(مبادئ الرياضيات)

للدكتور: ملفـي الرشيــدي

المحاضرة التمهيدية

<u>محتوى المقرر:-</u>

١/ مقدمة : الأعداد ، القيم المطلقة

٢/ التحليل: العامل المشترك، الفرق بين مربعين، الفرق بين مكعبين، مجموع المكعبين، المقدار الثلاثي

٣/ الأسس: مفهومها، قوانينها، أنواعها(صحيحة، كسرية)

٤/ اللوغاريثمات: قوانين، عمليات حسابية، تطبيقاتها

٥/ التباديل و التوافيق: المفاهيم، طرق الحسابات، العلاقة بينهما

٦/ نظرية ذات الحدين: القانون الأساسي، إيجاد المفكوك، إيجاد الحد العام، إيجاد الحد لأس معين.

٧/ حل المعادلات: المعادلات الخطية في مجهول واحد، مجهولين، المعادلات الآنية، معادلات من الدرجة الثانية.

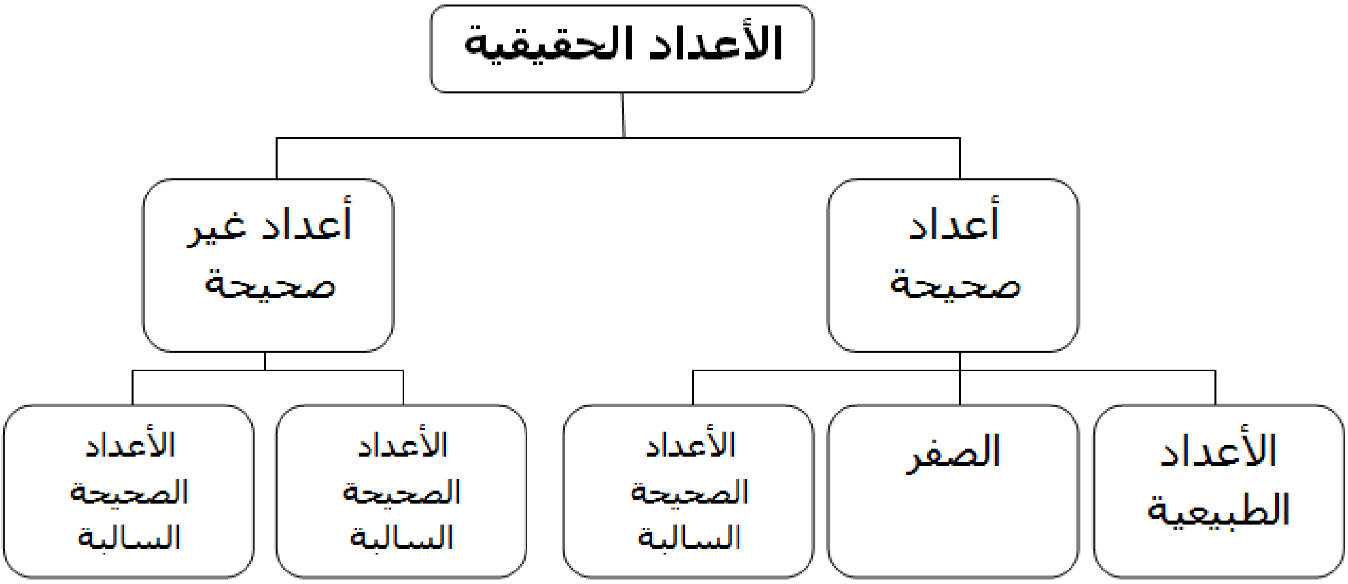
٨/ المتواليات، المحددات، المصفوفات

المحاضرة الأولى
(العملياٌت الجبريةٌ)

<u>عناصر المحاضرة:-</u>

١/ الأعداد
٢/ القيمٌة المطلقة
٣/ العمليات الجبرية
٤/ جمع المقاديرٌ الجبريةٌ
٥/ طرح المقاديرٌ الجبريةٌ

<u>١/أنواع الأعداد:-</u>



- **الأعداد الطبيعٌيةٌ**

- مثل الأعداد (١،٢،٣...) وتسمى الأعداد الصحيحٌة الموجبة
- و يمٌثل الرقم (١) وحدة قياٌس و(٢) هو تكرار وحدة القياٌس مرتينٌ وهكذا

- **الأعداد الصحيحٌة السالبةٌ**

- وهى الأعداد الطبيعٌيةٌ مسبوقة بإشارة سالب.
- وهى تعبر عن بعض الظواهر مثل عملياٌت سحب من رصيدٌك بالبنك أو السحب من المخزون أو عملياٌت الصرف.
- مثل (.... ٣- ، ٢- ، ١-)
- عند إضافة الصفر إلى الفئتينٌ السابقتينٌ تنتج الأعداد الصحيحٌة.

- **الأعداد غير الصحيحٌة**

- وهى الأعداد النسبيةٌ وهي عبارة عن النسبة بينٌ عددينٌ صحيحينٌ ويكٌون المقام لا يسٌاوي صفر.
√
- مثل .... ، <u>٣-</u> ، <u>٣</u> ، <u>٥-</u> ، <u>٢</u>
٨ ، ٩ ، ٣ ، ٧
- وأي عدد لا يمٌكن كتابته على الصورة النسبيةٌ مثل 2√ و 4√6 يسٌمى عدد غيرٌ نسبي.

٢/القيمٌة المطلقة:-

- القيمٌة المطلقة لأي عدد هي قيمٌة العدد بدون النظر إلى الإشارة التى سبقت العدد.
- هذا يعٌنى أن القيمٌة المطلقة هي عدد موجب دائما .
- و يرٌمز للقيمٌة المطلقة للعدد x ب ا χ ا

مثال:

- أوجد القيمٌة المطلقة للمقاديرٌالتاليةٌ :

١ ، -٣ ، ١١ ، ٥-

٩ ، ٤

القيمٌة المطلقة للعدد (٥) = ا-٥ا = ٥

القيمٌة المطلقة للعدد (١١) = ا١١ا = ١١

٣/العملياٌت الجبرية:-

يوٌجد فى الجبر أربع عملياٌت أساسيةٌ وهي:

- الجمع
- الطرح
- الضرب
- القسمة

٤/جمع المقادير الجبرية:-

لجمع المقاديرٌ فإننا نستخدم العلامة (+) للدلالة على عمليةٌ الجمع والتي تمثل عمليةٌ إضافة.

مثل: ٢+٥=٧

٧+٤=١١

٢ +χ٣ = χ ٥χ

يشٌترط لجمع أى مقداران جبرياٌن أن يكٌونا من نفس النوع

فمثلا : $2x+5y$

لا يمٌكن جمعهما و يظٌل المقدار كما هو.

مثال: $3a+8b+9a+2b = 12a+10b$

مثال:

أوجد ناتج حاصل جمع المقاديرٌ التاليةٌ:

$7x+5y+9xy \quad , \quad 8x+2y$

الحل:

يمكن ترتيب المقدارن السابقان كما يلي:

$$\begin{array}{r} 7x+5y+9xy \\ \underline{8x+2y\quad\;\;} \\ 15x+7y+9xy \end{array}$$

نلاحظ من المثال السابق أن كلا من x وy تختلف عن xy لذلك عند الجمع يتٌم التعامل مع كل مقدار على حدى.

٥/طرح المقادير الجبرية:-

لطرح المقاديرٌ فإننا نستخدم العلامة (-) للدلالة على عمليةٌ الطرح والتي تمثل عمليةٌ صرف أو سحب.

مثال:

إذا كان لد يكٌ ١٠ ريٌالات وتم شراء حلويٌات ب ٦ ريٌالات فإن المتبقي معك يكٌون ٤ ريٌالات.

يمٌكن التعبيرٌ عن ذلك ريٌاضياٌ كما يلٌي: ٤=٦-١٠

أي أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه إشارة سالب.

لذلك عند إجراء عمليةٌ الطرح يتٌم تغييرٌ إشارة العدد أو المقدار الجبرى المراد طرحه ثم نطبق قاعدة الجمع.

مثال:

أوجد ناتج $5x-3x$

<u>الحل:</u> $5x-3x=2x$

مثال:

أوجد ناتج $7y-12y$

<u>الحل:</u> $7y-12y=5y$

نلاحظ أن إشارة المقدار الأكبر هى سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بينٌ المقداران مع أشارة المقدار الأكبر.

مثال:

أوجد ناتج جمع المقاديرٌ التاليةٌ:

$2x+7y\ ,\ -2x-6y,\ 8x-3y$

<u>الحل:</u>

$$\begin{array}{r} 2x+7y \\ 2x-6y \\ 8x-3y \\ \hline 8x-2y \end{array}$$

نلاحظ أن عند جمع مقدارن جبريٌان متساويٌان فى القيمٌة ومختلفان فى الأشارة فإن حاصل جمعهما يسٌاوي صفر.

