بسم الله الرحمن الرحيم

المجموعات

$A = \{1, 2, 3\}$

① مجموعة الأعداد الطبيعية: N

$N = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

② مجموعة الأعداد الكلية: W

$W = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

③ مجموعة الأعداد الصحيحة: Z ← موجب، سالب

$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

④ مجموعة الأعداد النسبية (الكسرية) Q

هى أى عدد يصلح على شكل $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

$\frac{5}{3}$ ، $\frac{7}{4}$ ، $\frac{2}{9}$ ، و

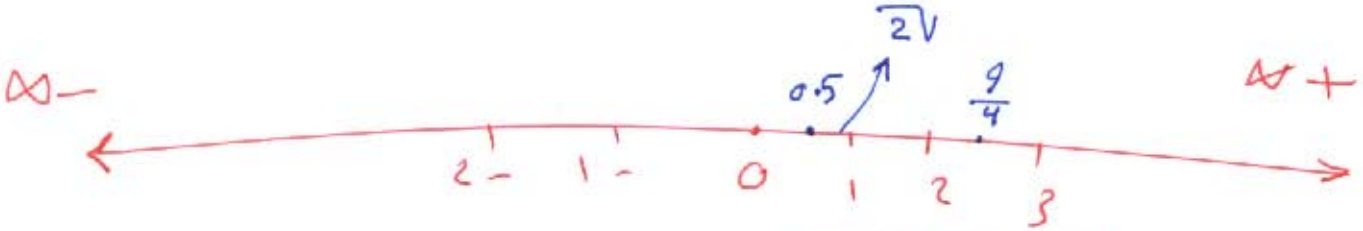
٥) الأعداد غير النسبية (غير الكسرية)

لا يمكن وضعها على شكل $\frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

$\sqrt{2}$ $\sqrt{11}$

٥) مجموعة الأعداد الحقيقية R

تشمل جميع الأعداد $(-\infty, \infty)$



طرق كتابة المجموعات

١) طريقة السرد (العد) ذكر جميع عناصر المجموعة

مجموعة الأعداد الزوجية

$A = \{ 2, 4, 6, 8, \ldots \}$

② طريقة الصفة المميزة (القاعدة)

$\{ X : X$ عدد زوجي $\}$

مثال: المجموعات التالية:

طريقة السرد $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

أو لها الطريقة الصفة المميزة

$A = \{ X : X$ عدد زوجي و $2 \leq X \leq 10 \}$

* المجموعة الخالية: ϕ مجموعة بدون أي عنصر

وهي موجودة في جميع المجموعات $\phi = \{ \}$

* المجموعة المنتهية: محدد عناصرها بدايتها ونهايتها

$A = \{ 1, 2, 5, 7, 9 \}$

* المجموعة غير المنتهية: غير محدد عناصرها (مفتوحة)

$A = \{ 2, 4, 6, \dots \}$

* المجموعة الكلية (الشاملة) U تشمل جميع المجموعات

A = {2, 4, 6, 8, 10} $2 \leq X \leq 10$ ① مجموعة الأعداد الزوجية

B = {1, 3, 5, 7, 9} $1 \leq X \leq 9$ ② مجموعة الأعداد الفردية

U = {1, 2, 3, ... 10}

* المجموعة الجزئية $\subset$ ليست جزئية $\not\subset$

الجزئية وغير الجزئية: تشمل مجموعة مع مجموعة أخرى

A = {1, 3, 5} B = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

لأنه كل عناصر A موجودة في B

$A \subset B$

* الإنتماء: $\in$ لاينتمي $\notin$

الإنتماء وغير الإنتماء: يشمل عنصر مع مجموعة

A = {1, 2, 5, 7}

$2 \in A$

(*) المجموعات المتساوية : (=) تساوي مجموعتان يعني جميع عناصر A موجودة في B وجميع عناصر B موجودة في A

$A = \{1, 3, 5, 7\}$ $B = \{3, 5, 7, 1\}$

$A = B$

(*) المجموعات المتكافئة : (≡) إذا كان عدد عناصر A = عدد عناصر B

$A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{A, B, C\}$

$A \equiv B$

العمليات على المجموعات :

① ∪ الإتحاد جميع عناصر المجموعتان بدون تكرار

② ∩ تقاطع العناصر المشتركة فقط بين المجموعتان

③ A' متممة A من المجموعة الشاملة

④ $A - B$ (الفرق) الموجود في A فقط وليس B

9) $\overline{A \cup B} = \{z\}$

10) $\overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 5, w, y, z\}$

مثال:-

اذا كانت

$A = \{1, 2, 3, x, y\}$

$B = \{3, 4, 5, x, w\}$

وكانت المجموعة الكلية

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, w, x, y, z\}$

فأوجد:-

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, x, y, 4, 5, w\}$

2) $A \cap B = \{3, x\}$

3) $A - B = \{1, 2, y\}$

4) $B - A = \{4, 5, w\}$

5) $A' = \{4, 5, w, z\}$

6) $B' = \{1, 2, y, z\}$

7) $A' \cup B' = \{4, 5, w, z, 1, 2, y\}$

8) $A' \cup A = \{1, 2, 3, x, y, 4, 5, w, z\} = U$

$A \cap A' = \{\} = \phi$ المجموعة الخالية

لاحظ:

