

(مبادئ الرياضيات)

للدكتور: ملفي الرشيد

المحاضرة التمهيدية

محتوى المقرر:-

- 1/ مقدمة : الأعداد , القيم المطلقة
- 2/ التحليل: العامل المشترك, الفرق بين مربعين, الفرق بين مكعبين, مجموع المكعبين, المقدار الثلاثي
- 3/ الأسس: مفهومها, قوانينها, أنواعها (صحيحة, كسرية)
- 4/ اللوغاريتمات: قوانين, عمليات حسابية, تطبيقاتها
- 5/ التباديل و التوافيق: المفاهيم, طرق الحسابات, العلاقة بينهما
- 6/ نظرية ذات الحدين: القانون الأساسي, إيجاد المفكوك, إيجاد الحد العام, إيجاد الحد لأس معين.
- 7/ حل المعادلات: المعادلات الخطية في مجهول واحد, مجهولين, المعادلات الآنية, معادلات من الدرجة الثانية.
- 8/ المتواليات, المحددات, المصفوفات

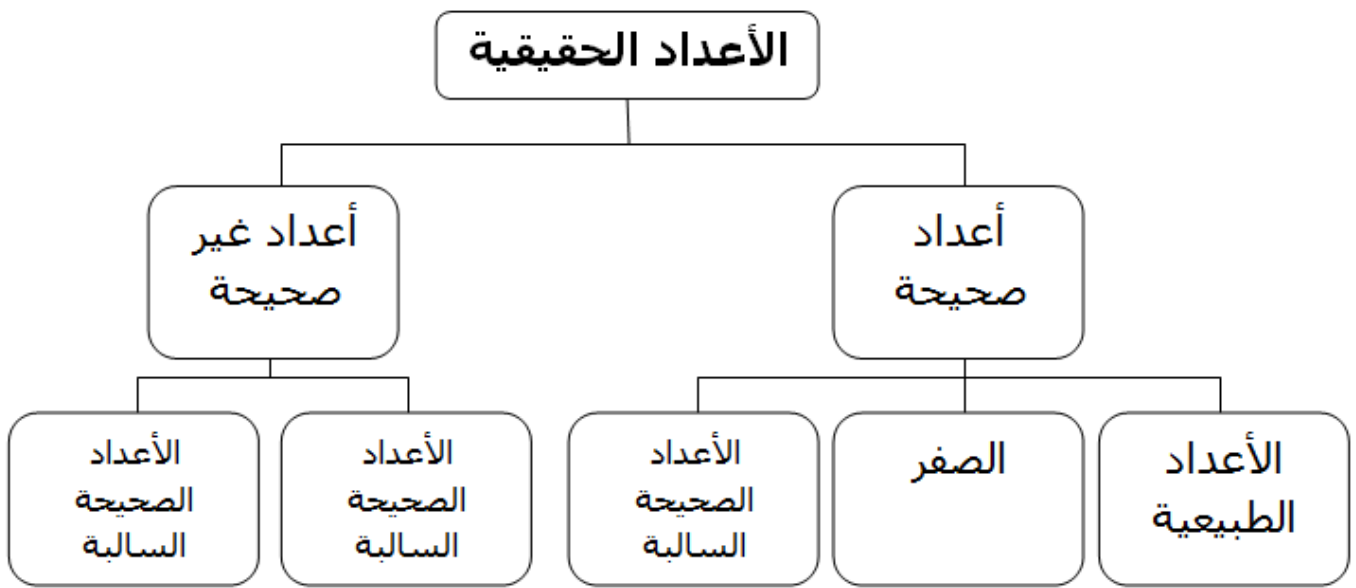
المحاضرة الأولى

(العمليات الجبرية)

عناصر المحاضرة:-

- 1/ الأعداد
- 2/ القيمة المطلقة
- 3/ العمليات الجبرية
- 4/ جمع المقادير الجبرية
- 5/ طرح المقادير الجبرية

1/ أنواع الأعداد:-



• الأعداد الطبيعية

- مثل الأعداد (1, 2, 3, ...) وتسمى الأعداد الصحيحة الموجبة
- ويمثل الرقم (1) وحدة قياس و (2) هو تكرار وحدة القياس مرتين وهكذا

• الأعداد الصحيحة السالبة

- وهى الأعداد الطبيعية مسبوقة بإشارة سالب.
- وهى تعبر عن بعض الظواهر مثل عمليات سحب من رصيدك بالبنك أو السحب من المخزون أو عمليات الصرف.
- مثل (.... -3, -2, -1)
- عند إضافة الصفر إلى الفئتين السابقتين تنتج الأعداد الصحيحة.

• الأعداد غير الصحيحة

- وهى الأعداد النسبية وهى عبارة عن النسبة بين عددين صحيحين ويكون المقام لا يساوي صفر.
- مثل $\frac{3}{2}$, $\frac{-5}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{9}$
- وأي عدد لا يمكن كتابته على الصورة النسبية مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{6}$ يسمى عدد غير نسبي.

2/ القيمة المطلقة:-

- القيمة المطلقة لأي عدد هي قيمة العدد بدون النظر إلى الإشارة التي سبقت العدد.
- هذا يعنى أن القيمة المطلقة هي عدد موجب دائما .
- ويرمز للقيمة المطلقة للعدد x بـ $|x|$

مثال:

- أوجد القيمة المطلقة للمقادير التالية :

$$1, -3, 11, -5$$

$$4, 9$$

$$\text{القيمة المطلقة للعدد } (5) = |-5| = 5$$

$$\text{القيمة المطلقة للعدد } (11) = |11| = 11$$

3/ العمليات الجبرية:-

يوجد في الجبر أربع عمليات أساسية وهي:

- الجمع
- الطرح
- الضرب
- القسمة

4/ جمع المقادير الجبرية:-

لجمع المقادير فإننا نستخدم العلامة (+) للدلالة على عملية الجمع والتي تمثل عملية إضافة.

$$2+5=7$$

مثل:

$$7+4=11$$

$$2 + 3x = 5x$$

يشترط لجمع أي مقدارين جبريان أن يكونا من نفس النوع

فمثلا : $2x+5y$

لا يمكن جمعهما و يظل المقدار كما هو.

$$\text{مثال: } 3a+8b+9a+2b = 12a+10b$$

مثال:

أوجد ناتج حاصل جمع المقادير التالية:

$$7x+5y+9xy, \quad 8x+2y$$

الحل:

يمكن ترتيب المقدارين السابقان كما يلي:

$$7x+5y+9xy$$

$$\underline{8x+2y}$$

$$15x+7y+9xy$$

نلاحظ من المثال السابق أن كلا من x و y تختلف عن xy لذلك عند الجمع يتم التعامل مع كل مقدار على حدى.

5/ طرح المقادير الجبرية :-

لطرح المقادير فإننا نستخدم العلامة (-) للدلالة على عملية الطرح والتي تمثل عملية صرف أو سحب.

مثال:

إذا كان لدك 10 ريالاً وتم شراء حلويات ب 6 ريالاً فإن المتبقي معك يكون 4 ريالاً.
يمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي: $10-6=4$

أي أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه إشارة سالب.
لذلك عند إجراء عملية الطرح يتم تغيير إشارة العدد أو المقدار الجبري المراد طرحه ثم نطبق قاعدة الجمع.

مثال:

أوجد ناتج $5x-3x$

الحل: $5x-3x=2x$

مثال:

أوجد ناتج $7y-12y$

الحل: $7y-12y=5y$

نلاحظ أن إشارة المقدار الأكبر هي سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بين المقداران مع إشارة المقدار الأكبر.

مثال:

أوجد ناتج جمع المقادير التالية:

$2x+7y, -2x-6y, 8x-3y$

الحل:

$2x+7y$

$2x-6y$

$8x-3y$

$8x-2y$

نلاحظ أن عند جمع مقدارين جبريين متساويين في القيمة ومختلفان في الإشارة فإن حاصل جمعهما يساوي صفر.

مثال:

أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

$2x+4y-3z, -4x-5z+2y, 6z+7x-8y$

الحل:

نلاحظ أن المقادير الثالث السابقة غير مرتبة لذلك فإننا عند جمعها لابد من ترتيبها مع مراعاة كتابة أي مقدار بنفس الإشارة التي هو عليها كما يلي:

$2x+4y-3z$

$-4x+2y-5z$

$7x-8y+6z$

$5x-2y-2z$

مثال:

أوجد ناتج: $(4x+2y) - (2x+5y)$

الحل:

نلاحظ وجود إشارة سالب أمام القوس الثانى لذلك عند فك القوس لابد من تغيير جميع
اشارات المقادير التى بداخل القوس كما يلى:

$$(4x+2y) - (2x+5y) = 4x+2y-2x-5y \\ = 2x-3y$$

مثال:

أوجد ناتج:

$$(3x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 11)$$

الحل:

$$(3x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 11) \\ = 3x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x - 11 \\ = 2x^2 - 9$$

مثال:

أوجد ناتج:

أطرح المقدار $7x+2y$ من $6x+5y$

الحل:

$$(6x+5y) - (7x+2y) \\ = 6x+5y - 7x-2y \\ = -x+3y \\ = 3y-x$$

نلاحظ أن المقدار الذى ذكر بعد حرف " من " هو الذى يكتب أولا .