مثال:

اوجد حاصل جمع المقاديرٌ الجبريةٌ التاليةٌ:

$2x+4y-3z,\ \ -4x-5z+2y,\ \ 6z+7x-8y$

<u>الحل:</u>

نلاحظ أن المقاديرٌ الثالث السابقة غيرٌ مرتبة لذلك فأننا عند جمعها لابد من ترتيبٌها مع مراعاة كتابة أي مقدار بنفس الإشارة التى هو عليهٌا كما يلٌى:

$$\begin{array}{r} 2x+4y-3z \\ -4x+2y-5z \\ 7x-8y+6z \\ \hline 5x-2y-2z \end{array}$$

مثال:

اوجد ناتجٌ: $(4x+2y) - (2x+5y)$

الحل:

نلاحظ وجود أشارة سالب أمام القوس الثانى لذلك عند فك القوس لابد من تغييرٌ جميعٌ اشارات المقاديرٌ التى بداخل القوس كما يلٌى:

$$(4x+2y) - (2x+5y) = 4x+2y-2x-5y$$
$$= 2x-3y$$

مثال:

اوجد ناتجٌ:

$$(3x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 11)$$

الحل:

$$(3x^2 - 3x + 2) - (x^2 - 3x + 11)$$
$$= 3x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x - 11$$
$$= 2x^2 - 9$$

مثال:

اوجد ناتجٌ:

أطرح المقدار $7x+2y$ من $6x+5y$

الحل:

$$(6x+5y) - (7x+2y)$$
$$= 6x+5y - 7x-2y$$
$$= -x+3y$$
$$= 3y-x$$

نلاحظ أن المقدار الذى ذكر بعد حرف " من " هو الذى يكٌتب اولا .

مثال:

أطرح المقدار $7a^2 - 5ab + 8b^2$ من $3a^2 + ab - 5b^2$

الحل:

$$(3a^2 + ab - 5b^2) - (7a^2 - 5ab + 8b^2)$$
$$= 3a^2 + ab - 5b^2 - 7a^2 + 5ab - 8b^2$$
$$= -4a^2 + 6ab - 13b^2$$

- **إيجٌاد قيمٌة المقاديرٌ الجبريةٌ**

و يقٌصد به عمليةٌ التعويضٌ بقيمٌة المتغيرٌات الموجوده بالمقدار الجبرى لإيجٌادقيمٌة هذا المقدار.

مثال:

إذا كان $x=2, y=3, z=5$ أوجد قيمٌة المقدار $3x-7y+9z$

الحل:

$3x-7y+9z$

= ٣(٢)-٧(٣)+٩(٥)

=٦-٢١+٤٥

=٣٠

مثال:

أوجد قيمٌة المقدار $3a-4b+6c$

إذا كان: $a=٣$ ، $b=-٢$ ، $c=-١$

$٣a - ٤b + ٦c$

الحل:

$=٣ (٣) - ٤ (-٢) ٦ + (-١)$

$=٩+٨-٦$

$=١١$

مثال:

إذا كان: $x=-1 , y=2 , z=-3$

أوجد قيمٌة المقدار $3xz + 5xy - 2zy$

الحل: $3xz + 5xy - 2zy$

$=٣(-١)(-٣)+٥(-١)(٢) - ٢(-٣)(٢)$

$=٩-١٠+١٢$

$=١١$

تمارين:-

- **أولا - أوجد ناتج العملياٌت التاليةٌ:**

(1) $8-6+3$

(2) $-3+8-11$

(3) $5n+7n-n$

(4) $6m+3n-7m-2n$

(5) $6a^2+3ab-4b^2-8a^2-5ab-5b^2$

- **ثانيا - أوجد حاصل جمع المقاديرٌ الجبرية التاليةٌ:**

(1) $5x+2y-z$, $2x+3y-z$, $2x-5y+7z$

(2) $4m-5n+6k$, $10k-3m+4n$, $2n-2m-k$

(3) $2n+L+m$, $4n-m$, $7m-3L$

- **ثالثا - أوجد ناتج العملياٌت التاليةٌ:**

١/ أطرح $9x-2y$ من $5x-4y$

٢/ أطرح $3a-8b+c$ من $4a-6b+2c$

٣/ $(7m-2n))(3m+4n)$

٤/ $(3a-7b) - (2a+5b) + (3a+8b)$

المحاضرة الثانية
(ضرب المقادير الجبرية)

حل تمارين جمع المقادير الجبرية:-

- **اولا- أوجد ناتج العمليات التالية:**

(1) 8-6+3 = 5

(2) -3+8-11 = -6

(3) 5n+7n-n = 11n

(4) 6m+3n-7m-2n = -m+n = n-m

$$(5)\ 6a^2 + 3ab - 4b^2 - 8a^2 - 5ab - 5b^2$$
$$= -2a^2 - 2ab - 9b^2$$

- **ثانيا - أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:**

1) 5x2y-z , 2x3y-z , 2x-5y7z

=9x + 5z

2) 4m -5 n 6 k , 10 k -3m 4 n , 2n -2 m -k

=-m+n+15k

3) 2n L m , 4n -m , 7m -3 L

=7m+6n-2L

- **ثالثا - أوجد ناتج العمليات التالية:**

١) أطرح 9x-2y من 5x-4y

= (5x-4y) – (9x-2y)

= 5x – 4y – 9x + 2y = -4x – 2y

2) أطرح 3a-8b+c من 4a-6b+2c

(4a-6b+2c) – (3a-8b+c)

=4a-6b+2c-3a+8b-c = a+2b+c

٣) (7m-2n)-(3m + 4n)

= 7m – 2n – 3m – 4n = 4m – 6n

4) (3a-7b) – (2a+5b)+(3a+8b)

= 3a – 7b – 2a -5b + 3a + 8b = 4a – 4b

ضرب المقادير الجبرية:-

عملية الضرب تعرف حسابيا على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين.

فمثلا 30 = 6x5 = 6+6+6+6+6

عند ضرب المقادير الجبرية لا بد من مراعاة قاعدة الإشارات كما فى الجدول التالى:

+	=	+	×	+
−	=	−	×	+
−	=	+	×	−
+	=	−	×	−

أي أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون "–"

مثال:

3x7=21

-٢ x١١ = -22

-5x-4 =20

$7 \times 4\chi = 28\chi$

$2\chi \times -5y = -10\chi y$

نلاحظ أن χy هى نفسها $\chi \times y$ وهى أيضا $\chi . y$

مثال:

أوجد ناتج $2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y)$

<u>الحل:</u>

$$2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y)$$
$$= 8x - 6y + 21x + 27y - x + 4y$$
$$= 28x + 25y$$

مثال:

أوجد ناتج $2a(3-4b) - 4b(5-3a)$

<u>الحل:</u> $2a(3-4b) - 4b(5-3a)$

$$=6a-8ab-20b+12ab$$
$$= 6a+4ab-20b$$

- **قاعدة هامة:**

إذا اتحدت الأساسات فأنة عند الضرب تجمع الأساس

مثال : إذا كان المقدار x^5 فأن

x^5 ← أس

أساس

مثال:

أوجد ناتج $x^5 \times x^3$

<u>الحل:</u>

$$x^5 \times x^3 = x^{5+3} = x^8$$

مثال:

أوجد ناتج $y^4 \times y^{-5} \times y^3$

<u>الحل:</u>

$$y^4 \times y^{-5} \times y^3 = y^{4-5+3} = y^2$$

مثال :

أوجد ناتج $3^{-4} \times 3^{-2} \times 3^4 = 3^{-2}$

- **قاعدة هامة:**

أي مقدار أس صفر = ١

مثال :

أوجد ناتج $2^{-7}\times 2^{5}\times 2^{2}$

الحل:

$$2^{-7}\times 2^{5}\times 2^{2}=2^{0}=1$$

مثال :

أوجد ناتج 2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)

الحل:

$$\begin{aligned}&2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)\\&=10x-6x^{2}+21x-3-15x+20x^{2}\\&=14x^{2}+16x-3\end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج 5a(2a+4b)-3(2a-2b)+3b(3a-4b)

الحل:

$$\begin{aligned}&5a(2a+4b)-3(2a-2b)+\\&=10a^{2}+20ab-6a+6b+9ab-12b^{2}\\&=10a^{2}+29ab-6a+6b-12b^{2}\end{aligned}$$

مثال:

أوجد ناتج (2x-y) (3x+4y)

الحل:

$$\begin{aligned}&(2x-y)(3x+4y)\\&=6x^{2}+8xy-3xy-4y^{2}\\&=6x^{2}+5xy-4y^{2}\end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج (4a+b)(3a-2b)

الحل:

$$\begin{aligned}&(4a+b)(3a-2b)\\&=12a^{2}-8ab+3ab-2b^{2}\\&=12a^{2}-5ab-2b^{2}\end{aligned}$$

مثال :

أوجد ناتج $(4m+n)^{2}$

الحل:

$$\begin{aligned}(4m+n)^{2}&=(4m+n)(4m+n)\\&=16m^{2}+4mn+4mn+n^{2}\\&=16\mathrm{m}^{2}+8mn+n^{2}\end{aligned}$$

<u>فى التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:</u>

الحل = مربع المقدار الأول + ٢ x الأول x الثانى + مربع الثانى

مثال :

أوجد ناتج $(2x-y)^2$

الحل:

$$(2x-y)^2 = 4x^2 - 4xy + y^2$$

مثال :

أوجد ناتج $(2x-y)^2+(3x+y)(2x-y)$

الحل:

$(2x-y)^2+(3x+y)(2x-y)$

$=4x^2-4xy+y^2+6x^2-3xy+2xy-y^2$

$=10x^2-5xy$

تمارين:-

- **اولا- أوجد ناتج ما يلى:**

$4(7x+2y)$

الحل:

$3(4a-b)-2(a-5b)+4(a+b)$

$Y^4 \times y^{-2} \times y^7 + u^{-4} \times u^{-3} \times u^7$

$3^{-5} \times 3^4 \times 2^{-4} \times 2^5$

$7a(3+a)+5(2a-8)-2a(4-3a)$

- **ثانيا- اوجد ناتج:**

1- $(c+3d)(2c-d)$

2- $(2g+t)^2$

3- $(3m-2n)^2$

4- $(x+2y)^2+(2x-y)^2$

5- $(a+b)^2+(5a-2b)(3a-b)$

المحاضرة الثالثة
(حل المعادلات الخطية)

حل المعادلات الخطية:-

سنتعرض إن شاء الله إلى حل المعادلات:

١/ اولا - المعادلات الخطية فى مجهول واحد

٢/ ثانيا- المعادلات الخطية في مجهولين

- **اولا - المعادلات الخطية فى مجهول واحد:-**

مثال

حل المعادلة التالية $5x = 2x+12$

الحل:

$$5x = 2x+12$$
$$5x - 2x = 12$$
$$3x = 12$$
$$x = \frac{12}{3} = 4$$

مثال

حل المعادلة التالية $4x + 5 = x - 3$

الحل:

$$4x + 5 = x - 3$$
$$4x - x = -3 - 5$$
$$3x = -8$$
$$x = \frac{-8}{3}$$

مثال

حل المعادلة التالية

$$2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y - 11) + 12$$

الحل: يتم فك الأقواس اولا ا كما يلي

$$2(y+2)+5(3y-7) = 5(3y - 11) + 12$$
$$2y+4+15y-35 = 15y - 55 + 12$$
$$2y+15y-15y = -55 + 12 - 4 + 35$$
$$2y = -12$$
$$y = \frac{-12}{2} = -6$$

مثال

حل المعادلة التالية

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

الحل: في هذه الحاله حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن

$$\frac{3x+1}{5} = \frac{2x-1}{3}$$

$$3(3x+1) = 5\,(2x-1)$$

$$9x+3 = 10x - 5$$

$$9x-10x = -5-3$$

$$-x = -8$$

$$x = 8$$

مثال

حل المعادلة التالية

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

<u>الحل:</u> في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات اولا ا للطرف الأيمن

$$\frac{5x-1}{3} + \frac{4x-7}{2} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{2(5x-1) + (4x-7)}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{10x-2+12x-21}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$\frac{22x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{22x-23}{6} = \frac{9x-11}{7}$$

$$7(22x-23) = 6\,(9x-11)$$

$$154x-161 = 54x - 66$$

$$154x-54x = -66+161$$

$$100x = 95$$

$$x = \frac{95}{100} = 0.95$$

- **<u>ثانيا- حل المعادلات الخطية فى مجهولين:-</u>**

مثال

حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12 \quad \rightarrow (1)$$

$$7x-3y = 11 \quad \rightarrow (2)$$

<u>الحل :</u> يتم ضرب المعادلة (1)7x والمعادلة (2)5x وبطرح المعادلتين (4) من معادلة (3)

$$35x+14y = 84 \quad \rightarrow (3)$$
$$+$$
$$-35x-15y = -55 \quad \rightarrow (4)$$

$$29y = 29$$
$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة Y=1 ينتج أن

$$5x + 2y = 12$$
$$5x + 2(1) = 12$$
$$5x + 2 = 12$$
$$5x = 12 - 2$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

أى أن الحل هو x=2 و Y=1

مثال

حل المعادلات التالية :

$$5x+2y = 12 \quad \rightarrow (1)$$
$$7x-3y = 11 \quad \rightarrow (2)$$

<u>الحل :</u> يتم ضرب المعادلة (1)7x والمعادلة (2)5x وبطرح المعادلتين (4) من معادلة (3)

$$35x+14y = 84 \quad \rightarrow (3)$$
$$+$$
$$-35x-15v = -55 \quad \rightarrow (4)$$

$$29y = 29$$
$$y = \frac{29}{29} = 1$$

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة Y=-1 ينتج أن

$$3x - 5y = 8$$
$$3x - 5(-1) = 8$$
$$3x + 5 = 8$$
$$3x = 8 - 5$$
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

أى أن الحل هو x=1 و Y=-1

تمارين:-

(١) $9y - 3 = 4y + 7$

(٢) $3(x - 5) + (x + 2) = 4(x-1) + 15$

(٣) $\frac{4x - 1}{2} = \frac{x + 8}{3}$

(٤) $\frac{2x + 1}{2} + \frac{x - 1}{5} = \frac{7x-2}{4}$

(٥) $5x - y = 17$

$2x + y = 4$

(٦) $3x + 7y = 8$

$5x - 3y = 6$

المحاضرة الرابعـــة

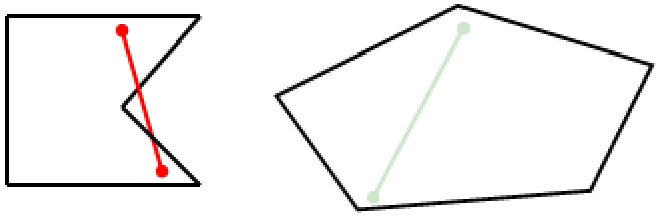
حل مسائل البرمجة الخطية:-

- طريقة الرسم البياني Graphical Method
- طريقة السمبلكس Simplex Method

➢ يعتمد على عدد المتغيرات في المسألة

خصائص معالجة مشاكل البرمجة الخطية:-

- تقع جميع الحلول الممكنة في منطقة محدبة، وتكون مجموعة نقاطها مجموعة محدبة.
- المنطقة المحدبة: هي المنطقة التي تكون فيها كل النقاط الواقعة على الخط المستقيم الموصل بين أي نقطتين تقع كذلك في المنطقة المحدبة نفسها.



- مجموعة الحلول الممكنة محدودة بعدد نهائي من الجوانب
- أي حل أمثل لا بد وأن يقع على احد أركان منطقة الحلول الممكنة (النقاط الركنية).

طريقة الرسم البياني:-

- **الخطوة الأولى ..**

تحديد منطقة الحلول المقبولة أو الممكنة

Feasible solutions

التي تتحقق عندها المتباينات او القيود

(منطقة تقاطع مناطق الحل للقيود = التي تتحقق عندها جميع قيود المســـــألة)

- **الخطوة الثانية ..**

الحصول على قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من نقاط رؤوس المضلع المحدب (النقـــاط الركنيــة) في منطقــة الحلول المقــبولة، تكون عندها دالة الهدف أكبر(أصغر) ما يمكن.

حالات خاصة في البرمجة الخطية:-

- قد يوجد تكرار (تحلل) Degenerate (في الطريقة المبسطة)
- قد يوجد حلول مثلى متعددة Optimal solutions (بمجرد النظر الى المسألة)
- قد لا يوجد لها حـل Infeasible (من الرسم البياني)
- قد يوجد لها حل غير محدود Unbounded (من الرسم البياني)

خطوات طريقة الرسم البياني:-

١- تحويل متباينات القيود الى معادلات، و عملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم.

٢- تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد

٣- رسم القيود على الشكل البياني بعد ان يتم تحديد نقاط التقاطع وتحديد منطقة الحل الممكن.

٤- تحديد الحل الأمثل (الحلول المثلى) والذي يقع على أحد نقاط زوايا المضلع (نقطة ركنية) من خلال:

أ- إيجاد قيم المتغيرات عند هذه النقاط.

ب- اختيار أكبر (أصغر) قيمة بعد التعويض بدالة الهدف

مثـــال معرض الهفوف للرفـوف:-

	الطاولات (للطاولة)	الكراسي (للكرسي)	الوقت المتاح يومياً
ربح القطعة بالريال	7	5	
النجارة	3 ساعة	4 ساعة	2400
الطلاء	2 ساعة	1 ساعة	1000

قيود أخـــرى:

- عدد الكراسي المُصنعة لا يزيد عن ٤٥٠ كرسي
- يجب تصنيع ١٠٠ طاولة على الأقل يومياً

صيـــاغة البرنامج الخطي:-

- المتغيرات:

$X1$ = عدد الكراسي المصنعة

$x2$ = عدد الطاولات المصنعة

- دالة الهدف من نوع تعظيم Maximize :

$$Max\ z= 7\ x1\ +\ 5\ x2$$

- قيد النجارة

$$3\ x1\ +\ 4\ x2\ \leq\ 2400$$

- قيد الطلاء

$$2\ x1\ +\ 1\ x2\ \leq\ 1000$$

قيـــود إضـــافية:

لا يمكن انتـاج اكثر من ٤٥٠ من الكراسي

$$x1\ \leq\ 450$$

يجب انتاج ١٠٠ طاولة بحد أدنـي

$$x2\ \geq\ 100$$

- قيد عدم السالبية:

$$x1,x2 \geq 0$$

الشكل العام للمســألة:

$$Max\ \ z= 7x1 + 5x2$$

s.t.

$$3x1 + 4x2 \leq 2400$$
$$2x1 + 1x2 \leq 1000$$
$$x1 \leq 450$$
$$x2 \geq 100$$
$$x1, x2 \geq 0$$