$A \cup A' = U$

$A \cap A' = \phi$

الضرب الديكارتي:

معناة: ضرب كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى في كل عنصر من عناصر المجموعة الثانية على حدة.

$A = \{-2, 1\}$ $B = \{-3, 1, 4\}$

$A \times B = \{(-2,-3), (-2,1), (-2,4), (1,-3), (1,1), (1,4)\}$ على حدة

$B \times A = \{(-3,-2), (-3,1), (1,-2), (1,1), (4,-2), (4,1)\}$

الزوج المرتب : (x, y)

مثلاً

$(2, -5)$ $\quad x = 2 \quad y = -5$

تساوي الأزواج المرتبة :

إذا كان $x_2 = x_1$ و $y_1 = y_2$

مثال : أوجد قيم x و y التي تحقق المعادلة

$$(\overset{x_1}{x+1}, \overset{y_1}{y - \frac{1}{2}}) = (\overset{x_2}{4}, \overset{y_2}{\frac{3}{2}})$$

$x + 1 = 4 \Rightarrow x = 4 - 1$ $\quad \therefore \boxed{x = 3}$

و $y - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ $\quad \boxed{y = 2}$

بسم الله الرحمن الرحيم

الدوال : $f(x)$

الدالة علاقة بين متغيرين x و y أو A, B

عناصر x مجال الدالة :

عناصر y مدى الدالة : صور x في y

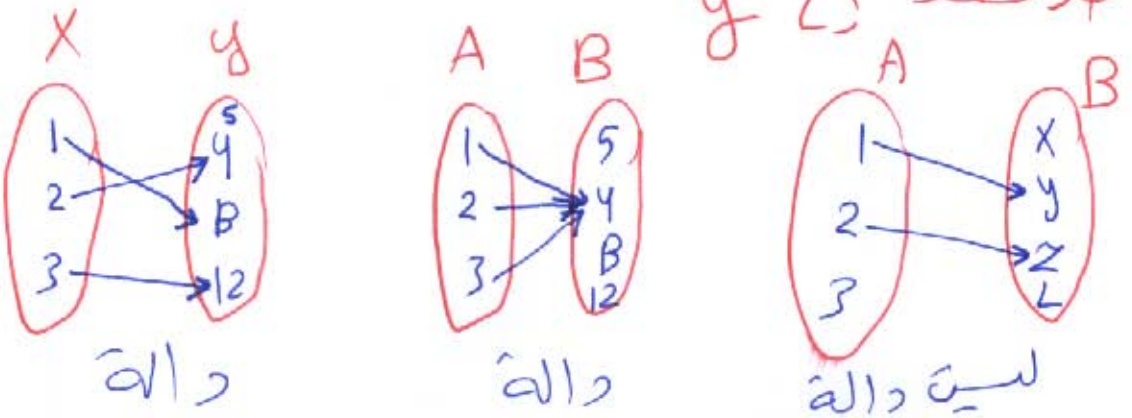
مثال : أوجد مجال ومدى الدالة :

$$f(x) = \{(1,4), (2,5), (7,3), (4,3)\}$$

مجال الدالة : $\{1, 2, 7, 4\}$

مدى الدالة : $\{4, 5, 3\}$

معرفة : الدالة : إذا كان كل عنصر من x يخرج منه سهم واحد فقط إلى y



إذا كانت الدالة على شكل مجموعة :

$\{(1,5),(2,5),(7,3)\}$

إنظر (1) X هل يوجد مكرر منك دالة

إذا كانه لا يوجد مكرر X دالة

إذا كانه يوجد مكرر X ليس دالة

المجال = $\{1, 2, 7\}$

المدى = $\{5, 3\}$

الدالة المتباينة : إذا كانه كل عنصر من X يخرج منه سهم واحد لعنصر واحد من y

كل عنصر من X غير مشترك مع عنصر في y

$\{(1,5),(2,7),\{3,9\}$

دالة متباينة .

الدوال الحقيقية

$$f(X) \Longrightarrow R \qquad (-\infty, \infty)$$

درجة الدالة هي قيمة أكبر أس فيك.