مثال:

أطرح المقدار $7a^2 - 5ab + 8b^2$ من $3a^2 + ab - 5b^2$

الحل:

$$(3a^2 + ab - 5b^2) - (7a^2 - 5ab + 8b^2) \\ = 3a^2 + ab - 5b^2 - 7a^2 + 5ab - 8b^2 \\ = -4a^2 + 6ab - 13b^2$$

• إيجاد قيمة المقادير الجبرية

و يقصد به عملية التعويض بقيمة المتغيرات الموجودة بالمقدار الجبرى لإيجاد قيمة هذا المقدار.

مثال:

إذا كان $x=2, y=3, z=5$ أوجد قيمة المقدار $3x-7y+9z$

الحل:

$$3x-7y+9z \\ = 3(2)-7(3)+9(5) \\ = 6-21+45 \\ = 30$$

مثال:

أوجد قيمة المقدار $3a-4b+6c$

إذا كان: $a=3$, $b=-2$, $c=-1$

$$3a - 4b + 6c$$

الحل:

$$=3(3) - 4(-2) + 6(-1)$$

$$=9+8-6$$

$$=11$$

مثال:

$$x=-1 , y=2 , z=-3$$

إذا كان:

$$3xz + 5xy - 2zy$$

أوجد قيمة المقدار

$$3xz + 5xy - 2zy$$

الحل:

$$=3(-1)(-3)+5(-1)(2) - 2(-3)(2)$$

$$=9-10+12$$

$$=11$$

تمارين:-

• أولا - أوجد ناتج العمليات التالية:

$$(1) 8 - 6 + 3$$

$$(2) -3 + 8 - 11$$

$$(3) 5n + 7n - n$$

$$(4) 6m + 3n - 7m - 2n$$

$$(5) 6a^2 + 3ab - 4b^2 - 8a^2 - 5ab - 5b^2$$

• ثانيا - أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

$$(1) 5x+2y-z , 2x+3y-z , 2x-5y+7z$$

$$(2) 4m-5n+6k , 10k - 3m +4n , 2n - 2m - k$$

$$(3) 2n + L + m , 4n-m , 7m - 3L$$

• ثالثا - أوجد ناتج العمليات التالية:

$$1/ \text{أطرح } 9x-2y \text{ من } 5x-4y$$

$$2/ \text{أطرح } 3a-8b+c \text{ من } 4a-6b+2c$$

$$3/ (7m-2n)(3m+4n)$$

$$4/ (3a-7b) - (2a+5b) + (3a+8b)$$

المحاضرة الثانية

(ضرب المقادير الجبرية)

حل تمارين جمع المقادير الجبرية:-

• **اولا- أوجد ناتج العمليات التالية:**

$$(1) 8-6+3 = 5$$

$$(2) -3+8-11 = -6$$

$$(3) 5n+7n-n = 11n$$

$$(4) 6m+3n-7m-2n = -m+n = n-m$$

$$(5) 6a^2 + 3ab - 4b^2 - 8a^2 - 5ab - 5b^2 \\ = -2a^2 - 2ab - 9b^2$$

• **ثانيا - أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:**

$$1) 5x2y-z , 2x3y-z , 2x-5y7z \\ = 9x + 5z$$

$$2) 4m -5 n 6 k , 10 k -3m 4 n , 2n -2 m -k \\ = -m+n+15k$$

$$3) 2n L m , 4n -m , 7m -3 L \\ = 7m+6n-2L$$

• **ثالثا - أوجد ناتج العمليات التالية:**

$$(1) \text{ أطرح } 9x-2y \text{ من } 5x-4y \\ = (5x-4y) - (9x-2y)$$

$$= 5x - 4y - 9x + 2y = -4x - 2y$$

$$(2) \text{ أطرح } 3a-8b+c \text{ من } 4a-6b+2c \\ (4a-6b+2c) - (3a-8b+c)$$

$$= 4a-6b+2c-3a+8b-c = a+2b+c$$

$$(3) (7m-2n)-(3m + 4n)$$

$$= 7m - 2n - 3m - 4n = 4m - 6n$$

$$(4) (3a-7b) - (2a+5b)+(3a+8b)$$

$$= 3a - 7b - 2a -5b + 3a + 8b = 4a - 4b$$

ضرب المقادير الجبرية:-

عملية الضرب تعرف حسابيا على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين.

$$\text{فمثلا } 6+6+6+6+6 = 6 \times 5 = 30$$

عند ضرب المقادير الجبرية لا بد من مراعاة قاعدة الإشارات كما فى الجدول التالى:

+	=	+	×	+
-	=	-	×	+
-	=	+	×	-
+	=	-	×	-

أي أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون " - "

مثال:

$$3 \times 7 = 21$$

$$-2 \times 11 = -22$$

$$-5x - 4 = 20$$

$$7 \times 4x = 28x$$

$$2x - 5y = -10$$

نلاحظ أن xy هي نفسها $x \times y$ وهي أيضا $y \cdot x$

مثال:

$$\text{أوجد ناتج } 2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y)$$

الحل:

$$\begin{aligned} & 2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y) \\ &= 8x - 6y + 21x + 27y - x + 4y \\ &= 28x + 25y \end{aligned}$$

مثال:

$$\text{أوجد ناتج } 2a(3-4b) - 4b(5-3a)$$

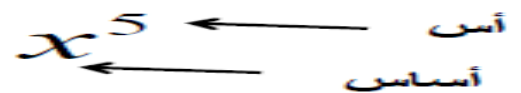
الحل:

$$\begin{aligned} & 2a(3-4b) - 4b(5-3a) \\ &= 6a - 8ab - 20b + 12ab \\ &= 6a + 4ab - 20b \end{aligned}$$

• **قاعدة هامة:**

إذا اتحدت الأساسات فأنة عند الضرب تجمع الأساس

مثال : إذا كان المقدار x^5 فإن



مثال:

$$\text{أوجد ناتج } x^5 \times x^3$$

الحل:

$$x^5 \times x^3 = x^{5+3} = x^8$$

مثال:

$$\text{أوجد ناتج } y^4 \times y^{-5} \times y^3$$

الحل:

$$y^4 \times y^{-5} \times y^3 = y^{4-5+3} = y^2$$

مثال :

$$\text{أوجد ناتج } 3^{-4} \times 3^{-2} \times 3^4 = 3^{-2}$$

• **قاعدة هامة:**

أي مقدار أس صفر = 1

مثال :

أوجد ناتج $2^{-7} \times 2^5 \times 2^2$

الحل:

$$2^{-7} \times 2^5 \times 2^2 = 2^0 = 1$$

مثال :

أوجد ناتج $2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)$

الحل:

$$\begin{aligned} & 2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x) \\ &= 10x - 6x^2 + 21x - 3 - 15x + 20x^2 \\ &= 14x^2 + 16x - 3 \end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج $5a(2a+4b)-3(2a-2b)+3b(3a-4b)$

الحل:

$$\begin{aligned} & 5a(2a+4b)-3(2a-2b)+ \\ &= 10a^2 + 20ab - 6a + 6b + 9ab - 12b^2 \\ &= 10a^2 + 29ab - 6a + 6b - 12b^2 \end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج $(2x-y)(3x+4y)$

الحل:


$$\begin{aligned} & (2x-y)(3x+4y) \\ &= 6x^2 + 8xy - 3xy - 4y^2 \\ &= 6x^2 + 5xy - 4y^2 \end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج $(4a+b)(3a-2b)$

الحل:

$$\begin{aligned} & (4a+b)(3a-2b) \\ &= 12a^2 - 8ab + 3ab - 2b^2 \\ &= 12a^2 - 5ab - 2b^2 \end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج $(4m+n)^2$

الحل:

$$\begin{aligned} (4m+n)^2 &= (4m+n)(4m+n) \\ &= 16m^2 + 4mn + 4mn + n^2 \\ &= 16m^2 + 8mn + n^2 \end{aligned}$$

في التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:

الحل = مربع المقدار الأول + 2 x الأول x الثاني + مربع الثاني

مثال :

أوجد ناتج $(2x - y)^2$

الحل:

$$(2x - y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

مثال :

أوجد ناتج $(2x-y)^2 + (3x+y)(2x-y)$

الحل:

$$\begin{aligned} & (2x-y)^2 + (3x+y)(2x-y) \\ &= 4x^2 - 4xy + y^2 + 6x^2 - 3xy + 2xy - y^2 \\ &= 10x^2 - 5xy \end{aligned}$$

تمارين:-

• أولا- أوجد ناتج ما يلي:

$$4(7x+2y)$$

الحل:

$$3(4a-b) - 2(a-5b) + 4(a+b)$$

$$y^4 \times y^{-2} \times y^7 + u^{-4} \times u^{-3} \times u^7$$

$$3^{-5} \times 3^4 \times 2^{-4} \times 2^5$$

$$7a(3+a) + 5(2a-8) - 2a(4-3a)$$

• ثانيا- اوجد ناتج:

$$1- (c+3d)(2c-d)$$

$$2- (2g+t)^2$$

$$3- (3m-2n)^2$$

$$4- (x+2y)^2 + (2x-y)^2$$

$$5- (a+b)^2 + (5a-2b)(3a-b)$$

المحاضرة الثالثة

(حل المعادلات الخطية)

حل المعادلات الخطية:-

سنتعرض إن شاء الله إلى حل المعادلات:

1/ أولا - المعادلات الخطية في مجهول واحد

2/ ثانيا- المعادلات الخطية في مجهولين

• أولا - المعادلات الخطية في مجهول واحد:-

مثال

حل المعادلة التالية $5x = 2x + 12$

الحل: $5x = 2x + 12$

$$5x - 2x = 12$$

$$3x = 12$$

$$x = \frac{12}{3} = 4$$

مثال

حل المعادلة التالية $4x + 5 = x - 3$

الحل: $4x + 5 = x - 3$

$$4x - x = -3 - 5$$

$$3x = -8$$

$$x = \frac{-8}{3}$$

مثال

حل المعادلة التالية

$$2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y - 11) + 12$$

الحل: يتم فك الأقواس أولا كما يلي

$$2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y - 11) + 12$$

$$2y+4+15y-35 = 15y - 55 + 12$$

$$2y+15y-15y = -55 + 12 - 4 + 35$$

$$2y = -12$$

$$y = \frac{-12}{2} = -6$$

مثال

حل المعادلة التالية

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

الحل: في هذه الحالة حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

$$3(3x+1) = 5(2x-1)$$

$$9x+3 = 10x-5$$

$$9x-10x = -5-3$$

$$-x = -8$$

$$x = 8$$

مثال

حل المعادلة التالية

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

الحل: في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات أولا | للطرف الأيمن

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{2(5x-1) + (4x-7)}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{10x-2+4x-7}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{14x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{14x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$7(14x-23) = 6(9x-11)$$

$$14x-161 = 54x-66$$

$$14x-54x = -66+161$$

$$100x = 95$$

$$x = \frac{95}{100} = 0.95$$

• **ثانيا- حل المعادلات الخطية فى مجهولين:-**

مثال

حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12 \rightarrow (1)$$

$$7x-3y = 11 \rightarrow (2)$$

الحل: يتم ضرب المعادلة (1) بـ 7x والمعادلة (2) بـ 5x ويطرح المعادلتين (4) من معادلة (3)

$$35x+14y = 84 \rightarrow (3)$$

$$+ \rightarrow (4)$$

$$-35x-15y = - 55$$

$$29y = 29$$

$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض فى معادلة (1) عن قيمة $Y=1$ ينتج أن

$$5x + 2y = 12$$

$$5x + 2(1) = 12$$

$$5x + 2 = 12$$

$$5x = 12 - 2$$

$$5x = 10$$

$$x = 2$$

أى أن الحل هو $x=2$ و $Y=1$

مثال

حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12 \rightarrow (1)$$

$$7x-3y = 11 \rightarrow (2)$$

الحل: يتم ضرب المعادلة $7x(1)$ والمعادلة $5x(2)$ وبطرح المعادلتين (4) من معادلة (3)

$$35x+14y = 84 \rightarrow (3)$$

$$+ \rightarrow (4)$$

$$-35x-15y = - 55$$

$$29y = 29$$

$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض فى معادلة (1) عن قيمة $Y=-1$ ينتج أن

$$3x - 5y = 8$$

$$3x - 5(-1) = 8$$

$$3x + 5 = 8$$

$$3x = 8 - 5$$

$$3x = 3$$

$$x = 1$$

أى أن الحل هو $x=1$ و $Y=-1$

تمارين:-

$$9y - 3 = 4y + 7 \quad (1)$$

$$3(x - 5) + (x + 2) = 4(x - 1) + 15 \quad (2)$$

$$\frac{4x - 1}{2} = \frac{x + 8}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2x + 1}{2} + \frac{x - 1}{5} = \frac{7x - 2}{4} \quad (4)$$

$$5x - y = 17 \quad (5)$$

$$2x + y = 4$$

$$3x + 7y = 8 \quad (6)$$

$$5x - 3y = 6$$

المحاضرة الرابعة

(تطبيقات تجارية واقتصادية)

مثال :

أنفقت مريم في معرض للكتب 120 ريال لشراء 4 كتب ثقافية على حين انفق يوسف 290 ريال لشراء 4 كتب علمية و 5 كتب ثقافية فإذا كانت الكتب الثقافية تباع بالسعر نفسه x والكتب العلمية تباع بالسعر نفسه y فما سعر الكتاب العلمي ؟

الحل:

أولا - إيجاد سعر الكتاب الثقافي ريال $x = \frac{120}{4} = 30$

ثانيا- إيجاد سعر الكتاب العلمي

$$290 = 5x + 4y$$

$$290 = 5(30) + 4y$$

$$290 = 150 + 4y$$

$$290 - 150 = 4y$$

$$4y = 140$$

ريال $y = \frac{140}{4} = 35$

مثال:

بستان يحوي 197 شجرة من الليمون , البرتقال , الرمان والتفاح . عدد أشجار الليمون يساوي 6 أضعاف عدد أشجار البرتقال . عدد أشجار البرتقال يساوي ثلث أشجار الرمان . عدد أشجار الرمان اقل من عدد أشجار التفاح بشجرتين . كم شجرة يوجد من كل نوع ؟

الحل:

نفرض أن عدد أشجار التفاح هي x ومنها يكون عدد أشجار الرمان هي ويكون عدد أشجار البرتقال هي

$$\frac{1}{3}(x-2)$$

$$6 \times \frac{1}{3}(x-2) = 2(x-2) = 2x-4$$

عدد أشجار الليمون هي

مجموع عدد الأشجار هو 197

لذلك يكون

$$(2x-4) + \frac{1}{3}(x-2) + (x-2) + x = 197$$

$$2x-4 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} + x - 2 + x = 197$$

$$4 \frac{1}{3}x - 6 \frac{2}{3} = 197$$

$$13x - 20 = 197$$

$$13x - 20 = 591$$

$$13x = 591 + 20 = 611$$

$$x = \frac{611}{13} = 47$$

عدد أشجار التفاح = 47 شجرة

عدد اشجار الرمان = $45 = 47 - 2 = x - 2$ شجرة

عدد اشجار البرتقال = $15 = \frac{1}{3} \times 45 = \frac{1}{3}(x - 2)$ شجرة

عدد اشجار الليمون = $90 = 2(47) - 4 = 2x - 4$ شجرة

أو عدد اشجار الليمون = $90 = 6 \times 15$ شجرة
للتأكد من الحل فأن

$$47 + 45 + 15 + 90 = 197$$

نقطة التوازن للسوق:-

هى النقطة التى يكون عنها دالة الطلب = دالة العرض
 $S(x) = D(x)$

ويطلق على الكمية المطلوبة او المعروضه عندها بكمية التوازن
وأيضا السعر عند هذه النقطة يطلق عليه سعر التوازن P

مثال:

إذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية:

$$P = 180 - 3x$$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال:

$$P = 5x + 20$$

المطلوب :

تحديد كمية وسعر التوازن؟

الحل:

دالة الطلب = دالة العرض عند التوازن

$$180 - 3x = 5x + 20$$

$$180 - 20 = 5x + 3x$$

$$160 = 8x$$

$$x = \frac{160}{8} = 20$$

أى أن كمية التوازن هى 20 وحدة.

لتحديد سعر التوازن يتم التعويض فى أى من دالتى الطلب أو العرض كما يلى:

$$P = 180 - 3x$$

$$P = 180 - 3(20)$$

$$P = 180 - 60$$

$$P = 120 \text{ ريال}$$

أو

$$P = 5x + 20$$

$$P = 5(20) + 20$$

$$P = 120 \text{ ريال}$$

نقطة التعادل:-

عند دراسة تحليل الإيرادات والتكاليف فأنا نحدد نقطة التعادل وهى النقطة التى تتساوى عندها الإيرادات مع التكاليف.
أي أن الإيراد الكلى = التكاليف الكلية

$$C(x) = R(x)$$

تشير x إلى عدد الوحدات المنتجة والمباعة

حل المعادلات التالية:

$$R(x)$$

الإيراد الكلى

ويتحدد من خلال الإيراد الكلى = سعر البيع x عدد الوحدات

التكاليف الكلية $C(x)$

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة
التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة x عدد الوحدات

تحديد الربح الكلى

الربح الكلى = الإيراد الكلى - التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

عند التعادل

الربح الكلى = صفر

$$P(x) = 0$$

مثال:

إذا كان التكلفة المتغيرة لإنتاج وحدة واحدة من احد المنتجات هى 5 ريال و التكاليف الثابتة هى 100000 ريال و سعر بيع الوحدة الواحدة هو 9 ريال.

أوجد:

عدد الوحدات الذى حُقق التعادل؟

عدد الوحدات الذى يحقق ربح قدره 20000 ريال ؟

الحل:

تحديد دالة التكاليف الكلية:

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة x عدد الوحدات

التكاليف المتغيرة $= 5x$

التكاليف الثابتة = 100000

التكاليف الكلية هي $C(x) = 5x + 100000$

تحديد الإيراد الكلى:

الإيراد الكلى = سعر البيع x عدد الوحدات

$$R(x) = 9x$$

الربح الكلى = الإيراد الكلى - التكاليف الكلية

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) \\ &= 9x - (5x + 100000) \\ &= 9x - 5x - 100000 \\ &= 4x - 100000 \end{aligned}$$