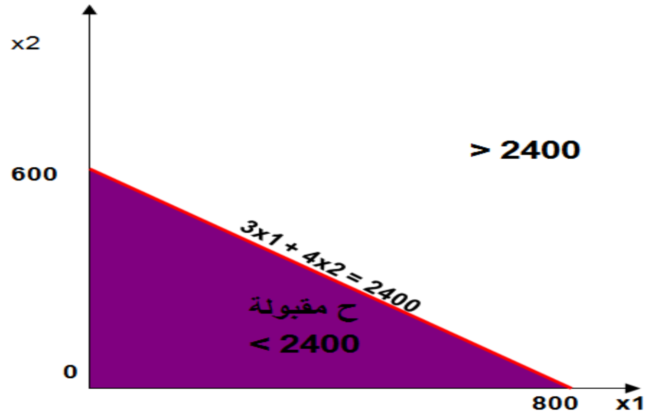
قيد النجارة:-

$$3x_1 + 4x_2 = 2400$$

التقاطع:-

$(x_1 = 0, x_2 = 600)$

$(x_1 = 800, x_2 = 0)$



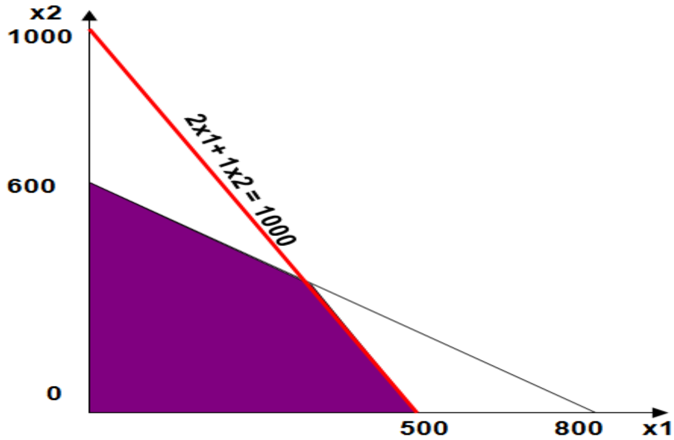
قيد الطلاء:-

$$2x_1 + 1x_2 = 1000$$

التقاطع :-

$(x_1 = 0, x_2 = 1000)$

$(x_1 = 500, x_2 = 0)$

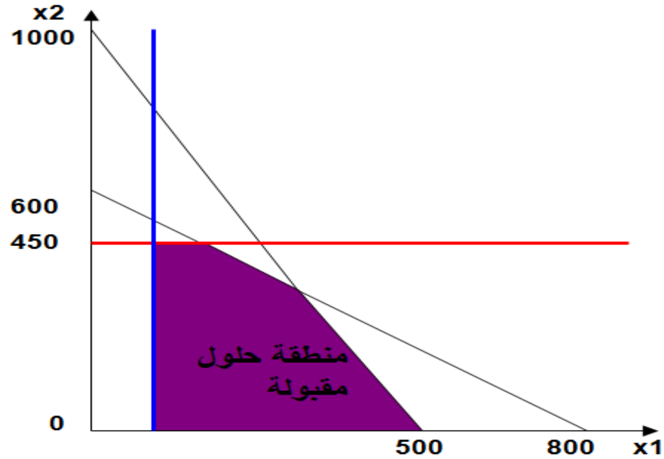


قيد الكراسي:-

$$x_1 = 450$$

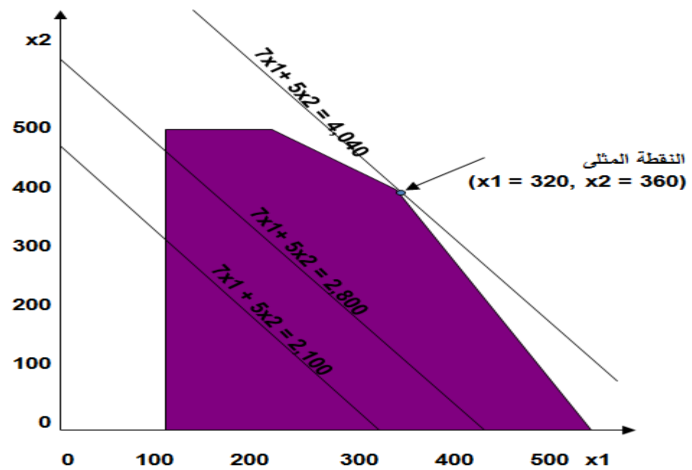
قيد الطاولات:-

$$x_1 = 100$$



خط دالة الهدف:-

الربح = $7x_1 + 5x_2$



المحاضرة الخـامســة

مثـــال ١ على الرسم البـاني:-

$$\text{MAX } Z = 45x_1 + 65x_2$$

s.t.

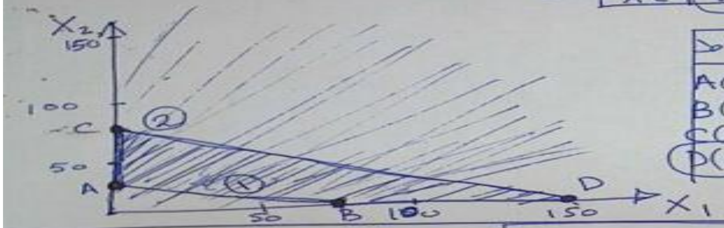
$$5x_1 + 15x_2 \geq 375$$
$$3x_1 + 6x_2 \leq 450$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$5x_1 + 15x_2 = 375$ ①

x_1	0	75
x_2	25	0

$3x_1 + 6x_2 = 450$ ②

x_1	0	150
x_2	75	0



MAX

النقاط	الدالة $Z = 45x_1 + 65x_2$
A(0,25)	$Z_A = 45(0) + 65(25) = 1625$
B(75,0)	$Z_B = 45(75) + 65(0) = 3375$
C(0,75)	$Z_C = 45(0) + 65(75) = 4875$
D(150,0)	$Z_D = 45(150) + 65(0) = \boxed{6750}$

$Z^* = 6750$

D(150,0)

$x_1 = 150$

$x_2 = 0$

مثـــال ٢ على الرسم البـاني:-

اذا اعطيت البرنامج الخطي التالي :

ايجاد الحل الأمثل

$$\text{MAX } Z = 6x_1 + 4x_2$$

s.t.

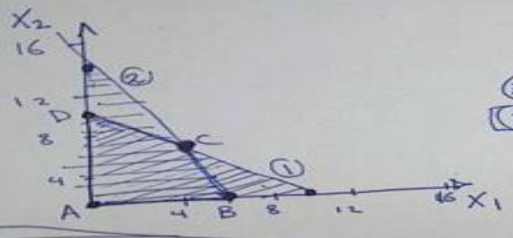
$$10x_1 + 10x_2 \leq 100$$
$$7x_1 + 3x_2 \leq 42$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$10x_1 + 10x_2 = 100 \longrightarrow$ ①

x_1	0	10
x_2	10	0

$7x_1 + 3x_2 = 42 \longrightarrow$ ②

x_1	0	6
x_2	14	0



ايجاد النقطة C ← تقاطع ① مع ②

ان اقوم بحل المعادلتين

$(\times 7)\quad 10x_1 + 10x_2 = 100$

$(\times 10)\quad 7x_1 + 3x_2 = 42$

$$70x_1 + 70x_2 = 700$$
$$-\quad 70x_1 + 30x_2 = 420$$
$$0 + 40x_2 = 280 \longrightarrow x_2 = \frac{280}{40} = 7$$

التعويض بإحدى المعادلتين لايجاد قيمة المتغير x_1

$$10x_1 + 10(7) = 100$$
$$10x_1 + 70 = 100$$
$$10x_1 = 100 - 70 \longrightarrow 10x_1 = 30$$
$$\boxed{x_1 = 3}$$

$C = (3, 7)$

MAX دالة الهدف

النقاط	$Z = 6x_1 + 4x_2$
A(0,0)	$Z_A = 6(0) + 4(0) = 0$
B(6,0)	$Z_B = 6(6) + 4(0) = 36$
C(3,7)	$Z_C = 6(3) + 4(7) = 18 + 28 = \boxed{46}$
D(0,10)	$Z_C = 6(0) + 4(10) = 40$

الحل الأمثل

$Z^* = 46$

$x_1 = 3$

$x_2 = 7$

المحاضرة السادسة

(حل المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد)

حل المعادلات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد:-

تكون صورة المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد هى

$$ax^2+bx+c=0$$

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلى

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$x^2-7x+10=0$$

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثي كما يلي

$$x^2-7x+10=0$$
$$(x-2)(x-5)=0$$
$$\begin{cases} x-2=0 \\ x-5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=5 \end{cases}$$

حل أخر باستخدام القانون

$$x^2-7x+10=0$$
$$a=1 \quad b=-7 \quad c=10$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}$$
$$x=\frac{7+3}{2}=5 \qquad x=\frac{7-3}{2}=2$$

مثال : حل المعادلة التالية

$$x^2-2x=24$$

الحل: لابد أن نجعل المعادلة تساوى صفر

$$x^2-2x-24=0$$

وبالتحليل

$$(x+4)(x-6)=0$$

$$\begin{cases} x+4=0 \rightarrow x=-4 \\ x-6=0 \rightarrow x=6 \end{cases}$$

حل أخر باستخدام القانون

$$x^2-2x-24=0$$

$$a=1 \qquad b=-2 \qquad c=-24$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$x=\frac{2+10}{2}=6 \qquad x=\frac{2-10}{2}=-4$$