① الدالة الثابتة:- (الدالة الصفرية) (a=عدد)

$$f(X) = a$$

② الدالة من الدرجة الأولى (الخطية)

$$f(X) = aX + 2$$

③ الدالة من الدرجة الثانية (التربيعية)

$$f(Y) = aX^2 + bX + c$$

مثال:- حدد درجة الدوال الدالية:-

1) $f(X) = 3$
2) $f(X) = 3X - 4$
3) $f(X) = X^2 - X + 1$
4) $f(X) = 2 - 3X + X^3$
5) $f(X) = X^2$
6) $f(X) = X^5 + 2X^5 - 4X + 6$

① الصفرية (الثابتة)
② الدرجة الأولى (الخطية)
③ الدرجة الثانية (التربيعية)
④ الدرجة الثالثة (التكعيبية)
⑤ الدرجة الثانية (التربيعية)
⑥ الدرجة الخامسة.

التعويض في الدالة:-

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$

أوجد:-

$$f(2) = (2)^2 + 4(2) - 3 = 9$$

$$f(-1) = (-1)^2 + 4(-1) - 3 = -6$$

$$f(c+1) = (c+1)^2 + 4(c+1) - 3$$

$$= c^2 + 2c + 1 + 4c + 4 - 3$$

$$= c^2 + 6c + 2$$

بسم الله الرحمن الرحيم

الدوال الأسية واللوغاريتمية

① الدوال الأسية:

$f(x) = a^x$

إذا كان x في موقع الأس

② الدالة الأسية الطبيعية:

$f(x) = e^x$ (ثابت e)

مجال الدالة الأسية = R $(-\infty, \infty)$

مدى الدالة الأسية = $(0, \infty)$

③ الدالة اللوغاريتمية:

$f(x) = \log_a x$

إذا كان x في موقع العدد

④ الدالة اللوغاريتمية الطبيعية:

$f(x) = \ln x$

مجال الدالة اللوغاريتمية: $(0, \infty)$

مدى الدالة اللوغاريتمية: R $(-\infty, \infty)$

مثال :

$$y = (x-1)^2 + 2$$

إذاهة الدالة إلى اليسار بمقدار 1

و إلى الأعلى بمقدار 2

④ إزاحة الدالة إلى اليمين :-

$$y = f(x \overset{\text{سالب}}{-} c)$$

إزاحة الدالة (أ) اليمين بمقدار c

مثال :-

$$y = |x - 1|$$

إزاحة الدالة بمقدار 1 إلى اليمين .

---

⑤ إزاحة الدالة (أ) اليسار :-

$$y = f(x \overset{\text{موجب}}{+} c)$$

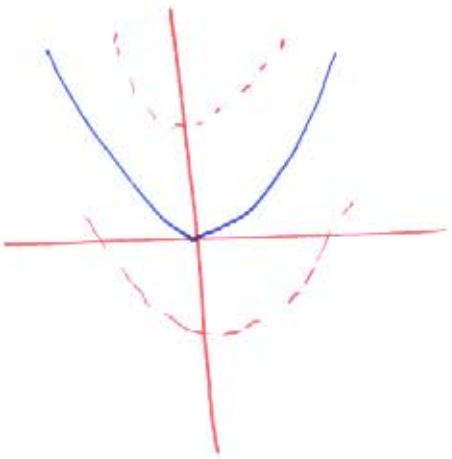
إزاحة الدالة (أ) اليسار بمقدار c

مثال :-

$$y = |x + 3|$$

إزاحة الدالة (أ) اليسار بمقدار 3

رسم الدوال والإزاحة



ⓐ إزاحة الدالة إلى الأعلى:

$$y = f(x) \overset{\text{موجب}}{+ c}$$

نزيح الدالة بمقدار c لأعلى ∴

مثال:

$$y = x^2 + 2$$

إزاحة الدالة لأعلى بمقدار (2)

ⓑ إزاحة الدالة إلى الأسفل:

$$y = f(x) \overset{\text{سالب}}{- c}$$

نزيح الدالة بمقدار c لأسفل

مثال:

$$y = x^2 - 3$$

إزاحة الدالة لأسفل بمقدار 3

⑤ الدالة الجذرية :-

دليل الجذر $\sqrt{\quad}$

ⓐ إذا كان دليل الجذر فردي :-

المجال = R

مثال :- أوجد مجال الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$

المجال = R

ⓑ إذا كان دليل الجذر زوجي :-

المجال :- ما يحل ما تحت الجذر أكبر منه أو يساوي صفر ≥ 0

مثال :- أوجد مجال الدالة :-

$\sqrt{x+4}$

$x + 4 \geq 0$

$x \geq -4$ مجال

$[-4, \infty)$

مثال :- أوجد مجال الدالة

$\sqrt[10]{2x-6}$

$2x - 6 \geq 0$

$\frac{2x}{2} \geq \frac{6}{2}$

$x \geq 3$

$[3, \infty)$

الدوال ومجالها ومداها

① الدالة كثيرة الحدود :.