الربح الكلى = صفر

$$P(x) = 4x - 100000 = 0$$

$$4x = 100000$$

$$X = \frac{100000}{4} = 25000 \quad \text{وحدة}$$

عدد الوحدات الذى يحقق ربح قدرة 20000 ريال

الربح الكلى = 2000

$$P(x) = 4x - 100000 = 20000$$

$$4x = 100000 + 100000 = 120000$$

$$X = \frac{120000}{4} = 30000 \quad \text{وحدة}$$

تمارين:-

- 1- سار محمد بسيارة تبلغ سرعتها 60 كم / ساعة فوصل الى المكان المحدد في الساعة السادسة مساءً وعندما سار بسرعة 90 كم / ساعة من نفس نقطة البداية وصل الى المكان المحدد نفسه الساعة الرابعة مساءً
فهل يمكنك معرفة السرعة التي يجب أن يصل بها الى نفس المكان المحدد في تمام الساعة الخامسة مساءً؟؟
- 2- اشترى محمود بضاعة بمبلغ 3450 ريال فباعها بمبلغ 5000 ريال حدد نسبة الربح التى حققها؟
- 3 - إذا كان سعر بيع الوحدة من احد المنتجات 40 ريال و التكلفة المتغيرة للوحدة 25 ريال والتكاليف الثابتة هي 75000 ريال.
حدد عدد الوحدات التى تحقق التعادل و ماهى الارباح الناتجة من بيع و انتاج 4000 وحدة؟ وما هى عدد الوحدات التى يجب بيعها لتحقيق ارباح قدرها 10000 ريال؟
- 3 - اذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية:

$$P = 145 - 4x$$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال:

$$P = 2x + 13$$

المطلوب :

تحديد كمية وسعر التوازن؟

- 5- رجل لديه اربع اولاد هم عبدالله و زينب و محمد و نور فإذا كان عمر نور ربع عمر محمد و عمر عبد الله هو مجموع عمر نور و محمد و زينب يزيد عن عمر محمد بعاميين. فإذا كان مجموع أعمار الأولاد 58 حدد عمر كلا منهم ؟

المحاضرة الخامسة

(تحليل المقادير الجبرية)

تحليل المقادير الجبرية:-

يقصد بتحليل المقدار الجبري هو إيجاد المكونات الأساسية لهذا المقدار

طرق تحليل المقادير الجبرية:-

هناك العديد من الطرق لتحليل المقدار الجبري منها :

- العامل المشترك
- الفرق بين المربعين
- الفرق بين المكعبين
- مجموع المكعبين
- تحليل المقدار الثلاثي

أولاً- العامل المشترك:-

وهو يعني المقدار الموجود في جميع عناصر المقدار الجبري

مثال : حلل المقدار

$$5xy + x^2$$

الحل:

$$5xy + x^2 = x(5y+x)$$

مثال : حلل المقدار

$$9ab + 3bc$$

الحل:

$$9ab + 3bc = 3b(3a+c)$$

مثال : حلل المقدار

$$2y^2 - 8y + 18y^7$$

الحل:

$$2y(y-4+9y^6)$$

مثال : حلل المقدار

$$24x^3y - 15xy^3$$

الحل:

$$24x^3y - 15xy^3$$

$$= 3xy(8x^2 - 5y^2)$$

ثانياً - الفرق بين المربعين:-

إذا كان لدينا مقدران مربعان وبينهما إشارة سالبة يطلق على هذا المقدار الفرق بين المربعين

$$x^2 - y^2$$

يمكن تحليل الفرق بين المربعين كما يلي

= (الجذر التربيعي الأول - الجذر التربيعي الثاني) (الجذر التربيعي الأول + الجذر التربيعي الثاني)

$$X^2 - y^2 = (x-y)(\underline{x+y}) \quad \text{أي أن}$$

مثال : حلل المقدار

$$25x^2 - y^2$$

الحل:

$$25x^2 - y^2 = (5x-y)(5x+y)$$

مثال : حلل المقدار

$$64x^3 - 4xy^2$$

الحل:

$$\begin{aligned} & 64x^3 - 4xy^2 \\ &= 4x(16x^2 - y^2) \\ &= 4x(4x - y)(4x + y) \end{aligned}$$

مثال : حلل المقدار

$$48x^2y - 75y^3$$

الحل:

$$\begin{aligned} & 48x^2y - 75y^3 \\ &= 3y(16x^2 - 25y^2) \\ &= 3y(4x - 5y)(4x + 5y) \end{aligned}$$

مثال : حلل المقدار

$$169x^5y - 144xy^5$$

الحل:

$$\begin{aligned} & 169x^5y - 144xy^5 \\ &= \underline{xy}(169x^4 - 144y^4) \\ &= \underline{xy}(13x^2 - 12y^2)(13x^2 + 12y^2) \end{aligned}$$

ثالثا - الفرق بين المكعبين:-

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما إشارة سالبة الفرق بين المكعبين مثل $x^3 - y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلى قوسين أحدهما صغير والآخر كبير كما يلي (جذر الأول-جذر الثاني) (مربع الأول + جذر الأول*جذر الثاني+مربع الثاني) أي أن :

$$X^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

مثال : حلل المقدار

$$8a^3 - 125b^3$$

الحل:

$$\begin{aligned} & 8a^3 - 125b^3 \\ &= (2a-5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2) \end{aligned}$$

مثال : حلل المقدار

$$27x^3 - 216y^3$$

الحل:

$$27x^3 - 216y^3$$

$$= (3x-6y)(9x^2 + 18xy + 36y^2)$$

$$= 3(x-2y)9(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

$$= 27(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

حل آخر لتحليل المقدار $27x^3 - 216y^3$

يمكن اخذ عامل مشترك من البداية 27 ويكون الحل كما يلي:

الحل:

$$27x^3 - 216y^3$$

$$= 27(x^3 - 8y^3)$$

$$= 27(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

رابعا - مجموع المكعبين:-

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة موجب مجموع المكعبين مثل : $x^3 + y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلى قوسين أحدهما صغير والآخر كبير كما يلي:
(جذر الأول+جذر الثاني) (مربع الأول - جذر الأول*جذر الثاني+مربع الثاني)
أى أن :

$$X^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

مثال : حلل المقدار

$$64x^3 + 125y^3$$

الحل:

$$64x^3 + 125y^3$$

$$= (4x+5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

مثال : حلل المقدار

$$24bc^4 + 81b^4c$$

الحل:

$$24bc^4 + 81b^4c$$

$$= 3bc(8c^3 + 27b^3)$$

$$= 3bc(2c + 3b) + (4c^2 - 6bc + 9b^2)$$

التمارين:-

حلل المقدار التالية :

1 $27a^3 - x^3$

2 $72c^5d^3 - 242c^3d^5$

3 $X^3 - 64$

4 $125 + 8r^3$

5 $250x^2y^5 + 2x^5y^2$

1 $X^3 + 5x^2 - 7x^5$

2 $25g^3h^2 + 75g^5h^7$

3 $48L^3 - 75Ld^2$

4 $18u^3v^3 - 50uv^5$

المحاضرة السادسة

(حل المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد)

حل المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد:-

تكون صورة المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد هي

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثي كما يلي

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(x - 2)(x - 5) = 0$$

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

حل آخر باستخدام القانون

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$a = 1 \quad b = -7 \quad c = 10$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2}$$

$$x = \frac{7+3}{2} = 5 \quad x = \frac{7-3}{2} = 2$$

مثال : حل المعادلة التالية

$$x^2 - 2x = 24$$

الحل: لابد أن نجعل المعادلة تساوى صفر

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

وبالتحليل

$$(x+4)(x-6)=0$$

$$\begin{cases} x+4=0 \rightarrow x=-4 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{cases}$$

حل آخر باستخدام القانون

$$x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$a=1 \quad b=-2 \quad c=-24$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{2+10}{2} = 6 \quad x = \frac{2-10}{2} = -4$$

مثال: حل المعادلة

$$12x^2 + 4x = 33$$

الحل:

$$12x^2 + 4x - 33 = 0$$

الحل باستخدام القانون

$$12x^2 + 4x - 33 = 0$$

$$a=12 \quad b=4 \quad c=-33$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(12)(-33)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{-4+40}{24} = 1.5 \quad x = \frac{-4-40}{24} = 1.833$$

تمارين:-

حل المعادلات التالية:

$$1- \quad x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$2- \quad x^2 + 4x = 32$$

$$3- \quad 2x^2 - 17x + 8 = 0$$

تطبيقات تجارية واقتصادية:-

مثال:

إذا كانت دالة العرض لأحد المنتجات هي

$$p = S(x) = x^2 + 14$$

وكانت دالة الطلب هي

$$p = D(x) = 174 - 6x$$

المطلوب: حدد كمية وسعر التوازن؟

الحل:

عند التوازن

دالة الطلب = دالة العرض

$$p = D(x) = S(x)$$

$$174 - 6x = x^2 + 14$$

$$x^2 + 6x + 14 - 174 = 0$$

$$x^2 + 6x - 160 = 0$$

$$(x - 10)(x + 16) = 0$$

$$x + 16 = 0 \rightarrow x = -16 \quad \text{مرفوض}$$

$$x - 10 = 0 \rightarrow x = 10 \quad \text{كمية التوازن}$$

تحديد سعر التوازن بالتعويض في دالة العرض

$$p = x^2 + 14$$

$$p = (10)^2 + 14 = 114$$

او بالتعويض في دالة الطلب

$$p = 174 - 6x$$

$$p = 174 - 6(10) = 114$$

المحاضرة السابعة

(الأسس واللوغاريتمات)

الأسس:-

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

1/ إذا اتحدت الأساسات فإنه عند الضرب تجمع الأسس

2/ عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس.

