصادية على الدوال الخطية

١ ـ دوال الطلب :

من المعلوم من الناحية الاقتصادية أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها والبحث عن البديل .

مثال : إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي :

$$q_d = 25 - 5p$$

حيث q_d ترمز للكمية المطلوبة

و p ترمز للسعر

فأوجد :

١ ـ الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $p = 3$ ريالات

٢ ـ سعر وحدة السلعة إذا كانت الكمية المطلوبة $q_d = 18$ وحدة

٣ ـ الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت بدون مقابل أي أن : $p = 0$

٤ ـ أعلى سعر يمكن أن يدفعه شخص لهذه السلعة

الحل :

١ ـ عندما $p = 3$ فإن :

$$q_d = 25 - 15 = 10$$

الكمية المطلوبة 10 وحدات

٢ ـ عندما $q_d = 18$ فإن :

$$18 = 25 - 5p$$

$p = \frac{7}{5}$ ريالا

٣ ـ عندما $p = 0$

فإن : $q_d = 25$ وحدة

٤ ـ أعلى سعر يمكن أن يدفع عندما $q_d = 0$

وعندها $p = 5$ ريالا

2) دوال العرض (الإنتاج) الخطية

من المعلوم من الناحية الاقتصادية أن هناك تناسبا طرديا بين الكميات المنتجة والأسعار وتسمى الدالة التي تربط هذين المتغيرين دالة العرض (الانتاج) الخطية

وتأخذ هذه الدالة الصورة :

$q_s = a + bp$

حيث a,b ثابتان

q_s الكمية المعروضة p سعر الوحدة

مثال :

إذا كانت : $q_s = 3p - 2$

فأوجد :

١ - q_s **إذا كانت** $p = 5$ **ريالا**

٢ - p **إذا كانت** $q_s = 10$ **وحدة**

٣ - **أقل سعر يمكن أن تباع به وحدة السلعة لتفي بحاجة الانتاج**

الحل :

١ - **عندما** $p = 5$ **فإن :** $q_s = 15 - 2 = 13$

$q_s = 13$ **وحدة**

٢ - **عندما** $q_s = 10$ **فإن :**

$10 = 3p - 2$

$p = 4$ **ريالا**

٣ - **يحدث أقل سعر يمكن أن تباع به السلعة عندما** $q_s = 0$

$0 = 3p - 2$

$\frac{2}{3} = p$ **ريالا**

٤) التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين :

يحدث التوازن في السوق الحر إذا كانت كمية العرض من سلعة ما تساوي كمية الطلب منها . وهذه الحقيقة تعين سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن :

مثال : إذا علمت أن دالة الطلب على سلعة معينة هي :

$$q_d = 2 - p$$

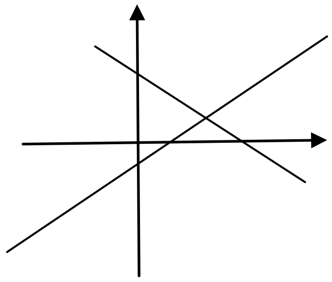
وأن دالة العرض لنفس السلعة هي : $q_s = p - 1$

فأوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن جبريا وبيانيا :

الحل : يوضح الشكل المجاور

التمثيل البياني لدالتي العرض والطلب

ومنه يتبين أن التوازن في السوق يحدث عندما : $q_d = q_s$



وذلك عندما $p = \frac{3}{2}, q = \frac{1}{2}$

ويمكن الوصول لنفس النتيجة بحل المعادلة $2 - p = p - 1$

ثم التعويض في إحدى دالتي العرض أو الطلب لإيجاد q

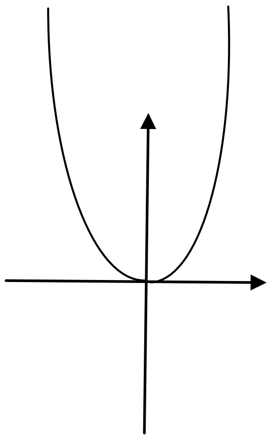
٤ ـ الدوال الزوجية والدوال الفردية

تعريف :

تسمى الدالة $y = f(x)$ دالة زوجية إذا تحقق الشرط التالي :

$$f(x) = f(-x)$$

لكل قيم x في مجال الدالة . ومن خصائص الدوال الزوجية أن منحنى الدالة يكون متماثلا حول محور y .