$$f(x) = 3x^2 + 5x - 7$$

مجال f = R مجموعة الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$

② الدالة الكسرية :- بسط / مقام

$$f(x) = \frac{3x + 5}{x - 2}$$

مجال f = $R - \{$أصفار المقام$\}$

$x - 2 = 0$

$x = 2$

المجال = $R - \{2\}$

مثال :-

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x + 4}$$

$x + 4 = 0$

$x = -4$

$R - \{-4\}$

التوازن :- بين العرض والطلب

شرط التوازن :-

$$Q_d = Q_s$$

مثال :- إذا كانت دالة الطلب هي

$$Q_d = 20 - P$$

ودالة العرض هي

$$Q_s = P - 10$$

أوجد :- ① سعر التوازن

$$20 - P = P - 10$$

$$20 + 10 = P + P$$

$$\frac{30}{2} = \frac{2P}{2}$$

$$\therefore P = 15$$

② كمية التوازن :-

بالتعويض عن قيمة $P = 15$ في الدالة :

$$Q_d = 20 - P$$

$$Q_d = 20 - 15 = 5$$

② دالة العرض :-

$$Q_S = 3P - 2$$

① أوجد الكمية المعروضة عند الثمن $P = 5$

$$Q_S = 3(5) - 2$$
$$= 15 - 2 = \boxed{13}$$

② أوجد الثمن عند الكمية المعروضة $Q_S = 10$

$$10 = 3P - 2$$

$$\frac{12}{3} = \frac{3P}{3}$$

$$\boxed{4 = P}$$

دوال العرض والطلب والتوازن

١) دالة الطلب

الكمية المطلوبة ← الثمن

$Q_d = 25 - 5P$

أ) أوجد الكمية المطلوبة عند الثمن $P = 3$

$Q_d = 25 - 5(3)$

$= 25 - 15 = 10$

ب) أوجد سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_d = 18$

$18 = 25 - 5P$

$18 - 25 = -5P$

$\frac{-7}{-5} = \frac{-5P}{5}$ ← على -5

$\frac{7}{5} = P$ $= 1.4$

أمثلة:

هل الدالة زوجية أم فردية

$f(x) = x^2$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

الدالة زوجية

مثال:

$f(x) = x^3 + x$

$f(1) = (1)^3 + (1) = 2$

$f(-1) = (-1)^3 + (-1) = -2$

دالة فردية

الدوال الزوجية والفردية

(أ) الدالة الزوجية :- نعوض عنه

$f(1) = 5 \quad a$

$f(-1) = 5 \quad a$

∴ الدالة زوجية

(ب) الدالة الفردية :- نعوض عنه

$f(1) = 5 \quad a$

$f(-1) = -5 \quad -a$

∴ الدالة فردية

(ج) الدالة لا زوجية ولا فردية :-

$f(1) = 5 \quad a$

$f(-1) = 7 \quad b$

لا زوجية ولا فردية .

خواص اللوغاريتمات

① الضرب يحول إلى جمع:

$$\log x \cdot y = \log x + \log y$$

② القسمة تحول إلى طرح:

$$\log \frac{x}{y} = \log x - \log y$$

④

$$\log x^{n} = n \log x$$

⑤

$$\log_x x = 1 \qquad \log_5 5 = 1$$

⑥

$$\log 1 = \text{صفر}$$

الدالة الخطية: تكون y دالة خطية

$$y = 2x + 3$$

$$y = x^2 + 2x - 3$$

الدالة الضمنية: تكون y, x دالة ضمنية وليست دالة لأنها دائرة

$$x^2 + y^2 = 25$$

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$$

الاشتقاق (التفاضل) $\frac{dy}{dx}$

$\frac{dy}{dx}$	المشتقة الأولى	$f'(x)$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	المشتقة الثانية	$f''(x)$
$\frac{d^3y}{dx^3}$	المشتقة الثالثة	$f'''(x)$

قواعد الاشتقاق :

① $f(x) =$ عدد $\quad f'(x) = 0$

$f(x) = 2 \quad \frac{dy}{dx} = 0$

$f(x) = 5x \quad f'(x) = 5$

$f(x) = ax^n \quad f'(x) = a \cdot n\, x^{n-1}$

$f(x) = 5x^4 \quad f'(x) = (5)\,4\, x^{4-1}$

$= 20\, x^3$

متوسط التغير :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال :: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^2 + 2$