مثال: اختصر المقدار التالي:

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3}$$

الحل:

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3} = \frac{z^9 n^3}{z^2 n^5} = z^{9-2} n^{3-5} = z^7 n^{-2}$$

قاعدة هامة :

$$(x^n)^m = x^{n \times m}$$

مثال :

$$(2^5)^3 = 2^{3 \times 5} = 2^{15}$$

مثال: اختصر

$$(x^5)^{-1} = x^{5 \times -1} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

مثال: اختصر المقدار

$$\left(\frac{2ab^3}{3ba^2} \right)^3$$

الحل:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2ab^3}{3ba^2} \right)^3 &= \frac{2^3 a^3 b^9}{3^3 b^3 a^6} = \frac{8}{27} a^{3-6} b^{9-3} \\ &= \frac{8}{27} a^{-3} b^6 = \frac{8b^6}{27a^3} \end{aligned}$$

مثال: اختصر المقدار

$$\sqrt[3]{27x^9}$$

الحل:

$$\sqrt[3]{27x^9} = 27^{\frac{1}{3}} x^{\frac{9}{3}} = 3x^3$$

مثال: اختصر المقدار

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}}$$

الحل:

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}} = \sqrt{25m^2n^{-2}} = 5mn^{-1} = \frac{5m}{n}$$

تمارين:-

مثال: حل المعادلة التالية:

$$(x-1)^2 = 64$$

الحل:

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{64}$$

$$x-1 = 8$$

$$x = 8 + 1 = 9$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}} = 2$$

الحل: بتكعيب الطرفين

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}}\right)^3 = (2)^3$$

$$\frac{x+42}{x} = 8$$

$$x+42 = 8x$$

$$42 = 8x - x$$

$$42 = 7x$$

$$x = \frac{42}{7} = 6$$

تمارين:-

اختصر المقادير التالية:

$$1 - \left(\frac{2xy}{5xy^2} \right)^2$$

$$2 - \sqrt[3]{64L^9 f^{-6}}$$

$$3 - \frac{25d^7 w^2}{5d^2 w}$$

$$4 - \sqrt[3]{\frac{128x^5 y^7}{2x^{-1} y}}$$

اللوغاريتمات:-

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين

$$10^3 = 1000$$

لذلك يكون

$$\log_{10} 1000 = 3$$



وكذلك

$$32 = 2^5$$

$$\log_2 32 = 5$$

مثال: أوجد قيمة المجهول إذا كان

$$\log_5 a = 3$$

الحل:

$$\log_5 a = 3$$

$$a = 5^3 = 125$$

مثال: أوجد قيمة المجهول إذا كان

$$\log_2 x = 7$$

الحل:

$$\log_2 x = 7$$

$$x = 2^7 = 128$$

مثال: أوجد قيمة المجهول اذا كان

$$\log_x 64 = 2$$

الحل:

$$\log_x 64 = 2$$

$$64 = x^2$$

$$x = \sqrt{64} = 8$$

مثال: أوجد قيمة المجهول اذا كان

$$\log_a 256 = 4$$

الحل:

$$\log_a 256 = 4$$

$$256 = a^4$$

$$a = 256^{\frac{1}{4}} = 4$$

تمارين:-

أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

$$1 - \log_3 9 = t$$

$$2 - \log_a 81 = 2$$

$$3 - \log_5 125 = k$$

$$4 - \log_{49} x = \frac{3}{2}$$

$$5 - \log_{81} r = \frac{3}{4}$$

$$6 - \log_{121} x = \frac{1}{2}$$

$$7 - \log_{625} 125 = g$$

قوانين اللوغاريتمات:-

$$(1) \quad \log x^n = n \log x$$

مثال:

$$\log 5^4 = 4 \log 5$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2$$

$$(2) \quad \log(x \times y) = \log x + \log y$$

مثال:

$$\log 20 = \log(5 \times 4) = \log 5 + \log 4$$

$$\log 42 = \log(6 \times 7) = \log 6 + \log 7$$

$$(3) \quad \log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

مثال:

$$\log\left(\frac{35}{2}\right) = \log 35 - \log 2$$

$$= \log(7 \times 5) - \log 2$$

$$= \log 7 + \log 5 - \log 2$$

هام جدا:-

$$\log_a a = 1$$

$$\log_5 5 = 1 \quad \log_7 7 = 1 \quad \log 10 = 1$$

إذا لم يكتب الأساس تحت اللوغاريتم يكون 10

مثال: أوجد قيمة المقدار

$$\log 2 - \log 10 + \log 5 + 2 \log \sqrt{10} - \log 16 + \log 4^2$$

الحل:

$$= \log 2 - 1 + \log 5 + 2 \log 10^{\frac{1}{2}} - \log 4^2 + \log 4^2$$

$$= \log(2 \times 5) - 1 + 2 \times \frac{1}{2} \log 10$$

$$= \log 10 - 1 + \log 10$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1$$

تمارين:-

أوجد قيمة المقدار

$$\log_7 125 + \log_7 64 - 3 \log_7 20 + \log_7 49$$

أوجد قيمة المقدار

$$\frac{1}{2} \log_5 625 - \log_5 35 + \log_5 14 - \log_5 10$$

المحاضرة الثامنة

(التباديل والتوافيق)

التباديل:-

وهي تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويرمز لها بالرمز P فإذا كان لدينا n من الأشياء نريد ترتيبها r من الترتيبات فإن عدد طرق الترتيب هي ${}_nP_r$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

مثال: اوجد قيمة ${}_5P_2$

$${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

مثال: اوجد قيمة ${}_6P_3$

$${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

لاحظ أن ${}_nP_n = n!$ أي أن

$${}_3P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1$$

كما أن

$${}_5P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

مثال: أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة ${}_6P_2$ هي:-

15 ☐ د

36 ☐ ج

30 ☐ ب

12 ☐ أ

الحل:-

$${}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

الإجابة هي (ب)

مثال: أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة ${}_6P_6$ هي

256 ☐ د

6! ☐ ج

6² ☐ ب

36 ☐ أ

الحل:-

$${}_6P_6 = 6!$$

الإجابة هي (ج)

مثال: أتفتت 6 فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل:

عدد المباريات

$$\text{مباراة} = {}_6P_2 = 6 \times 5 = 30$$

مثال: بكم طريقة يمكن جلوس 4 اشخاص على 5 كراسى ؟

الحل:

$$\text{طريقة} = {}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$$

التوافيق:-

وتشير إلى عدد طرق الاختيار. ويرمز لها بالرمز C

فإذا كان لدينا n من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد r فإن عدد طرق الاختيار هى ${}_nC_r$.

حيث أن ${}_nC_r$

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\dots3 \times 2 \times 1}$$

مثال: اوجد قيمة ${}_5C_2$

الحل:

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

مثال: اوجد قيمة ${}_7C_4$

الحل:

$${}_7C_4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

هام جداً:-

$${}_nC_n = 1$$

$${}_6C_6 = 1 \quad {}_8C_8 = 1 \quad {}_{12}C_{12} = 1 \quad \text{أى أن}$$

$${}_nC_0 = 1$$

$${}_4C_0 = 1 \quad {}_7C_0 = 1 \quad {}_{10}C_0 = 1 \quad \text{أى أن}$$

$${}_nC_1 = n$$

$${}_5C_1 = 5 \quad {}_{11}C_1 = 11 \quad {}_7C_1 = 7 \quad \text{أى أن}$$

مثال: إدارة بها 12 موظف نريد أن نختار منهم 3 لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل:

عدد طرق الاختيار

$${}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

مثال: بفرض فى المثال السابق إذا نص على أن مدير الإدارة لابد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار ؟

الحل:

عدد طرق الاختيار =

$${}^{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

تمارين:-

ثانيا - أوجد قيمة

$${}^8P_2 \quad {}^5P_3 \quad {}^7P_4 \quad 3! \quad {}^4P_4$$

$${}^8C_2 \quad {}^9P_3 \quad {}^7C_4 \quad {}^6C_6 \quad {}^6C_0$$

$9C_1$

ثالثا -

1 - اتفقت 10 فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التى يمكن لعبها؟

2 - إدارة بها 15 موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق الاختيار ؟

3 - فى السؤال السابق إذا كان لابد من وجود مدير الإدارة ضمن أعضاء اللجنة أحسب عدد طرق الاختيار ؟

المحاضرة التاسعة

(نظرية ذات الحدين)

مثال:-

أوجد مفكوك $(x + 3)^2$

الحل:

سبق وأن درسنا أنه يمكن فك هذا المقدار باستخدام قاعدة الضرب

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

مثال:

أوجد مفكوك $(x + 3)^3$

نلاحظ هنا أن الأس ليس 2 وإنما هو 3 لذلك لا تصلح القاعدة السابقة و يتم إجراء الضرب للقوس في نفسه ثلاث مرات أو نطبق القاعدة ثم نضرب الناتج في القوس نفسه مرة أخرى وفي حالة الأس أكبر من هذا يكون الأمر أطول وأصعب لذا جاءت نظرية ذات الحدين لتحل لنا هذه المشكلة كما يتضح مما يلي:

نظرية ذات الحدين:-

$$(x + a)^n = nC_0 a^0 x^n + nC_1 a^1 x^{n-1} + nC_2 a^2 x^{n-2} + \dots + nC_n a^n x^0$$

مثال:

أوجد مفكوك $(x + 3)^3$

قيمة

$$\begin{aligned} (x + 3)^3 &= 3C_0 (3)^0 x^3 \\ &+ 3C_1 (3)^1 x^2 \\ &+ 3C_2 (3)^2 x^1 \\ &+ 3C_3 (3)^3 x^0 \\ (x + 3)^3 &= x^3 + 9x^2 + 27x + 27 \end{aligned}$$

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو قيمة :-

$$H_{r+1} = nCr (\text{socond term})^r (\text{first term})^{n-r}$$

دائماً r أقل من رتبة الحد بمقدار واحد

مثال:

أوجد مفكوك $(x + 3)^9$

الحل:

$$H_{r+1} = nCr (\text{socand term})^r (\text{first term})^{n-r}$$

نجد أننا نريد H_5 لذلك $r = 4$ $n = 9$

$$H_5 = 9C4(3)^4(x)^5 = 126 \times 81x^5 = 10206x^5$$

مثال:

أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(2x - 5y)^7$

$$H_{r+1} = nCr(\text{socond term})^r (\text{first term})^{n-r}$$

نجد أننا نريد H_4 لذلك $r = 3$ $n = 7$

$$H_4 = 7C3(-5y)^3(2x)^4 = 35 \times -125y^3 \times 16x^4 \\ = -70000x^4y^3$$

الحد الأوسط:-

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجى:
 الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط $\frac{n+2}{2}$
 أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هي $\frac{n+3}{2}$ و $\frac{n+1}{2}$

مثال:

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(x - 2)^{10}$

الحل:

$$\frac{10+2}{2} = 6 \text{ رتبة الحد الوسط هي}$$

نجد أننا نريد H_6 لذلك $r = 5$ $n = 10$

$$H_6 = 10C5(-2)^5(x)^5 = 252 \times -32 \times x^5 \\ = -8064x^5$$

تمارين:-

1- أوجد الحد السادس فى مفكوك $(x + 4)^{12}$ ؟

2 - أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(5x + y)^8$ ؟

3 - أوجد مفكوك المقدار x^2 $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2$
 $(5x - 2y)^4$

المحاضرة العاشرة

(الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية)

الدالة الاسية:-

أي دالة من النوع $f(x) = a^x$ تسمى دالة أسية .
 حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a : الأساس ، x : الأس.
 حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$ ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة $(0, \infty)$
 أي $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 أمثلة:

$$f(x) = 2^x, f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, f(x) = e^x, f(x) = e^{5x+2}$$

الدالة اللوغاريتمية:-

إذا كان $a > 0, a \neq 1$ فإن الدالة الاسية $y = a^x$ لها معكوس يرمز لها بالرمز $x = \log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a .
 حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة $(0, \infty)$ ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$ أي $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 • أمثلة:

$$f(x) = \log_2 x, f(x) = \log_4(2x+4)$$

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:-

يعتبر العددين $e, 10$ (حيث e عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس لللوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$
 أمثلة:

$$f(x) = \ln x^5, f(x) = \ln(x^2 + 2x)$$

تسمى اللوغاريتمات للأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$
 أمثلة:

$$f(x) = \log x, f(x) = \log(x^2 - 1), f(x) = \log(2x - 3)$$

قوانين اللوغاريتمات:-

إذا كان كل من x, y, b عدداً حقيقياً موجباً ، $b \neq 1$ ، وكان n عدداً حقيقياً فإن:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y \quad -1$$

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y \quad -2$$

$$\log_b(x^n) = n \log_b x \quad -3$$

$$\log_b(b^x) = x \quad -4$$

$$\log_b b = 1 \quad , \quad \log_b 1 = 0 \quad -5$$

-6

الدوال المثلثية:-

هناك دالتان أساسيتان هما:

$$(i) \quad y = \sin x$$

$$(ii) \quad y = \cos x$$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

• الدوال النسبية:

إذا كان $h(x)$ ، $g(x)$ كثيري حدود فإن $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط $g(x) \neq 0$ ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.
أمثلة:

$$f(x) = \frac{x+7}{x+5} \quad -1$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad -2$$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3} \quad -3$$

• الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة $y=f(x)$ ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.
أمثلة:

$$y = 2x + 3 \quad -1$$

$$y = x \quad -2$$

$$y = x^2 + 2x - 3 \quad -3$$

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة $f(x,y)=k$ ، حيث k قيمة ثابتة.
أمثلة:

$$x^2 + y^2 = 25 \quad -1$$

$$x^2 + y^2 + xy + 2x - 4y + 5 = 0 \quad -2$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49 \quad -3$$

• الدوال الزوجية والدوال الفردية:

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة $y=f(x)$ دالة زوجية إذا كانت $f(-x)=f(x)$

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^2 \\&= (-x)(-x) \\&= x^2 \\&= f(x)\end{aligned}$$

إذاً الدالة زوجية

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2+x$ دالة زوجية ؟

الحل:

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\&= (-x)(-x) + (-x) \\&= x^2 - x \\&\neq f(x)\end{aligned}$$

إذاً ليست زوجية.

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة $y=f(x)$ دالة فردية إذا كانت $f(-x)=-f(x)$

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^3+x$ دالة فردية ؟

الحل:

$$\begin{aligned}f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\&= (-x)(-x)(-x) + (-x) \\&= -x^3 - x = -(x^3 + x) \\&= -f(x)\end{aligned}$$

إذاً الدالة فردية.

تطبيقات اقتصادية:-

1- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P .

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

1. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$
2. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$

تمارين:-

- 1/ هل الدالة $f(x) = 3x^2 - 4x$ دالة زوجية؟
- 2/ هل الدالة $f(x) = 3x^3 - 4x$ دالة فردية؟
- 3/ هل الدالة $f(x) = 2x^2 + x$ دالة فردية؟
- 4/ هل الدالة $f(x) = x^3 - 4$ دالة زوجية؟
- 5/ هل الدالة $f(x) = x^3 - x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟
- 6/ إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S = 4P - 5$ فأوجد
(أ) Q_D إذا كانت $P = 5$.
(ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S = 7$.

المحاضرة الحادية عشر

(الاشتقاق)

الاشتقاق:-

• متوسط التغير:

إذا كانت $y=f(x)$ فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^2 + 2$ عندما تتغير x من 1 إلى 1.5
الحل:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1.5$$

$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \frac{1.25}{0.5} = 2.5$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما تتغير x من 1 إلى 2
الحل:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2$$

$$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{2 - 1} = \frac{3}{1} = 3$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^2 + 2$ عندما تتغير x من 2 إلى 4
الحل:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

• **تعريف المشتقة الأولى:**

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \rightarrow 0$ (إن وجدت) تسمى المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها بأحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx}[f(x)], \quad y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x) \quad \text{إذاً.....}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل (المبادئ الأولية للتفاضل)

• **جبر الاشتقاق:**

1- إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فإن :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$I. \quad y = x^5$$

$$II. \quad y = x^{-3}$$

$$III. \quad y = x^{\frac{1}{2}}$$

الحل:

$$I. \quad \frac{dy}{dx} = 5x^4$$

$$II. \quad \frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$$

$$III. \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

2- إذا كان $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 5$

II. $y = -10$

III. $y = \frac{3}{4}$

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 0$

II. $\frac{dy}{dx} = 0$

III. $\frac{dy}{dx} = 0$

3- إذا كانت $y = cx^n$ حيث c عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = n.c x^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 3x^4$

II. $y = -2x^7$

III. $y = 16x^{\frac{1}{2}}$

الحل:

I. $\frac{dy}{dx} = 12x^3$

II. $\frac{dy}{dx} = -14x^6$

III. $\frac{dy}{dx} = 8x^{-\frac{1}{2}}$

4- إذا كانت

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + (n-1)a_nx^{n-2} + na_nx^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$
الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

5- إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (2x^2 + 5)^8$
الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7 \cdot 4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$

6- إذا كانت $y = (f(x) \cdot g(x))$ فإن :

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (x-1)(3x-2)$
الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(3) + (3x-2)(1)$$

$$= 3x - 3 + 3x - 2$$

$$= 6x - 5$$

مثال:

أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

تمارين:-

1- أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}(x^5 - x^{-3})$

iv. $y = \frac{2x - 1}{2x + 1}$

$$\text{v. } y = x + 1$$

$$\text{vi. } y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$$

$$\text{vii. } y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$$

$$\text{viii. } y = \frac{1}{2x + 3}$$

$$\text{ix. } y = (4x^2 + 5x - 2)^8$$

2- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$$\text{i. } y = u^2 - u, \quad u = 4x + 3$$

$$\text{ii. } y = u + \frac{1}{u}, \quad u = 5 - 2x$$

$$\text{iii. } y = \frac{1}{u + 1}, \quad u = x^3 - 2x + 5$$

4- أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

$$\text{i. } y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$$

$$\text{ii. } y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$$

$$\text{iii. } y = \frac{1}{x}$$

$$\text{iv. } y = \frac{1}{3x + 1}$$

المحاضرة الثانية عشر

(التكامل)

التكامل غير المحدد:-

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، وتسمى عملية إيجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل. ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x ، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x) dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير المستقل x .

قواعد التكامل:-

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$ حيث ثابت التكامل
2. $\int k dx = kx + c$ حيث أي عدد حقيقي
3. $\int dx = x + c$
4. $\int [kf(x)] dx = k \int f(x) dx$ حيث أي عدد حقيقي
5. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
6. $\int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$
7. $\int e^x dx = e^x + c$
8. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c, x \neq 0$
9. $\int \cos x dx = \sin x + c$

أمثلة:-

1. $\int 5 dx = 5x + c$
2. $\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$
3. $\int 3x^2 dx = \frac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$
4. $\int (7x + 3) dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + c$
6. $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4) dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 4x + c$
 $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$

المحاضرة الثالثة عشر

(المتواليات)

سيتم تدريس:

١- المتواليات العددية (الحسابية)

٢- المتواليات الهندسية

أولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية.