مثال : حدد ما إذا كانت الدالة التالية زوجية أم لا

$$f(x) = x^2$$

الحل : نطبق الشرط المعطى لكل x نضع $-x$

$$f(-x) = (-x)^2$$

$$f(-x) = x^2 = f(x)$$

إذا الدالة زوجية ويمكن رسمها كالتالي :

واضح من الرسم أن الدالة متماثلة حول محور y

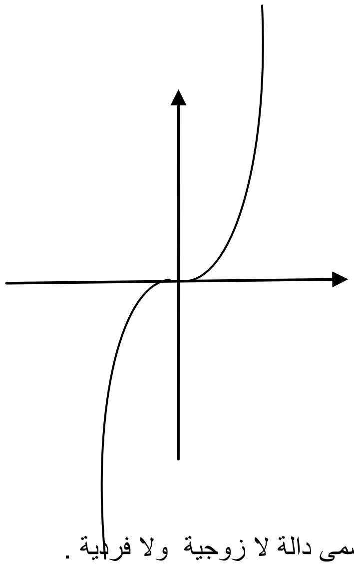
تمرين :
حدد ما إذا كانت الدالة التالية زوجية أم لا

$$f(x)=x^2+2$$

تعريف : تسمى الدالة $y=f(x)$ دالة فردية إذا كانت $f(-x)=-f(x)$ لكل قيم x في مجال الدالة .

ومن خصائص هذه الدالة أن منحنى الرسم يكون متماثلا حول نقطة الأصل :

مثال : تحقق من كون الدالة $f(x)=x^3$ دالة فردية



الحل : بتطبيق الشرط نجد أن :

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

إذا الدالة فردية

وبرسم الدالة يتضح التماثل حول نقطة الأصل :

تمرين : تحقق من أن الدالة $f(x)=x^3-1$ دالة فردية

ملاحظة الدالة التي لا يتحقق فيها الشرطان الخاصة بالدالة الزوجية والدالة الفردية تسمى دالة لا زوجية ولا فردية .

تمرين : حدد نوع الدوال التالية كونها زوجية أو فردية أو لا زوجية ولا فردية

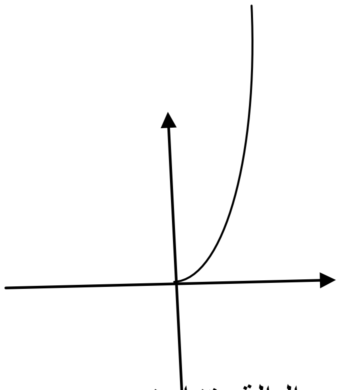
١) $f(x)=x^3+2x+1$

٢) $f(x)=x^4+x^2+2$

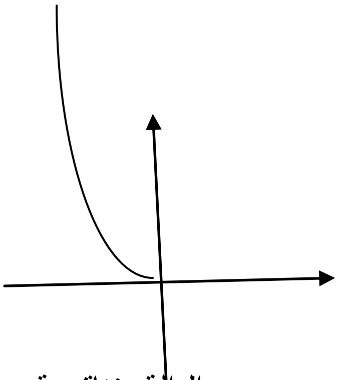
٤ ـ الدوال التزايدية والدوال التناقصية

تعريف : تسمى الدالة $y=f(x)$ دالة تزايدية على الفترة $I=[a,b]$
إذا تحقق الشرط التالي : $f(a)<f(b)$ ، $a<b$ ، لكل $a,b\in I$

- وتكون الدالة متناقصة على الفترة $I=[a,b]$ إذا تحقق: $f(a)>f(b)$ ، $a<b$



الدالة متزايدة



الدالة متناقصة

مثال : حدد نوع الدالة كونها تزايدية أو تناقصية على الفترة $[1,2]$

١) $f(x)=x^2+1$ ، 2) $f(x)=-2x+3$

الحل :