عندما تتغير x من 1 إلى 1.5

1 2

$f(1) = (1)^2 + 2 = 3$ $\quad x_1 = 1$

$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 4.25$ $\quad x_2 = 1.5$

$$= \frac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = 2.5$$

مثال :-

أوجد المشتقة الأولى للدوال التالية :-

أوجد $\frac{dy}{dx}$

1) $y = 3x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3$$

2) $y = 16x^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{dy}{dx} = 16\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = 8x^{-\frac{1}{2}}$$

3) $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = 36x^2 + 30x - 4$$

الاشتقاق الجزئي :-

مثال :-

$$Z = xy + x^2y + y^2x$$

أوجد $\frac{\partial Z}{\partial x}$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = y + 2xy + y^2$$

أوجد $\frac{\partial Z}{\partial y}$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = x + x^2 + 2yx$$

مثال ١٧ إذا كان

$$Z = 2x^2y + y^2$$

فأوجد $\frac{\partial Z}{\partial x}$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 4xy$$

مثال: إذا كان

$$y = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 5$$

فأوجد: $\frac{d^2y}{d^2x}$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x + 6$$

$$\frac{d^2y}{d^2x} = 12x + 6$$

مثال: $\frac{dy}{dx}$ $\qquad y = x^{-1}$

$$\frac{dy}{dx} = -1\,x^{-1-1} = -x^{-2}$$

مثال: $y = 3x^5 + 2x^{-3} - 4x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx}y = 15x^4 - 6x^{-4} + 8x^{-3}$$

مثال: إذا كان $y = x^3 + 2x^2 + x$

فاوجد قيمة $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$ ثم أوجد

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x + 1$$

$$x = 1 \quad = 3(1)^2 + 4(1) + 1$$

$$= 3 + 4 + 1 = 8$$

مثال: إذا كان $y = 6x^3 - 1$

فأوجد $\frac{d^2y}{d^2x}$ عند $x = 5$

$$\frac{dy}{dx} = 18x^2 - 1$$

$$\frac{d^2y}{dx} = 36x \quad \text{عند } x = 5 = (36 * 5)$$

$$= 180$$

مثال: أوجد

$$y = 9x^{\frac{1}{3}}$$

$\frac{dy}{dx}$ ثم

$$\frac{dy}{dx} = 9\left(\frac{1}{3}\right) x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= 3x^{-\frac{2}{3}}$$

المتباينات وإشارة الطلقة :-

فترة مغلقة ≤ ≥ فترة مفتوحة
[ ] ( )

أولاً : المتباينات :-

حل المتباينة :-

$$4X + 7 \geq 2X - 3$$

$$4X - 2X \geq -3 - 7$$

$$\frac{2X}{2} \geq \frac{-10}{2}$$ بالقسمة على 2

$$X \geq -5$$

مجموعة الحل :- $[-5, \infty)$

مثال :-

حل المتباينة $-5 < 3X - 2 < 1$

بإضافة $+2$ لجميع الأطراف

$$-5+2 < 3X - 2 + 2 < 1+2$$

$$-3 < 3X < 3$$

بالقسمة على 3

$$\frac{-3}{3} < \frac{3X}{3} < \frac{3}{3}$$

$$-1 < X < 1$$

مجموعة الحل $(-1, 1)$

القيمة المطلقة

دائماً ناتج القيمة المطلقة موجب:

$$|3| = 3$$

$$|-3| = 3$$

مثال: حل المتباينة:

$$|2x+4| \leq 3$$

بإضافة -4

$$-3 \leq 2x+4 \leq 3$$

$$-3-4 \leq 2x+4-4 \leq 3-4$$

بالقسمة على 2

$$\frac{-7}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-1}{2}$$

$$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$$

∴ مجموعة الحل: $\left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$

مثال : حل المتباينة :

$$\left| \frac{3x+1}{2} \right| < 1$$

بالضرب في 2 $\quad 2 \times -1 < \frac{3x+1}{2} < 1 \times 2$

$$-1-2 < 3x+1-1 < 2-1$$

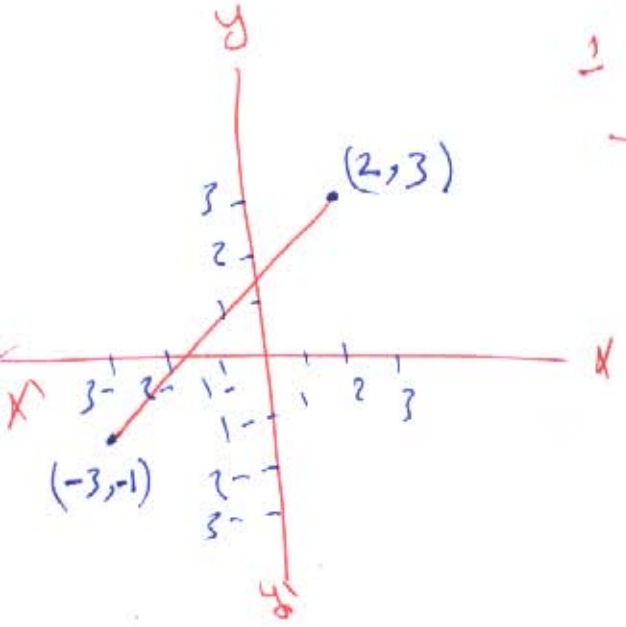
بإضافة 1- لجميع الأطراف

بالقسمة على 3 $\quad \frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{1}{3}$