فمثلاً $2, 5, 8, \dots$

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

$$8 - 5 = 3$$

$$5 - 2 = 3$$

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d

الرموز المستخدمة:

a الحد الأول

d أساس المتوالية (الفرق الثابت)

L الحد الأخير

H_n الحد العام

S_n مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a + (n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١- بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n = \frac{n}{2} (a + L)$$

٢- بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$



مثال

في المتوالية التالية 3, 7, 11, ...

أوجد:

- ١- حدد نوع المتوالية؟
- ٢- أساس المتوالية؟
- ٣- الحد الخامس؟
- ٤- الحد التاسع؟
- ٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية؟

الحل

$$11 - 7 = 4 \quad 7 - 3 = 4 \quad \text{بما أن}$$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d = 4$

٣- الحد الخامس

$$H_n = a + (n - 1)d$$

$$H_5 = a + 4d$$

$$H_5 = 3 + 4(4) = 19$$

٤- الحد التاسع من المتوالية

$$H_9 = a + 8d$$

$$H_9 = 3 + 4(8) = 35$$

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)d)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} (2 \times 3 + 9 \times 4) = 5(6 + 36) = 210$$

مثال

متوالية حدودها 70, 65, 60, ..., 25

- ١- حدد نوع المتوالية
- ٢- أساس المتوالية؟
- ٣- الحد السادس؟
- ٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية؟
- ٥- عدد حدود المتوالية؟

الحل:

$$1- \text{ بما أن } 60 - 65 = -5 \quad 70 - 65 = -5$$

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

$$2- \text{ أساس المتوالية } d = -5$$

3- الحد السادس

$$\begin{aligned} H_6 &= a + 5d \\ &= 70 + 5(-5) = 45 \end{aligned}$$

4- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{10}{2} (2 \times 70 + 9 \times -5) \\ &= 5(140 - 45) = 5 \times 95 = 475 \end{aligned}$$

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التي يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

a الحد الأول

r أساس المتوالية

S_n مجموع n من الحدود

S_∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a \cdot r^{n-1}$$

مجموع عدد معين من الحدود

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$



مثال: فى المتوالية $4, 8, 16, \dots$ أوجد الحد العاشر
ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟
الحل:

$$\text{نجد أن } \frac{8}{4} = \frac{16}{8} = 2$$

أذن المتوالية هندسية وأساسها $r = 2$

$$\begin{aligned} \text{الحد العاشر} \quad H_{10} &= a \cdot r^9 \\ &= 4(2)^9 = 2048 \end{aligned}$$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية هو

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a (r^n - 1)}{r - 1} \\ S_{10} &= \frac{4(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 4092 \end{aligned}$$

مثال متوالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3- أوجد الحد السادس
ومجموع الثمان حدود الأولى منها؟
الحل:

$$a = 5 \quad r = -3$$

الحد السادس

$$\begin{aligned} H_6 &= ar^5 \\ &= 5(-3)^5 = -1215 \end{aligned}$$

مجموع الثمان حدود الأولى من المتوالية هو

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a (r^n - 1)}{r - 1} \\ S_8 &= \frac{5((-3)^8 - 1)}{-3 - 1} = -8200 \end{aligned}$$

المحاضرة الرابعة عشر

(المحددات و المصفوفات)

أولاً- المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد

$$= (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= (5 \times 8) - (3 \times 7) && \text{قيمة المحدد} \\ &= 40 - 21 = 19 \end{aligned}$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= (-3 \times 4) - (-1 \times 6) && \text{قيمة المحدد} \\ &= -12 + 6 = -6 \end{aligned}$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{aligned} &= (-12 \times -2) - (4 \times -3) && \text{قيمة المحدد} \\ &= 24 + 12 = 36 \end{aligned}$$

استخدام المحددات في حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x + 2y = 19$$

$$4x - y = 10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتي x , y يتم حساب

Δ , Δ_x , Δ_y كما يلي :

Δ ويحتوى على معاملات x , y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (2 \times 4) \\ = -5 - 8 = -13$$

Δ_x ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = (19 \times -1) - (2 \times 10) \\ = -19 - 20 = -39$$

Δ_y ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (19 \times 4) \\ = 50 - 76 = -26$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة x, y كما يلي :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3 \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2$$

المحددات من الرتبة الثالثة

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix} \quad \text{مثال أوجد قيمة المحدد}$$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلي: قيمة المحدد =

$$= 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} \\ = 2(36 - 8) + 5(54 + 3) + 7(48 + 12) \\ = 2(28) + 5(57) + 7(60)$$

ثانياً- المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلي :
إذا كان

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$1 - g^{\setminus}, h^{\setminus}$$

$$2 \quad g + h$$

$$3 - 2g + h$$

$$4 - gh$$

أوجد

الحل: يمكن الحصول على $g^{\setminus}, h^{\setminus}$ بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$g^{\setminus} = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}, h^{\setminus} = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$

٢- $g + h$ يتم جمع كل رقم مع الموجود في نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلي

$$g + h = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

الحل:

٣- $2g + h$ يتم ضرب كل عنصر في $2g$ ثم جمع الناتج مع الموجود في نفس مكانه من المصفوفة h كما يلي

$$2g + h = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}$$

٤- gh يتم ضرب عناصر الصفوف في المصفوفة g x عناصر أعمدة المصفوفة h ثم جمع الناتج كما يلي

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}, h = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 5 \times 3 + 7 \times 7 & 5 \times -1 + 7 \times 12 \\ -4 \times 3 + 6 \times 7 & -4 \times -1 + 6 \times 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 64 & 79 \\ 30 & 76 \end{bmatrix}$$

النقاشات

(من حلول الاخ turki1400 جزاه الله عنا ألف خير)

حل المناقشة الاولى

١- أوجد حاصل جميع المقادير التالية:-

$$4x + 3y - z, \quad 3y + x - z, \quad 10x + 2z - 3y$$

الحل:-

$$4x + 3y - z$$

$$x + 3y - z$$

$$10x - 3y + 2z$$

$$15x + 3y$$

٢- أوجد الناتج $(10x + 4y - z) - 2(4x + y + z)$

الحل:-

$$= 10x + 4y - z - 8x - 2y - 2z$$

$$= 2x + 2y - 3z$$

٣- أوجد قيمة المقدار $3xy + 5yz - xz$ اذا كان $x = -1, y = 2, z = 3$

الحل:-

$$3(-1)(2) + 5(2)(3) - (-1)(3)$$

$$= -6 + 30 + 3$$

$$= 27$$

(حل المناقشة الثانية)

① $2^2 \times 2^2 \times 2^3$
 $2^{-2+2+3} = 2^3 = 2$

② $(3x + 2y)^2$
 $(3x + 2y)(3x + 2y)$
 $9x^2 + 6yx + 6yx + 4y^2$
 $9x^2 + 4y^2 + 12yx$

③ $(2x - y)(2x + y)$
 $4x^2 + 2xy - 2xy - y^2$
 $4x^2 - y^2$

حل المناقشة الثالثة

1)

$$10x = 2x + 40$$

$$10x - 2x = 40$$

$$8x = 40$$

$$x = \frac{40}{8} = 5$$

$$\boxed{x = 5}$$

2)

$$2(x+1) + 3(2y-1) = 6(x+y) + 27$$

$$2x + 2 + 6y - 3 = 6x + 6y + 27$$

$$2x + 6y - 6x - 6y = 27 - 2 + 3$$

$$-4x = 28$$

$$x = \frac{28}{-4} = -7$$

$$\boxed{x = -7}$$

3)

$$x + y = 5$$

$$3x + 2y = 12$$

$$-3x - 3y = -15$$

$$3x + 2y = 12$$

$$-y = -3 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

نقرب (-3)

نقرب (1)

$$x + (3) = 5$$

$$x = 5 - 3$$

$$\boxed{x = 2}$$

حل المناقشة الرابعة

$$P = 180 - 3x$$

$$P = 5x + 36$$

إذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات

ودالة العرض

أوجد كمية وسعر التوازن ؟؟

«الحل»

$$180 - 3x = 5x + 36$$

$$-3x - 5x + 180 - 36 = 0$$

$$\therefore -8x + 144 = 0$$

$$-8x = -144$$

$$x = \frac{-144}{-8} = 18$$

$\therefore$ كمية التوازن هي 18 وحدة

ولإيجاد سعر التوازن نعوض في أحد المعادلتين

$$P = 180 - 3x$$

$$= 180 - 3(18)$$

$$= 180 - 54$$

$$P = 126$$

$\therefore$ سعر التوازن هو 126

حل المناقشة الخامسة

1) $(4x-2y)^2$ حلل المقدار التالي

من القانون :- مربع الأول + 2(الأول X الثاني) + مربع الثاني

$$16x^2 - 16xy + 4y^2$$

2) $16x^3y - 64y^3x$ حلل المقدار الجبري

باستخدام العامل المشترك :-

$$16xy(x^2 - 4y^2)$$

3) $x^3 - 216$ حلل المقدار الجبري

باستخدام العامل المشترك :-

$$(x-6)(x+6)^2$$

نقل القوس من

$$(x-6)(x^2+6x+36)$$

القانون في مثال (١٧)