١) الدالة $f(x)=x^2+1$ على الفترة $[1,2]$

نطبق القاعدة

$f(1)=1+1=2$

$f(2)=4+1=5$

إذا $f(1)<f(2)$ الدالة متزايدة

٢) الدالة : $f(x)=-2x+3$ على الفترة $[1,2]$

نطبق القاعدة

$f(1)=-2+3=1$

$f(2)=-4+3=-1$

$f(1)<f(2)$

إذا الدالة متناقصة

٥ ـ الدوال ضمنية والدوال الصريحة

تعريف : الدالة الصريحة هي الدالة التي يمكن كتابتها صراحة كدالة في المتغير x

أي أن : $y = f(x)$

مثال : الدوال التالية كلها صريحة :

$y = f(x) = x^2 + 2x + 1$ ، $y = 2x - 2$ ، $y = x^3 + x^2 + 2$

- أما الدوال الضمنية : فهي الدالة الغير معبر عنها كدالة في x

مثال على الدوال الضمنية :

$xy = x^2 - 2y$ ، $x^2y^3 = +3x = 2 + y$ ، $x + y^2 = 12x$

٦ ـ الدوال المثلثية

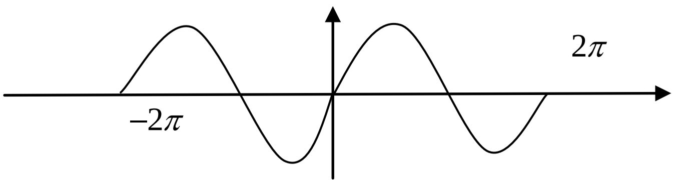
تنشأ هذه الدوال في الاقتصاد عند دراسة المسلسلات الزمنية للأسعار أو للنمو الاقتصادي والتجاري والصناعي والزراعي وذلك بسبب حدوث ذبذبات (هبوط وارتفاع) لعدة عوامل تؤثر عليها مرور الزمن مثل الزيادة السكانية والقوى العاملة والأجور والأمطار والدخل القومي وغيرها .

لهذا سنتعرض بشكل مبسط لهذه الدوال .

وهناك دالتان أساسيتان هما :

١ ـ دالة الجيب $y = \sin(x)$

ويمثل الشكل التالي منحنى هذه الدالة في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$ حيث π هي النسبة التقريبية .



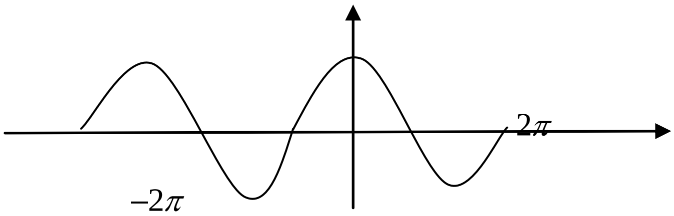
$y = f(x) = \sin(x)$

وواضح من الشكل أن : $-1 \le \sin(x) \le 1$ أي محصورة على محور y بين 1 و -1

كذلك هذا المنحنى يكرر نفسه كل دورة قدرها 2π

٢ - دالة جيب التمام $y = \cos(x)$

ويمثل الشكل التالي هذه الدالة



و هذه الدالة لها نفس خصائص دالة الجيب .

- هناك دوال مثلثية أخرى يمكن أن تستنتج من هاتين الدالتين مثل :

٣ - **دالة الظل** $y = \tan(x)$ حيث

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \text{ ، } \cos(x) \neq 0$$

٤ - دالة ظل التمام $y = \cot(x)$ حيث $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ ، $\sin(x) \neq 0$

كذلك $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$ ، $\tan(x) \neq 0$

٥ - دالة القاطع $y = \sec(x)$ حيث $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ ، $\cos(x) \neq 0$

ودالة القاطع مقلوب دالة جيب التمام

٦ - دالة قاطع التمام $y = \csc(x)$

$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$ ، حيث $\sin(x) \neq 0$

و هذه الدالة مقلوب دالة الجيب

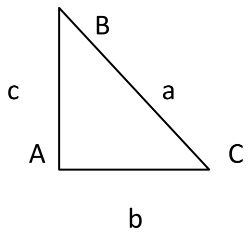
ومن أهم العلاقات التي تربط بين هذه الدوال هي :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