مثال: حل المعادلة

$$12x^2+4x=33$$

الحل:

$$12x^2+4x-33=0$$

الحل باستخدام القانون

$$12x^2+4x-33=0$$

$$a=12 \quad b=4 \quad c=-33$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-4(12)(-33)}}{2(12)}$$

$$x=\frac{-4+40}{24}=1.5 \qquad x=\frac{-4-40}{24}=1.833$$

تمارين:-

حل المعادلات التالية:

$$1- \quad x^2-10x+24=0$$

$$2- \quad x^2+4x=32$$

$$3- \quad 2x^2-17x+8=0$$

تطبيقات تجارية واقتصادية:-

مثال:

إذا كانت دالة العرض لأحد المنتجات هى

$$p=S(x)=x^2+14$$

وكانت دالة الطلب هى

$$p=D(x)=174-6x$$

المطلوب: حدد كمية وسعر التوازن؟

الحل:

عند التوازن

دالة الطلب = دالة العرض

$$p=D(x)=S(x)$$

$$174-6x=x^2+14$$

$$x^2+6x+14-174=0$$

$$x^2+6x-160=0$$

$$(x-10)(x+16)=0$$

$x+16=0 \quad \rightarrow x=-16$ مرفوض

$x-10=0 \quad \rightarrow x=10$ كمية التوازن

تحديد سعر التوازن بالتعويض فى دالة العرض

$$p=x^2+14$$

$$p=(10)^2+14=114$$

او بالتعويض فى دالة الطلب

$$p=174-6x$$

$$p=174-6(10)=114$$

المحاضرة السابعة

(الأسس واللوغاريتمات)

<u>الأسس:-</u>

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

١/ إذا اتحدت الأساسات فأنه عند الضرب تجمع الأسس

٢/ عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس.

مثال: أختصر المقدار التالى:

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3}$$

<u>الحل:</u>

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3} = \frac{z^9 n^3}{z^2 n^5} = z^{9-2} n^{3-5} = z^7 n^{-2}$$

<u>قاعدة هامة :</u>

$$(x^n)^m = x^{n\times m}$$

مثال :

$$(2^5)^3 = 2^{3\times 5} = 2^{15}$$

مثال: اختصر

$$(x^5)^{-1} = x^{5\times -1} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

مثال: اختصر المقدار

$$\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3$$

<u>الحل:</u>

$$\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3 = \frac{2^3 a^3 b^9}{3^3 b^3 a^6} = \frac{8}{27} a^{3-6} b^{9-3}$$

$$= \frac{8}{27} a^{-3} b^6 = \frac{8b^6}{27a^3}$$

مثال: اختصر المقدار

$$\sqrt[3]{27x^9}$$

<u>**الحل:**</u>

$$\sqrt[3]{27x^9} = 27^{\frac{1}{3}} x^{\frac{9}{3}} = 3x^3$$

مثال: اختصر المقدار

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}}$$

<u>**الحل:**</u>

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}} = \sqrt{25m^2n^{-2}} = 5mn^{-1} = \frac{5m}{n}$$

<u>**تمارين:-**</u>

مثال: حل المعادلة التالية:

$$(x-1)^2 = 64$$

<u>**الحل:**</u>

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{64}$$

$$x-1=8$$

$$x=8+1=9$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}} = 2$$

<u>**الحل:**</u> بتكعيب الطرفين

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x+42}{3}}\right)^3 = (2)^3$$

$$\frac{x+42}{3} = 8$$

$$x+42=8x$$

$$42=8x-x$$

$$42=7x$$

$$x=\frac{42}{7}=6$$

تمارين:-

اختصر المقادير التالية:

$$1-\quad \left(\frac{2xy}{5xy^{2}}\right)^{2}$$

$$2-\quad \sqrt[3]{64L^{9}f^{-6}}$$

$$3-\quad \frac{25d^{7}w^{2}}{5d^{2}w}$$

$$4-\quad \sqrt[3]{\frac{128x^{5}y^{7}}{2x^{-1}y}}$$

اللوغاريتمات:-

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين

$$10^{3}=1000$$

لذلك يكون

$$\log_{\underset{\text{الأساس}}{10}} 1000 = \underset{\text{الأس}}{3}$$

وكذلك

$$32=2^{5}$$

$$\log_{2} 32 = 5$$

مثال: أوجد قيمة المجهول اذا كان

$$\log_{5} a = 3$$

الحل:

$$\log_{5} a = 3$$

$$a=5^{3}=125$$

مثال: أوجد قيمة المجهول اذا كان

$$\log_{2} x = 7$$

الحل:

$$\log_{2} x = 7$$

$$x=2^{7}=128$$

مثال: أوجد قيمة المجهول اذا كان

$$\log_x 64 = 2$$

الحل:

$$\log_x 64 = 2$$

$$64 = x^2$$

$$x = \sqrt{64} = 8$$

مثال: أوجد قيمة المجهول اذا كان

$$\log_a 256 = 4$$

الحل:

$$\log_a 256 = 4$$

$$256 = a^4$$

$$a = 256^{\frac{1}{4}} = 4$$

تمارين:-

أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

$$1- \quad \log_3 9 = t$$

$$2- \quad \log_a 81 = 2$$

$$3- \quad \log_5 125 = k$$

$$4- \quad \log_{49} x = \frac{3}{2}$$

$$5- \quad \log_{81} r = \frac{3}{4}$$

$$6- \quad \log_{121} x = \frac{1}{2}$$

$$7- \quad \log_{625} 125 = g$$

قوانين اللوغارتمات:-

(١)

$$\log x^n = n \log x$$

مثال:

$$\log 5^4 = 4 \log 5$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2$$

(٢) $$\log(x\times y)=\log x+\log y$$

مثال:

$$\log 20=\log(5\times 4)=\log 5+\log 4$$

$$\log 42=\log(6\times 7)=\log 6+\log 7$$

(٣) $$\log(\frac{x}{y})=\log x-\log y$$

مثال:

$$\log\left(\frac{35}{2}\right)=\log 35-\log 2$$
$$=\log(7\times 5)-\log 2$$
$$=\log 7+\log 5-\log 2$$

هام جدا:-

$$\log_a a=1$$

$$\log_5 5=1 \qquad \log_7 7=1 \qquad \log 10=1$$

إذا لم يكتب الأساس تحت اللوغاريتم يكون ١٠

مثال: أوجد قيمة المقدار

$$\log 2-\log 10+\log 5+2\log\sqrt{10}-\log 16+\log 4^2$$

الحل:

$$=\log 2-1+\log 5+2\log 10^{\frac{1}{2}}-\log 4^2+\log 4^2$$
$$=\log(2\times 5)-1+2\times\frac{1}{2}\log 10$$
$$=\log 10-1+\log 10$$
$$=1-1+1=1$$

تمارين:-

أوجد قيمة المقدار

$$\log_7 125+\log_7 64-3\log_7 20+\log_7 49$$

أوجد قيمة المقدار

$$\frac{1}{2}\log_5 625-\log_5 35+\log_5 14-\log_5 10$$

المحاضرة الثامنة

(التباديل والتوافيق)

<u>التباديل:-</u>

وهى تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويرمز لها بالرمز P فأذا كان لدينا n من الأشياء نريد ترتيبها r من الترتيبات فأن

عدد طرق الترتيب هى $_nP_r$

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$_nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$$

مثال: اوجد قيمة $_5P_2$

$$_5P_2 = 5\times 4 = 20$$

مثال: اوجد قيمة $_6P_3$

$$_6P_3 = 6\times 5\times 4 = 120$$

<u>لاحظ أن</u> $_nP_n = n!$

أى أن

$$_3P_3 = 3! = 3\times 2\times 1$$

كما أن

$$_5P_5 = 5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$

مثال: أختار الإجابة الصحيحة:

<u>قيمة $_6P_2$ هي:-</u>

أ 12 ب 30 ج 36 د 15

<u>الحل:-</u>

$$_6P_2 = 6\times 5 = 30$$

الإجابة هى (ب)

مثال: أختار الإجابة الصحيحة:

<u>قيمة $_6P_6$ هي</u>

أ 36 ب 6^2 ج $6!$ د 256

<u>الحل:-</u>

$$_6P_6 = 6!$$

الإجابة هى (ج)

مثال: أتفقت ٦ فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل:

عدد المباريات

عدد المباريات = $_6P_2 = 6\times 5 = 30$ مباراة

مثال: بكم طريقة يمكن جلوس ٤ اشخاص على ٥ كراسى ؟

الحل:

عدد الطرق = $_5P_4 = 5\times 4\times 3\times 2 = 120$ طريقة

التوافيق:-

وتشير إلى عدد طرق الاختيار. ويرمز لها بالرمز C

فأذا كان لدينا n من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد r فأن عدد طرق الاختيار هى ق .