حل المناقشة السادسة

1) $6x + 4y = 24 \rightarrow ①$

$2x + 2y = 10 \rightarrow ②$

نضرب معادلة (١) في (-2) ومعادلة (2) في (6) للتخلص من x

(-2) $6x + 4y = 24$

(6) $2x + 2y = 10$

$$-12x - 8y = -48$$

نضرب

$$12x + 12y = 60$$

الجمع

$$4y = 12$$

$$\therefore y = \frac{12}{4} = 3$$

نعوض في معادلة (١) :-

$$6x + 4(3) = 24$$

$$6x + 12 = 24$$

$$6x = 24 - 12$$

$$6x = 12$$

$$\therefore x = \frac{12}{6} = 2$$

2) $x^2 - 6x - 16 = 0$

$$(x-8)(x+2)$$

١ التحليل :-

$$\therefore x-8=0 \Rightarrow x=8$$

$$\text{أو } x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

٢ القانون :-

$$a=1, b=-6, c=-16$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)}$$

$$= \frac{6 \pm 10}{2} = 8$$

$$= \frac{6-10}{2} = -2$$

حل المناقشة السابعة

1) $\log_x 64 = 3$

بأن $x^3 = 64$
الأساس

$$\therefore x = 64^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \sqrt[3]{64}$$

$$\boxed{x = 4}$$

2) $\log_{88} 88$

من القاعدة :-

$$\log_n n = 1$$

$$\therefore \log_{88} 88 = 1$$

3) $\log_{10} \left(\frac{216}{6} \right)$

من القاعدة :- $\log_{10} \left(\frac{x}{y} \right) = \log_{10} x - \log_{10} y$

$$\begin{aligned} \therefore \log_{10} \left(\frac{216}{6} \right) &= \log_{10} 216 - \log_{10} 6 \\ &= 1,56 \end{aligned}$$

حل المناقشة الثامنة

1) عدد المباريات التي يتم لعبها في دوري المتزعين ان اعلمت ان هناك 18 فريق

$$18P_2 = 18 \times 17 = 306$$

2) ادارة خا في موظفين ويراد اختيار فريق من 4 أشخاص فعد طرق الاختيار ؟

$$\begin{aligned} 9C_4 &= \frac{9P_4}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 126 \text{ طريقة} \end{aligned}$$

3) نفس السؤال الثاني باعتقاد ان المدير يكون من ضمنهم ؟

$$\begin{aligned} 8C_3 &= \frac{8P_3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 56 \text{ طريقة} \end{aligned}$$

نقص لك المدير
ليتمز مكان ضمن الفريق

4) $10C0$??

من القاعدة :-

$$nC0 = 1$$

$$\therefore 10C0 = 1$$

حل المناقشة التاسعة

1)

$$(x+5)^6$$

او عدد الى الخامس

$$\begin{aligned} n &= 6, r = 4 \\ H_5 &= nCr (x+5)^r (x)^{n-r} \\ &= 6C4 (5)^4 (x)^{6-4} \\ &= \frac{6P4}{4!} (5)^4 (x)^2 \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (5)^4 (x)^2 \\ &= 15(625)(x)^2 \\ &= 9375 x^2 \end{aligned}$$

2)

$$(x-15)^{12}$$

الى الاربعة

نشق الى اربعة زوجين ← رتبة الى الاربعة = $\frac{n+2}{2}$

$$7 = \frac{12+2}{2} =$$

$$\begin{aligned} n &= 12, r = 6 \\ H_7 &= nCr (x-15)^r (x)^{n-r} \\ &= 12C6 (-15)^6 (x)^{12-6} \\ &= \frac{12P6}{6!} (-15)^6 (x)^6 \\ &= \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (-15)^6 (x)^6 \\ &= (924) (-15)^6 (x)^6 \\ &= 10524937500 x^6 \end{aligned}$$

حل المناقشة العاشرة

1)

$$f(x) = x^4$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 \\ &= (-x)(-x)(-x)(-x) \\ f(-x) &= x^4 \end{aligned}$$

∴ الدالة زوجية

2)

$$f(x) = e^{10+2x}$$

∴ هي دالة أسية

3)

$$\sin(x)$$

∴ هي دالة مثلثية

حل المناقشة ١١

① $f(x) = x^{-5}$

أوجد المشتقة الأولى للدالة

بتطبيق القانون

$$y = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

نحل هو :-

$$f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$$

②

$$f(x) = 285$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة

بتطبيق القانون

$$y = c \Rightarrow f'(x) = 0 \quad (\text{بخط } c = \text{كمية ثابتة})$$

$$f'(x) = 0$$

نحلها هو :-

③

$$f(x) = (x-3)(2x-8)$$

أوجد المشتقة الأولى للدالة

بتطبيق القانون (الأولى $\times$ مشتقة الثانية + الثانية $\times$ مشتقة الأولى)

$$f'(x) = (x-3) \cdot (2) + (2x-8) \cdot (1)$$

نحل هو :-

$$= 2x - 6 + 2x - 8$$

$$= 4x - 14$$

حل مناقشة ١٢

①

$$\int 6x \, dx$$

أوجد تكامل الدالة

بتطبيق قوانين التكامل

~~$$\int k \, dx = kx$$~~ نجد ان

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

القانون هو

نطبق القانون :- نحل هو

$$\int 6x \, dx = \frac{6x^{1+1}}{1+1} + C$$

$$= \frac{6x^2}{2} + C$$

②

$$\int (5x^4 + 10) \, dx$$

أوجد تكامل الدالة

نطبق هنا قانونين من قوانين التكامل

$$\int 5x^4 \, dx = \frac{5x^{4+1}}{4+1} + C$$

$$\int 10 \, dx = 10x + C$$

نحل هو :-

$$\int (5x^4 + 10) \, dx = \frac{5x^{4+1}}{4+1} + 10x + C$$

$$= \frac{5x^5}{5} + 10x + C$$

$$= x^5 + 10x + C$$

حل مناقشة ١٢

١) باستخدام المتوالية 2 و 8 و 32 أوجد :-

Ⓐ نوع المتوالية ؟؟ نقول $4 = 8 \div 2$ و $4 = 32 \div 8$: هي هندسية

Ⓑ (أساس المتوالية ؟؟) (الأساس) = 4

Ⓒ (الحد الثامن من المتوالية ؟؟)

$$\begin{aligned} H_8 &= a \cdot r^{n-1} \\ &= (2)(4)^{8-1} \\ &= (2)(4)^7 = 32768 \end{aligned}$$

٢) باستخدام المتوالية 3 و 9 و 15 أوجد :-

Ⓐ نوع المتوالية ؟؟ نقول $6 = 9 - 3$ و $6 = 15 - 9$: متوالية عددية حسابية

Ⓑ (أساس المتوالية ؟؟) أساسها = 6

Ⓒ (الحد التاسع من المتوالية ؟؟)

$$\begin{aligned} H_9 &= a + (n-1)d \\ &= 3 + (9-1)(6) \\ &= 3 + (8)(6) \\ &= 51 \end{aligned}$$

حل مناقشة ١٣

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

أوجد ما يلي :-

١) محدد مصفوفة A ؟؟

$$\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - (4)(-2) \\ &= 30 + 8 = 38 \end{aligned}$$

٢) حاصل جمع A + B ؟؟

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6+3 & 4+(-2) \\ (-2)+5 & 5+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

٣) حاصل ضرب A x B ؟؟

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6(3)+4(5) & 6(-2)+4(10) \\ -2(3)+5(5) & -2(-2)+5(10) \end{bmatrix}$$

بوضعها بشكل أكبر :-

$$\begin{bmatrix} 6(3)+4(5) & 6(-2)+4(10) \\ -2(3)+5(5) & -2(-2)+5(10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18+20 & -12+40 \\ -6+25 & 4+50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 38 & 28 \\ 19 & 54 \end{bmatrix}$$

الواجبات

الواجب الأول:-

السؤال 1

حاصل جمع المتبايرين
 $3x+4y-z$, $5x-4y-z$ يساوي:

$8x+8y-2z$ ☐

$8x$ ☐

$2x+8y-$ ☐

$8x-2z$ ☒

السؤال 2

حاصل طرح المقدار
 $3x+4y-z$ من $5x-4y-z$ يساوي:

$2x-8y$ ☒

$2x-2z$ ☐

$8x+2z$ ☐

$2x+8y-$ ☐

السؤال 3

أوجد قيمة المقدار
 $8x-y-2z$ اذا كان $x=1, y=-1, z=0.5$:

7 ☐

10 ☐

8 ☒

9 ☐

الواجب الثاني:-

السؤال 1

عند تحليل المقدار الجبري x^3-64 يكون الناتج:

$(x-4)(x^2+4x+16)$ ☒

$(x-4)(x^2-4x+16)$ ☐

$(x+4)(x^2-4x-16)$ ☐

$(x+4)(x^2+4x+16)$ ☐

السؤال 2

إذا كان $(x-2)^2=121$ فإن قيمة x تساوي:

$x=13$ ☒

$x=11$ ☐

$x=142$ ☐

$x=2$ ☐

السؤال 3

إذا كان $\log_{1000} x = 3$ فإن قيمة x تساوي

4 ☐

100 ☐

3 ☐

10 ☒

الواجب الثالث:-

السؤال الأول:

المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^{-3}$ تساوي :

(أ) x^{-3}

(ب) $4x^{-3}$

(ج) $-3x^{-4}$

(د) x^{-4}

السؤال الثاني:

تكامل الدالة $\int x^4 dx =$

(أ) $\frac{x^5}{5} + c$

(ب) $-\frac{x^5}{5} + c$

(ج) $\frac{x^5}{5}$

(د) $x + c$

السؤال الثالث:

الحد العاشر في المتوالية 3, 7, 11, ... قيمته:

(أ) ٢١

(ب) ٤٢

(ج) ٣٩

(د) ٩٢

السؤال الرابع:

محدد المصفوفة $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$ يساوي:

(أ) ٤٨

(ب) ٢٩

(ج) ٤٣

(د) ٣٦

انتهى .. أخوكم محمد E7sas..