أما التفسير الهندسي لهذه الدوال فهو كما يلي :

- إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A كما في الشكل

فإذا أخذنا الزاوية c فإن الضلع c يسمى المقابل والضلع b يسمى المجاور أما الضلع a فهو الوتر
ويمكننا أن نعرف النسب المثلثية للزاوية كالتالي :



$$= \sin(c) = \frac{c}{a}$$

$$\cos(c) = \frac{b}{a}$$

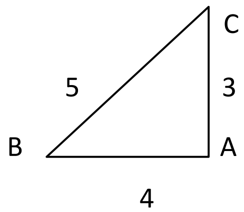
$$\tan(c) = \frac{c}{b}$$

مثال : إذا كان ABC مثلث قائم الزاوية في A بحيث أن :

$|AC| = 3cm$ ، $|AB| = 4cm$

أوجد : $\tan(b)$ ، $\sin(b)$ ، $\cos(b)$

الحل :
من فيثاغورس



$$|BC|^2 = |AC|^2 + |BA|^2$$

$$|BC|^2 = 25$$

$$|BC| = 5cm$$

$\tan(B) = \frac{3}{4}$ ، $\sin(B) = \frac{3}{5}$ ، $\cos(B) = \frac{4}{5}$

٧ - دالة القيمة المطلقة

تعريف :

تعرف دالة القيمة المطلقة على النحو التالي :

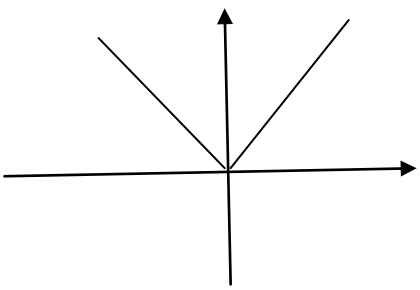
$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, x>0 \\ 0, x=0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$ ، حيث $x \in R$

مثال : ارسم منحنى الدالة $f(x)=|x|$

الحل : أولا نعيد تعريف الدالة

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, x\geq 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	2	1	0	1	2



مجال الدالة هو R

بينما المدى هو $R^{+}\cup\{0\}$

تمرين : ارسم منحنى الدالة $f(x)=|x|+1$

٨ ـ الدالة الأسية

تعريف :

ليكن $a \in R$ ، a عددا حقيقيا ، $a > 0$ ، $a \neq 1$

وتكتب على الصورة :

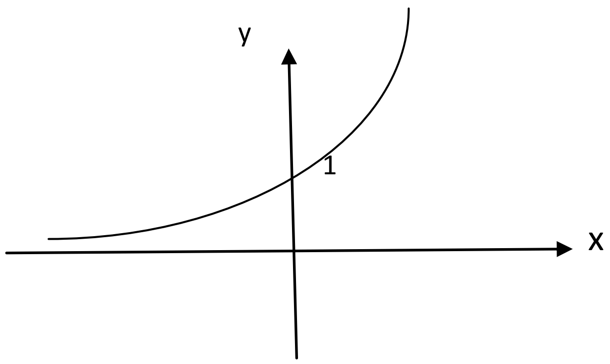
$f(x) = a^x$ حيث $x \in R$

مثال : ارسم منحنى الدالة $f(x) = 2^x$

الحل : أولا نكون جدولا كما يلي :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

ثم نحدد الأزواج المرتبة على المستوى الاحداثي كما يلي



من خصائص هذه الدالة أن :

- المنحنى دائما يقطع محور y عند النقطة $(0,1)$
- كذلك هي دالة تزايدية إذا كانت $a > 1$
- وهي تناقصية إذا كانت $0 < a < 1$

تمرين : 1- ارسم منحنى الدالة $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

٢ ـ ارسم منحنى الدالة $f(x) = 3^x$

ومن خصائص الدالة الأسية كذلك مما يلي :

إذا كانت $a \neq 1$ ، $b \neq 1$ أعداد حقيقية موجبة وكذلك $x, y \in R$ فإن :

$$1) a^x a^y = a^{x+y}$$

$$2) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$3) (a^x)^y = a^{xy}$$

$$4) (ab)^x = a^x b^x$$

$$5) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$6) a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$$