حيث أن $_nC_r$

$$_nC_r = \frac{_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)_r}{r(r-1)(r-2)...3\times 2\times 1}$$

مثال: اوجد قيمة $5C2$

الحل:

$$5C2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = \frac{20}{2} = 10$$

مثال: اوجد قيمة $7C4$

الحل:

$$7C4 = \frac{7\times 6\times 5\times 4}{4\times 3\times 2\times 1} = 35$$

هام جداً:-

$$nCn = 1$$

أى أن $12C12 = 1$ $\quad 8C8 = 1$ $\quad 6C6 = 1$

$$nC0 = 1$$

أى أن $10C0 = 1$ $\quad 7C0 = 1$ $\quad 4C0 = 1$

$$nC1 = n$$

أى أن $7C1 = 7$ $\quad 11C1 = 11$ $\quad 5C1 = 5$

مثال: إدارة بها ١٢ موظف نريد أن نختار منهم ٣ لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل:

عدد طرق الاختيار

$$12C3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$$

مثال: بفرض فى المثال السابق إذا نص على أن مدير الأدارة لابد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار ؟

الحل:

عدد طرق الاختيار =

$$11C2 = \frac{11 \times 10}{2 \times 1} = 55$$

تمارين:-

ثانيا - أوجد قيمة

$$8P2 \quad 5P3 \quad 7P4 \quad 3! \quad 4P4$$
$$8C2 \quad 9P3 \quad 7C4 \quad 6C6 \quad 6C0$$
$$9C1$$

ثالثا -

١ - اتفقت ١٠ فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التى يمكن لعبها؟

٢ - إدارة بها ١٥ موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق الاختيار ؟

٣ - فى السؤال السابق إذا كان لابد من وجود مدير الإدارة ضمن أعضاء اللجنة أحسب عدد طرق الاختيار ؟

المحاضرة التاسعة
(نظرية ذات الحدين)

مثال:-

أوجد مفكوك $(x+3)^2$

الحل:

سبق وأن درسنا أنه يمكن فك هذا المقدار باستخدام قاعدة الضرب

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^3$

نلاحظ هنا أن الأس ليس ٢ وإنما هو ٣ لذلك لا تصلح القاعدة السابقة و يتم إجراء الضرب للقوس في نفسه ثلاث مرات أو نطبق القاعدة ثم نضرب الناتج في القوس نفسه مرة أخرى وفى حالة الأس أكبر من هذا يكون الأمر أطول وأصعب لذا جاءت نظرية ذات الحدين لتحل لنا هذه المشكلة كما يتضح مما يلى:

نظرية ذات الحدين:-

$$(x+a)^n = nC0a^0x^n + nC1a^1x^{n-1} + nC2a^2x^{n-2} + ... + nCna^nx^0$$

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^3$

قيمة

$$(x+3)^3 = 3C0(3)^0x^3 + 3C1(3)^1x^2 + 3C2(3)^2x^1 + 3C3(3)^3x^0$$

$$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو قيمة :-

$$H_{r+1} = ncr(socond\ term)^r(first\ term)^{n-r}$$

دائماً r أقل من رتبة الحد بمقدار واحد

مثال:

أوجد مفكوك $(x+3)^9$

الحل:

$$H_{r+1} = ncr(socand\ term)^r(first\ term)^{n-r}$$

نجد أننا نريد H_5 لذلك $r=4$ $n=9$

$$H_5 = 9c4(3)^4(x)^5 = 126\times 81x^5 = 10206x^5$$

مثال:

أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(2x-5y)^7$

$$H_{r+1} = ncr(socond\, term)^r\,(first\, term)^{n-r}$$

نجد أننا نريد H_4 لذلك $r=3$ $n=7$

$$H_4 = 7c3(-5y)^3(2x)^4 = 35\times -125y^3\times 16x^4$$
$$= -70000x^4y^3$$

الحد الأوسط:-

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجى:

الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط = $\frac{n+2}{2}$

أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هى

$\frac{n+1}{2}$ و $\frac{n+3}{2}$

مثال:

أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(x-2)^{10}$

الحل:

رتبة الحد الوسط هى $\frac{10+2}{2} = 6$

نجد أننا نريد H_6 لذلك $r=5$ $n=10$

$$H_6 = 10C5(-2)^5(x)^5 = 252\times -32\times x^5$$
$$= -8064x^5$$

تمارين:-

١- أوجد الحد السادس فى مفكوك $(x+4)^{12}$ ؟

٢ - أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(5x+y)^8$ ؟

٣ - أوجد مفكوك المقدار x^2 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^2$

$(5x-2y)^4$

المحاضرة العاشرة

(الدوال الاسية واللوغاريتمية والمثلثية)

الدالة الاسية:-

أي دالة من النوع $y = a^x$ تسمى دالة أسية .

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الأساس ، x: الأس.

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$ ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية الموجبة $(0, \infty)$

أي $f : R \rightarrow R^+$

أمثلة:

$$f(x) = 2^x\ ,\ f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x\ ,\ f(x) = e^x\ ,\ f(x) = e^{5x+2}$$

الدالة اللوغاريتمية:-

إذا كان $a > 0$ ، $a \neq 1$ فان الدالة الاسية $y = a^x$ لها معكوس يرمز لها بالرمز $x = \log_a y$ تسمى الدالة اللوغاريتمية ، حيث $\log_a y$ وتقرأ لوغاريتم y للأساس a .

حيث أن مجالها الأعداد الحقيقية الموجبة $(0, \infty)$ ، ومجالها المقابل الأعداد الحقيقية $(-\infty, \infty)$ أي $f : R^+ \rightarrow R$

- **أمثلة:**

$$f(x) = \log_2 x,\ f(x) = \log_4(2x+4)$$

اللوغاريتمات الطبيعية واللوغاريتمات الاعتيادية:-

يعتبر العددان 10، e (حيث e عدد غير نسبي يساوي تقريباً 2.71828) من أكثر الأعداد استعمالاً كأساس للوغاريتمات. واللوغاريتمات للأساس e تسمى اللوغاريتمات الطبيعية ويرمز لها $\ln x$

أمثلة:

$$f(x) = \ln x^5\ ,\ f(x) = \ln(x^2 + 2x)$$

تسمى اللوغاريتمات للأساس 10 باللوغاريتمات الاعتيادية ويرمز لها بالرمز $\log x$ بدلا عن $\log_{10} x$

أمثلة:

$$f(x) = \log x,\ f(x) = \log(x^2 - 1)\ ,\ f(x) = \log(2x - 3)$$

قوانين اللوغاريتمات:-

إذا كان كل من x ، y ، b عدداً حقيقياً موجباً ، b≠1 ، وكان n عدداً حقيقياً فان:

١- $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

٢- $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

٣- $\log_b(x^n) = n \log_b x$

٤- $\log_b\left(b^x\right)=x$

٥- $\log_b 1=0$, $\log_b b=1$

٦-

الدوال المثلثية:-

هناك دالتان أساسيتان هما:

$$(i) \quad y=\sin x$$

$$(ii) \quad y=\cos x$$

وهناك دوال تعرف بواسطة هاتين الدالتين مثل:

- **الدوال النسبية:**

إذا كان $h(x)$ ، $g(x)$ كثيري حدود فان $f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$ تسمى دالة نسبية بشرط $g(x)\neq 0$ ومجالها هو كافة الأعداد الحقيقية باستثناء أصفار المقام.

أمثلة:

١- $f(x)=\frac{x+7}{x+5}$

٢- $f(x)=\frac{1}{x^2}$

٣- $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$

- **الدوال الصريحة والدوال الضمنية:**

الدالة الصريحة:

هي الدالة التي يمكن كتابتها في الصورة $y=f(x)$ ، أي المتغير التابع y في طرف والمتغير المستقل x في الطرف الآخر.

أمثلة:

١- $y=2x+3$

٢- $y=x$

٣- $y=x^2+2x-3$

الدالة الضمنية:

هي التي يمكن كتابتها في الصورة $f(x,y)=k$، حيث k قيمة ثابتة.

أمثلة:

١- $x^2+y^2=25$

٢- $x^2+y^2+xy+2x-4y+5=0$

٣- $(x-3)^2+(y+5)^2=49$

- **الدوال الزوجية والدوال الفردية:**

الدالة الزوجية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة زوجية إذا كانت f(-x)= f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية ؟

<u>الحل:</u>

$$f(-x)=(-x)^2$$
$$=(-x)(-x)$$
$$=x^2$$
$$=f(x)$$

<u>اذاً الدالة زوجية</u>

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^2+x$ دالة زوجية ؟

<u>الحل:</u>

$$f(-x)=(-x)^2+(-x)$$
$$=(-x)(-x)+(-x)$$
$$=x^2-x$$
$$\neq f(x)$$

<u>اذاً ليست زوجية.</u>

الدالة الفردية:

تعتبر الدالة y=f(x) دالة فردية إذا كانت f(-x)= -f(x)

مثال:

هل الدالة $f(x)=x^3+x$ دالة فردية ؟

<u>الحل:</u>

$$f(-x)=(-x)^3+(-x)$$
$$=(-x)(-x)(-x)+(-x)$$
$$=-x^3-x=-(x^3+x)$$
$$=-f(x)$$

<u>اذاً الدالة فردية.</u>

تطبيقات اقتصادية:-

١- دوال الطلب الخطية:

هناك علاقة عكسية بين كمية الطلب على سلعة معينة وسعرها بمعنى أنه كلما زاد سعر السلعة كلما قل الطلب عليها. ونرمز لكمية الطلب على السلعة بالرمز Q_D بينما نرمز لسعر السلعة بالرمز P.

مثال:

إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة: $Q_D = 25 - 5P$

فأوجد

١. الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$

٢. سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$

تمارين:-

١/ هل الدالة $f(x) = 3x^2 - 4x$ دالة زوجية؟

٢/ هل الدالة $f(x) = 3x^3 - 4x$ دالة فردية ؟

٣/ هل الدالة $f(x) = 2x^2 + x$ دالة فردية ؟

٤/ هل الدالة $f(x) = x^3 - 4$ دالة زوجية ؟

٥/ هل الدالة $f(x) = x^3 - x$ زوجية أم فردية أم غير ذلك؟

٦/ إذا دالة العرض على سلعة معينة: $Q_S = 4P - 5$ فأوجد

أ) Q_D إذا كانت $P = 5$.