$$-1 < x < \frac{1}{3}$$

مجموعة الحل : $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

معادلة الخط المستقيم :



النقطة عبارة عن زوج مرتب

(x, y)

① ميل الخط المستقيم :-

قاعدة

ميل $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

مثال :- أوجد ميل الخط المستقيم المار بين النقطتين

① $(3, 7)$ ، ② $(1, -3)$

x_1 y_1 x_2 y_2

$$m = \frac{-3-7}{1-3} = \frac{-10}{-2} = 5$$

⑤ معادلة الخط المستقيم: [بمعلومية الميل والجزء المقطوع من y]

قاعدة

$$y = mx + c$$

m ← الميل

c ← الجزء المقطوع من محور y

مثال: أوجد ميل المستقيم الذي معادلته:

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

الميل $m = \frac{1}{2}$. الجزء المقطوع $c = 3$

مثال: أوجد ميل المستقيم الذي معادلته:

$$2x + 4y - 7 = 0$$

بالقسمة على 4

$$\frac{4y}{4} = -\frac{2x}{4} + \frac{7}{4}$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{4}$$

الميل $= \frac{-1}{2}$

الجزء المقطوع $= \frac{7}{4}$

② معادلة الخط المستقيم بمعلومية (الميل ونقطة)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال :- أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ وميله -2

$x_1 = 5$ ، $y_1 = -3$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = -2(x - 5)$$

$$y + 3 = -2x + 10$$

$$y = -2x + 10 - 3$$

$$y = -2x + 7$$

ميل الموازي وميل العمودي

① ميل الموازي :- $m_1 = m_2$

② ميل العمودي :- نقلب وغير الإشارة .

مثال :-

إذا كان ميل المستقيم = $\frac{5}{4}$ فأوجد

① ميل المستقيم الموازي = $\frac{5}{4}$

② ميل المستقيم العمودي = $-\frac{4}{5}$

مثال .

إذا كان مستقيم معادلته $y = -2x + 4$

فأوجد :- الميل = -2

① ميل الموازي :- = -2

② ميل العمودي :- = $-\frac{1}{-2}$ = $\frac{1}{2}$

التكامل :-

$$\int_b^a dx$$

(أ) التكامل المحدود

(ب) التكامل اللامحدود $\int dx$

قواعد التكامل اللامحدود :-

$$\int a^{عدد}\, dx = aX + C$$

$$\int 5\, dx = 5X + C$$

$$\int aX^n\, dx = a\frac{X^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int 3X^5\, dx = 3\frac{X^{5+1}}{5+1} + C$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}}\,\frac{X^6}{\cancel{6}\,2} + C$$

$$= \frac{X^6}{2} + C$$

مثال:

1) $\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C$

2) $\int 3x^2 \, dx = \cancel{3} \frac{x^3}{\cancel{3}} + C$

$\frac{x^3}{3} + C$

$= x^3 + C$

3) $\int 7x + 3 \, dx = 7 \frac{x^2}{2} + 3x + C$

$\frac{x^2}{2} + 3x + C$

$= \frac{7}{2} x^2 + 3x + C$

4) $\int (5x^6 - 2x^4 + 3x^2 - 6) \, dx$

$= 5 \frac{x^7}{7} - 2 \frac{x^5}{5} + \cancel{3} \frac{x^3}{\cancel{3}} - 6x + C$

$= \frac{5}{7} x^7 - \frac{2}{5} x^5 + x^3 - 6x + C$

التكامل المحدود :-

1) $\int_1^3 x^3 \, dx = 20$

2) $\int_0^2 (x+6) dx = 14$

3) $\int_1^3 (3x^2 + 4x - 5) \, dx =$

4) $\int_{-2}^2 (5x+4) \, dx = 16$

بسم الله الرحمن الرحيم

العمليات على الدوال : $f(x)$ $g(x)$

① خواص الدوال :

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

4) $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

5) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

مثال : إذا كانت

$f(x) = 3x + 5$

$g(x) = x^2 + 1$

فأوجد :