- حل المعادلات الأسية :

يعتمد حل المعادلات الأسية على كتابة المعادلات على الصورة $a^x = a^b$ وعندما تكون $x = b$ بشرط أن : $a \neq 0$ ، $a \neq 1$

مثال : حل المعادلة التالية :

$$3^x = 81$$

الحل : نحلل 81

$$3^x = 3^4$$

وبما أن الدالة الأسية دالة واحد لواحد

فإن : $x = 4$

تمرين : حل المعادلة الأسية

$$2^x = 32$$

تطبيقات اقتصادية

- **الفائدة المركبة والمستمرة :**

افرض أن مستثمرا يحصل على ربح بمعدل $100x\,\%$ سنويا فإذا وضع هذا المستثمر مبلغ m ريالا عند بداية العام فإن رصيده سيصبح m(1+x) ريالا عند نهاية السنة أما إذا كان الربح يضاف كل ستة أشهر مرتين فإن رصيده

وإذا فرضنا أن الربح يضاف n مرة في السنة سيصبح $m(1+\frac{x}{2})$

فإن رصيد المستثمر سيكون $m(1+\frac{x}{n})^n$ ريالا في السنة .

وبشكل عام إذا كان الربح $x\%$ سنويا وكان الربح يضاف كل سنة مرة فبعد n من السنوات تصبح جملة المبلغ المستثمر $T=m(1+\frac{x}{100})^n$.

وإذا سمحنا للعدد n أن يؤول إلى مالانهاية فإن رصيد هذا المستثمر سيؤدي إلى me^x وهي الدالة الأسية النابيبرية .

أما إذا كان الربح سنويا وكان الربح يضاف كل سنة مرة واحدة فبعد n من السنوات تصبح جملة المبلغ المستثمر m هي :

$$T=m(1+\frac{x}{100})^n$$

مثال :

وضع شخص مبلغ 1000 ريال في مصرف بفائدة 5% فما جملة هذا المبلغ بعد 4 سنوات ؟

الحل :

$$T=m(1+\frac{x}{100})^n$$

$$T=1000(1+\frac{5}{100})^4$$

$T=1215,5$ من الريالات

٩ - الدالة اللوغاريتمية :

تعريف : إذا كان a عددا حقيقيا حيث a>0 و $a\neq 1$ فإن لوغاريتم x للأساس a يعرف كالتالي :

$$y=\log_a x \Leftrightarrow x=a^y$$

مثال : $\log_3 27=3$ أي أن : $27=3^3$

ومن أهم قوانين اللوغاريتمات :

1) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$

2) $\log_a(\frac{x}{y})=\log_a x-\log_a y$

3) $\log_a x^n=n\log_a x$

تمرين : بدون استخدام الحاسبة ، مستخدما قوانين اللوغاريتمات احسب ما يلي :

1) $\log_2(8\times16)=$

2) $\log_3(\frac{9}{81})=$

3) $\log_2(32)^3=$

- من أهم الدوال اللوغاريتمية هي الدالة المسماة بالدالة اللوغاريتمية النابيرية التي أساسها العدد النابيري e والذي يساوي تقريبا $e\simeq 2,718$ وتسمى هذه الدالة بالدالة اللوغاريتمية الطبيعية ويرمز لها بالرمز :
$$\ln(x)=\log_e x$$
- أما الدالة اللوغاريتمية التي أساسها العدد 10 تسمى دالة لوغاريتمية عادية ويرمز لها بالرمز :
$$\log(x)=\log_{10}(x)$$

مثال : حل المعادلة اللوغاريتمية الآتية : $\log_5(x)=3$

الحل : $\log_5(x)=3\Leftrightarrow x=5^3$

$$x=125$$

تمرين : حل المعادلة التالية : $\log_x 4=2$

مثال : حل المعادلة التالية : $\log_5(x+2)-\log_5(2x-1)=0$

الحل :

$$\log_5(x+2)-\log_5(2x-1)$$
$$\Rightarrow x+2=2x-1\Rightarrow x=3$$