ب) P إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_S = 7$.

المحاضرة الحادية عشر
(الاشتقاق)

<u>الاشتقاق:-</u>

- **متوسط التغير:**

إذا كانت y=f(x) فان أي زيادة في المتغير المستقل x قدرها Δx تحدث تغير في المتغير التابع y قدره Δy . النسبة بين التغير في y إلى التغير في x تسمى متوسط التغير للدالة.

اذاً

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

لأي x_1 و x_2 في مجال الدالة

حيث

$$x_2=x_1+\Delta x$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 1إلى 1.5

<u>الحل:</u>

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=1.5$$

$$f(1)=1^2+2=1+2=3$$

$$f(1.5)=(1.5)^2+2=2.25+2=4.25$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{4.25-3}{1.5-1}=\frac{1.25}{0.5}=2.5$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=3x+2$ عندما تتغير x من 1 إلى 2

<u>الحل:</u>

$$x_1=1 \quad , \quad x_2=2$$

$$f(1)=3\times 1+2=3+2=5$$

$$f(2)=3\times 2+2=6+2=8$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{8-5}{2-1}=\frac{3}{1}=3$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x)=x^2+2$ عندما تتغير x من 2 إلى 4
الحل:

$$x_1 = 2 \quad , \quad x_2 = 4$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 = 18$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{18 - 6}{4 - 2} = \frac{12}{2} = 6$$

- **تعريف المشتقة الأولى:**

نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ (إن وجدت) تسمى المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها باحد الرموز التالية:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \quad ، \quad y' \quad ، \quad \frac{dy}{dx} \quad ، \quad f'(x)$$

<u>إذاً.....</u>

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ويسمى هذا التعريف بالتعريف العام للتفاضل(المبادئ الأولية للتفاضل)

- **جبر الاشتقاق:**

١- إذا كانت $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = x^5$

II. $y = x^{-3}$

III. $y = x^{\frac{1}{2}}$

<u>الحل:</u>

I. $\frac{dy}{dx} = 5x^4$

II. $\frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

III. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

٢- إذا كان $y = c$ حيث c كمية ثابتة فان :

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

مثال: أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 5$

II. $y = -10$

III. $y = \frac{3}{4}$

<u>الحل:</u>

I. $\frac{dy}{dx} = 0$

II. $\frac{dy}{dx} = 0$

III. $\frac{dy}{dx} = 0$

٣- إذا كانت $y = cx^n$ حيث c عدد حقيقي فان :

$$\frac{dy}{dx} = n.c\, x^{n-1}$$

مثال:أوجد المشتقة الأولى لكل من الدوال الآتية:

I. $y = 3x^4$

II. $y = -2x^7$

III. $y = 16\, x^{\frac{1}{2}}$

<u>الحل:</u>

I. $\frac{dy}{dx} = 12\, x^3$

II. $\frac{dy}{dx} = -14\, x^6$

III. $\frac{dy}{dx} = 8\, x^{-\frac{1}{2}}$

٤- إذا كانت

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

فان :

$$\frac{dy}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + (n-1)ax^{n-2} + na_n x^{n-1}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 15x^2 - 4x + 7$$

٥- إذا كانت $y = [f(x)]^n$ **فان :**

$$\frac{dy}{dx} = n[f(x)]^{n-1}.\ f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (2x^2 + 5)^8$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 8(2x^2 + 5)^7.\,4x = 32x(2x^2 + 5)^7$$

٦- إذا كانت $y = (f(x).g(x))$ **فان :**

$$\frac{dy}{dx} = f(x).g'(x) + g(x).f'(x)$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (x-1)(3x-2)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)(3) + (3x-2)(1)$$

$$= 3x - 3 + 3x - 2$$

$$= 6x - 5$$

مثال:

أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل:

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

تمارين:-

١- أوجد مشتقات الدوال التالية:

i. $y = 4x^2 - 3x^4$

ii. $y = (2x^5 - 1)(5x^3 + 7x)$

iii. $y = \sqrt{3}(x^5 - x^{-3})$

iv. $y = \frac{2x - 1}{2x + 1}$

---

v. $y = x + 1$

vi. $y = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$

vii. $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4}$

viii. $y = \dfrac{1}{2x + 3}$

ix. $y = (4x^2 + 5x - 2)^8$

٢- أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ إذا كانت :

$i.\quad y = u^2 - u \quad , \quad u = 4x + 3$

$ii.\quad y = u + \dfrac{1}{u} \quad , \quad u = 5 - 2x$

$iii.\quad y = \dfrac{1}{u + 1} \quad , \quad u = x^3 - 2x + +5$

٤- أوجد المشتقات الثلاث الأولى لكل من الدوال الآتية:

i. $y = x^3 - 4x^2 + 5x - 6$

ii. $y = 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 1$

iii. $y = \dfrac{1}{x}$

iv. $y = \dfrac{1}{3x + 1}$

المحاضرة الثانية عشر
(التكامل)

التكامل غير المحدد:-

التكامل هو عملية عكسية للاشتقاق، وتسمى عملية ايجاد y إذا علمت y' بعملية التكامل. ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل ويطلق عليه رمز التكامل. فإذا كانت f دالة للمتغير x، فتكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x)\,dx$ ، حيث الرمز $\int$ يدل على عملية التكامل غير المحدد وان dx تدل على أن هذه العملية تجرى بالنسبة للمتغير المستقل x .

قواعد التكامل:-

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \,, n \neq -1$ حيث ثابت التكامل
2. $\int k\, dx = kx + c$ حيث أي عدد حقيقي
3. $\int dx = x + c$
4. $\int [kf(x)]dx = k\int f(x)\,dx$ حيث أي عدد حقيقي
5. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
6. $\int [f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
7. $\int e^x dx = e^x + c$
8. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + c \,, x \neq 0$
9. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

أمثلة:-

1. $\int 5dx = 5x + c$
2. $\int x^4 dx = \dfrac{x^5}{5} + c$
3. $\int 3x^2 dx = \dfrac{3x^3}{3} + c = x^3 + c$
4. $\int (7x+3)dx = \dfrac{7x^2}{2} + 3x + c$

6. $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)dx = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + 4x + c$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + c$$

المحاضرة الثالثة عشر
(المتواليات)

سيتم تدريس:

١- المتواليات العددية (الحسابية)

٢- المتواليات الهندسية

اولاً- المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية.

فمثلاً $2,5,8,....$

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

$$8-5=3$$
$$5-2=3$$

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز d

الرموز المستخدمة:

a الحد الأول

d أساس المتوالية (الفرق الثابت)

L الحد الأخير

H_n الحد العام

S_n مجموع المتوالية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a + (n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١- بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n = \frac{n}{2}(a+L)$$

٢- بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$

مثال

فى المتوالية التالية $3,7,11,...$

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

بما أن $7-3=4$ $\quad 11-7=4$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=4$

٣- الحد الخامس

$$H_n = a+(n-1)d$$
$$H_5 = a+4d$$
$$H_5 = 3+4(4)=19$$

٤- الحد التاسع من المتوالية

$$H_9 = a+8d$$
$$H_9 = 3+4(8)=35$$

٥-مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\times 3+9\times 4)=5(6+36)=210$$

مثال

متوالية حدودها $70,65,60,...,25$

١- حدد نوع المتوالية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد السادس ؟

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

٥- عدد حدود المتوالية ؟

الحل:

١- بما أن $60-65=-5$ $\quad 70-65=-5$

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=-5$

٣- الحد السادس

$$H_6 = a + 5d$$
$$= 70 + 5(-5) = 45$$

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$$
$$S_{10} = \frac{10}{2}(2\times 70 + 9\times -5)$$
$$= 5(140-45) = 5\times 95 = 475$$

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التى يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

a الحد الأول

r أساس المتوالية

S_n مجموع n من الحدود

S_∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a\ r^{n-1}$$

مجموع عدد معين من الحدود

$$S_n = \frac{a\ (r^n - 1)}{r-1}$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

مثال: فى المتوالية $4,8,16,...$ أوجد الحد العاشر
ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

نجد أن $\frac{8}{4}=\frac{16}{8}=2$

أذن المتوالية هندسية وأساسها $r=2$

الحد العاشر

$$H_{10}=a\ \ r^{9}$$
$$=4(2)^{9}=2048$$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية هو

$$S_n=\frac{a\ \ (r^n-1)}{r-1}$$
$$S_{10}=\frac{4(2^{10}-1)}{2-1}=4092$$

مثال متوالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3- أوجد الحد السادس
ومجموع الثمان حدود الأولى منها؟

الحل:

$$a=5 \qquad\qquad r=-3$$

الحد السادس

$$H_6=ar^5$$
$$=5\,(-3)^5=-1215$$

مجموع الثمان حدود الأولى من المتوالية هو

$$S_n=\frac{a\ \ (r^n-1)}{r-1}$$
$$S_8=\frac{5((-3)^8-1)}{-3-1}=-8200$$

المحاضرة الرابعة عشر
(المحددات و المصفوفات)