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$= (3x+5) + (x^2+1)$

$= 3x + 5 + x^2 + 1 = x^2 + 3x + 6$

2) $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$= (3x+5) - (x^2+1)$

$= 3x + 5 - x^2 - 1 = 3x + 4 - x^2$

$= -x^2 + 3x + 4$

3) $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= (3x+5)(x^2+1)$

$= 3x^3 + 3x + 5x^2 + 5$

$= 3x^3 + 5x^2 + 3x + 5$

4) $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3x+5}{x^2+1}$

5) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+1)$

$= f(x^2+1) = 3(x^2+1) + 5$

$= 3x^2 + 3 + 5 = \boxed{3x^2 + 8}$

⑤ $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= f(x^2+1)$

بالتعويض في الدالة $f(x) = 3x + 5$

$f(x^2+1) = 3(x^2+1) + 5$

$= 3x^2 + 3 + 5$

$= \boxed{3x^2 + 8}$

معكوس الدالة $f^{-1}(x)$

مثال: أوجد معكوس الدالة:

$$f(x) = 2x - 5$$

① نعوض عن $f(x)$ بـ y

$$\therefore y = 2x - 5$$

② نبدل x بـ y

$$x = 2y - 5$$

③ إيجاد قيمة y

$$\frac{x+5}{2} = \frac{2y}{2}$$ بالقسمة على 2

$$\frac{x+5}{2} = y$$

④ نعوض عن قيمة y في المعكوس

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

النهايات

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

مثال: أوجد:

$$\lim_{x \to 2} (3x + 4) = 3(2) + 4 = 10$$

$$\lim_{x \to 3} (2x - 5) = 2(3) - 5 = 1$$

$$\lim_{x \to 1} (3x^3 + 4x - 3)^3$$

$$(3(1)^3 + 4(1) - 3)^3 = \boxed{64}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{3x^2 + 7}{x - 5} = \frac{3(3)^2 + 7}{3 - 5} = -17$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{-1 + 1} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم التعيين :-

التحليل :

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} =$$

$$\lim_{x \to -1} x - 1 = -1 - 1 = (-2)$$

مثال : أوجد ناتج

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4^2}{x-2} = \frac{0}{0}$$

حالة عدم تعيين

$$= \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = x + 2 = 2 + 2 = (4)$$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[3]{x^2 + 2x}$$

$$= \sqrt[3]{2^2 + 2(2)} = \sqrt[3]{8} =$$

قواعد النهايات

1) $$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

2) $$\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$$

مثال:- إذا كانت

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 3} g(x) = 12$$

فأوجد

1) $$\lim_{x \to 3} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to 3} f(x) - \lim_{x \to 3} g(x)$$

$$= 4 - 12 = -8$$

2) $$\lim_{x \to 3} [f(x) \cdot g(x)] = 4 \times 12 = 48$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{5\,g(x)}{f(x)}$$

$$= \lim 5\,g(x) \div \lim f(x)$$

$$= 5(12) \div 4 =$$

$$= 60 \div 4 = 15$$

النهايات عند المحدودة بنقطة

$$x \longrightarrow \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}} = \frac{x^5 + 3x^2 - 4}{5x^2 + 3x}$$

① الحالة الأولى:

② إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام النهاية ∞

ب) إذا كانت درجة البسط = درجة المقام :-

النهاية = معامل درجة البسط / معامل درجة المقام

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

ج) إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام :-

النهاية = صفر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x - 2}{x^2 + 2x + 1} = \text{صفر}$$

مراجعة عامة

① مجال الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$

دليل الجذر فردي ∴ المجال = R

---

② مجال الدالة $f(x) = \frac{x+7}{x^2-1}$

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \quad \therefore x = \pm 1$

$R - \{+1, -1\}$

---

③ مجال الدالة $f(x) = \log 2x$

مجال الدالة اللوغاريتمية $(0, \infty)$

---

④ مجال الدالة $f(x) = x^3 + 4x^2 - x + 1$

كثيرة حدود مجالها $= R$

⑦ إذا كانت دالة الطلب هي

$Q_d = 25 - 5P$

ⓐ الكمية المطلوبة عند الثمن $P = 3$ هي

$Q_d = 25 - 5(3) = 25 - 15 = 10$

ⓑ عند الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_d = 5$

$5 = 25 - 5P$

$5 - 25 = -5P$

$\frac{-20}{-5} = \frac{-5P}{-5}$

$\boxed{4 = P}$

⑨ إذا علمت أن دالة الطلب هي $Q_d = 200 - P$

ودالة العرض هي $Q_s = P - 100$

ⓐ أوجد سعر التوازن:-

التوازن $Q_d = Q_s$

$200 - P = P - 100$

$200 + 100 = P + P$

$\frac{2P}{2} = \frac{300}{2}$

$P = 150$

ⓑ كمية التوازن:-

$Q_d = 200 - P$

$= 200 - 150 = 50$

(١٢) إذا كانت

$g(x) = (x+2)$

$f(x) = x^2 - 3x$

(١٣) $(f + g(x)) =$

$= f(x) + g(x)$

$= (x^2 - 3x) + (x+2)$

$= x^2 - 3x + x + 2$

$\boxed{= x^2 - 2x + 2}$

(١٤) $(f \times g(x) = f(x) \cdot g(x)$

$= (x^2 - 3x)(x+2)$

$= x^3 + 2x^2 - 3x^2 - 6x$

$\boxed{= x^3 - x^2 - 6x}$

$f \circ g(3) = f(g(3))$ (10)

$= f(3+2) = f(5)$

$f(5) = 5^2 - 3(5)$

$= 25 - 15 = 10$

$$f \circ g(x) = f(g(x))$$

$$= f\ (x+2)$$

$$f\ (x+2) = (x+2)^2 - 3(x+2)$$

$$= x^2 + 4x + 4 - 3x - 6$$

$$= x^2 + x - 2$$

$$(x+2)^2 = x^2 + 2(x)(2) + 2^2$$

$$x^2 + 4x + 4$$

$$(\text{الأول})^2 + 2(\text{الأول})(\text{الثاني}) + (\text{الثاني})^2$$

$$(x+2)^2 = (x+2)(x+2)$$

$$= x^2 + 2x + 2x + 4$$

$$= x^2 + 4x + 4$$

إذا كانت :

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

①

① $A \cap B = \{1, 3\}$

② $A' = \{4, 5, 6, 7\}$

③ $B' = \{2, 4, 6, 7\}$

④ $A' \cup B' = \{2, 4, 5, 6, 7\}$

(٤) ميل الخط المستقيم المار بالنقطتين

$$(\overset{x_1}{7}, \overset{y_1}{4}) \quad , \quad (\overset{x_2}{4}, \overset{y_2}{3})$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-4}{4-7} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

(٥) معادلة المستقيم الذي ميله $m = 1$ ومقطوعه الصادي $b = 3$

$$y = mx + c$$

$$y = 1x + 3$$

$$y = x + 3$$

(٦) معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(3, 3)$ ويوازي المستقيم

$$5x - y = 6$$

$$\frac{-y}{-1} = \frac{-5x}{-1} + \frac{6}{-1}$$

$$y = 5x - 6$$

الميل $= m = 5$

النقطة $(3, 3)$

معادلة المستقيم بمعلومية الميل ونقطة :-

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 3(x - 3)$$

$$y - 3 = 3x - 9$$

$$y = 3x - 9 + 3$$

$$\boxed{y = 3x - 6}$$

(٣٧)

تعتبر الدالة $x^2 + y^2 = 25$

دالة ضمنية

(٣٩) عليه الحصول على مشتق $f(x)=x^3+3$ بإزاحة مشتق

$f(x)=x^3$ عبر ـ

د !! أعلى

---

(٤٠) عليه الحصول على مشتق الدالة $f(x)=(x+4)^2$

بإزاحة مشتق الدالة $f(x)=x^2$

٤ !! ليس ـ

---

(٤١) حل المتباينة :-

$3x-5<10$

$3x<10+5$

$\frac{3x}{3}<\frac{15}{3}$ $(-\infty,5)$

$x<5$

(٤٣) حل المتباينة:

$$5x - 6 < 11$$

$$5x < 11 + 6$$

$$\frac{5x}{5} < \frac{17}{5}$$

$$x < \frac{17}{5} \qquad (-\infty, \frac{17}{5})$$

$$= (-\infty, 3.4)$$

---

(٤٢) حل المتباينة:

$$\left| \frac{3x+1}{2} \right| \leq 1$$

$$2x - 1 \leq \frac{3x+1}{2} \leq 1 \times 2$$

$$-2-1 \leq 3x + 1 - 1 \leq 2 - 1$$

$$\frac{-3}{3} \leq \frac{3x}{3} \leq \frac{1}{3}$$

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{3} = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$$

(٤٨) إذا كانت $y = 2X + 3$ فإن معكوس العلاقة هو

$$X = 2y + 3$$

$$\frac{X - 3}{2} = \frac{2y}{2}$$

$$\frac{X - 3}{2} = y$$

$$X = \frac{y - 3}{2}$$

(٤٩) إذا كانت $A = \{1, 2\}$ $B = \{3, 4\}$

$$A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$$

(٥٠) هل الدالة $f(x) = x^4 + x^2$ دالة زوجية

$f(1) = (1)^4 + (1)^2 = 1 + 1 = 2$

$f(-1) = (-1)^4 + (-1)^2 = 1 + 1 = 2$