أولاً- المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد

$$= (a_{11} \times a_{22}) - (a_{12} \times a_{21})$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد =

$$= (5 \times 8) - (3 \times 7)$$
$$= 40 - 21 = 19$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد =

$$= (-3 \times 4) - (-1 \times 6)$$
$$= -12 + 6 = -6$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -12 & 4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد

$$= (-12 \times -2) - (4 \times -3)$$
$$= 24 + 12 = 36$$

استخدام المحددات فى حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x + 2y = 19$$
$$4x - y = 10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتى كلاً من x , y يتم حساب Δ , Δ_x , Δ_y كما يلى :

Δ ويحتوى على معاملات x , y

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = (5 \times -1) - (2 \times 4)$$
$$= -5 - 8 = -13$$

Δ_x ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 19 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = (19 \times -1) - (2 \times 10)$$
$$= -19 - 20 = -39$$

Δ_y ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (19 \times 4)$$
$$= 50 - 76 = -26$$

وبالتالى يمكن الحصول على قيمة x, y كما يلي :

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-39}{-13} = 3 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-26}{-13} = 2$$

المحددات من الرتبة الثالثة

مثال أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلى: قيمة المحدد =

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 2(36 - 8) + 5(54 + 3) + 7(48 + 12)$$
$$= 2(28) + 5(57) + 7(60)$$

ثانياً- المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلى :

إذا كان

$$g=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}$$

أوجد

$1-g^{\backslash}\ ,\ h^{\backslash}$

$2\quad g+h$

$3-\ \ 2g+h$

$4-gh$

الحل: يمكن الحصول على $g^{\backslash},h^{\backslash}$ بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}$$

$$g^{\backslash}=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 7 & 6\end{bmatrix} \qquad h^{\backslash}=\begin{bmatrix}3 & 7\\ -1 & 12\end{bmatrix}$$

٢- $g+h$ يتم جمع كل رقم مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلى

$$g+h=\begin{bmatrix}5 & 7\\ -4 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 6\\ 3 & 18\end{bmatrix}$$

الحل:

٣- $2g+h$ يتم ضرب كل عنصر فى $g\times 2$ ثم جمع الناتج مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة h كما يلى

$$2g+h=\begin{bmatrix}10 & 14\\ -8 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & -1\\ 7 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13 & 13\\ -1 & 24\end{bmatrix}$$

٤- gh يتم ضرب عناصر الصفوف فى المصفوفة g x عناصر أعمدة المصفوفة h ثم جمع الناتج كما يلي

$$g=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$gh=\begin{bmatrix} 5\times3+7\times7 & 5\times-1+7\times12 \\ -4\times3+6\times7 & -4\times-1+6\times12 \end{bmatrix}$$

$$gh=\begin{bmatrix} 64 & 79 \\ 30 & 76 \end{bmatrix}$$

النقاشات

(من حلول الاخ turki1400 جزاه الله عنا ألف خير)

حل المناقشة الاولى

١- أوجد حاصل جميع المقادير التالية :-

$4x+3y-z$ ، $3y+x-z$ ، $10x+2z-3y$

الحل :-

$$\begin{array}{l} 4x+3y-z \\ x+3y-z \\ 10x-3y+2z \\ \boxed{15x+3y} \end{array}$$

٢- أوجد الناتج $(10x+4y-z)-2(4x+y+z)$

الحل :-

$= 10x+4y-z-8x-2y-2z$

$= 2x+2y-3z$

٣- أوجد قيمة المقدار $3xy+5yz-xz$ اذا كان $x=-1$ ، $y=2$ ، $z=3$

الحل :-

$3(-1)(2)+5(2)(3)-(-1)(3)$

$= -6+30+3$

$= 27$

حل المناقشة الثانية

① $2^{-2}\times 2^{2}\times 2^{1}$

$2^{-2+2+1} = 2^{1} = 2$

② $(3x+2y)^2$

$(3x+2y)(3x+2y)$

$9x^2+6yx+6yx+4y^2$

$9x^2+4y^2+12yx$

③ $(2x-y)(2x+y)$

$4x^2+2xy-2xy-y^2$

$4x^2-y^2$

(حل المناقشة الثالثة)

1)

$$10x = 2x + 40$$
$$10x - 2x = 40$$
$$8x = 40$$
$$x = \frac{40}{8} = 5$$
$$\boxed{x = 5}$$

②

$$2(x+1) + 3(2y-1) = 6(x+y) + 27$$
$$2x + 2 + 6y - 3 = 6x + 6y + 27$$
$$2x + \cancel{6y} - 6x - \cancel{6y} = 27 - 2 + 3$$
$$-4x = 28$$
$$x = \frac{28}{-4} = -7$$
$$\boxed{x = -7}$$

③

$x + y = 5$ نضرب (-3)

$3x + 2y = 12$ نضرب (1)

$$\cancel{-3x} - 3y = -15$$
$$\cancel{3x} + 2y = 12$$
$$-y = -3 \Rightarrow \boxed{y = 3}$$

نعوض في المعادلة الاولى

$$x + (3) = 5$$
$$x = 5 - 3$$
$$\boxed{x = 2}$$

حل المناقشه الرابعة

اذا كانت دالة الطلب لاحد المنتجات $P = 180 - 3x$

ودالة العرض $P = 5x + 36$

اوجد كمية وسعر التوازن ؟؟

«الحل»

$$180 - 3x = 5x + 36$$
$$-3x - 5x + 180 - 36 = 0$$
$$\therefore \quad -8x + 144 = 0$$
$$-8x = -144$$
$$x = \frac{-144}{-8} = 18$$

∴ كمية التوازن هي 18 وحدة

ولايجاد سعر التوازن نعوض في أحد المعادلتين

$$P = 180 - 3x$$
$$= 180 - 3(18)$$
$$= 180 - 54$$
$$P = 126$$

∴ سعر التوازن هو 126

حل المناقشه الخامسة

1) $(4x-2y)^2$ حلل المقدار التالي

من القانون :- **مربع الأول +2(الأول X الثاني) +مربع الثاني**

16x^2 -16xy+4y^2

2) $16x^3y-64y^3x$ ، حلل المقدار الجبري

باستخدام العامل المشترك :-

$16xy(x^2-4y^2)$

3) x^3-216 حلل المقدار الجبري

باستخدام العامل المشترك :-

$(x-6)(x+6)^2$ نفك القوس من

$(x-6)(x^2+6x+36)$ القانون في مثال (3)

حل المناقشه السادسة

1)

$6x+4y=24 \rightarrow ①$

$2x+2y=10 \rightarrow ②$

نضرب معادلة (1) في (-2) ومعادلة (2) في (6) للتخلص من x

$(-2)\quad 6x+4y=24$

$(6)\quad 2x+2y=10$

$\cancel{-12x}-8y=-48$ تصبح

$\cancel{12x}+12y=60$ بالجمع

$4y=12$

$\boxed{\therefore y=\frac{12}{4}=3}$

نعوض في معادلة (1) :-

$6x+4(3)=24$

$6x+12=24$

$6x=24-12$

$6x=12$

$\boxed{\therefore x=\frac{12}{6}=2}$

2) $x^2-6x-16=0$

① التحليل :- $(x-8)(x+2)$

$\therefore x-8=0 \Rightarrow x=8$

أو $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

② القانون :-

$a=1$ ، $b=-6$ ، $c=-16$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-6)\mp\sqrt{(-6)^2-4(1)(-16)}}{2(1)}$

$=\frac{6+10}{2}=8$

$=\frac{6-10}{2}=-2$

حل المناقشة السابعة

1) $\log_x 64 = 3$

الأس ← $x^3 = 64$ → الاساس

$\therefore \quad x = 64^{\frac{1}{3}}$

$x = \sqrt[3]{64}$

$\boxed{x = 4}$

2) $\log_{88} 88$

من القاعدة :-

$\log_n n = 1$

$\therefore \log_{88} 88 = 1$

3) $\log_{10}\left(\frac{216}{6}\right)$

من القاعدة :- $\log_{10}\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

$\therefore \log_{10}\left(\frac{216}{6}\right) = \log_{10} 216 - \log_{10} 6$

$= 1,56$

حل المناقشه الثامنة

1) عدد المباريات التي يتم لعبها في دوري المحترفين اذا علمت ان هناك 18 فريق

$18P_2 = 18 \times 17 = 306$

2) ادارة فيها 9 موظفين يراد اختيار فريق من 4 اشخاص فعدد طرق الاختيار؟؟

$9C4 = \frac{9P4}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$= 126$ طريقة

3) نفس السؤال الثاني باعتماد ان المدير يكون من ضمنهم ؟؟

$8C_3 = \frac{8P_3}{3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1}$

نقص لان المدير
يحجز مكان ضمن الفريق

$= 56$ طريقه

4) $10C0$??

من القاعدة :-

$nC0 = 1$

$\therefore 10C0 = 1$

حل المناقشة التاسعة

1) $(x+5)^6$ اوجد الحد الخامس

$n=6 \quad , r=4$

$H_5 = nCr\,(\text{الحد الثاني})^r\,(\text{الحد الاول})^{n-r}$

$= 6C4\,(5)^4 \cdot (x)^{6-4}$

$= \frac{6P4}{4!}(5)^4(x)^2$

$= \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4\cdot3\cdot2\cdot1}(5)^4(x)^2$

$= 15(625)(x)^2$

$= 9375\,x^2$

---

2) $(x-15)^{12}$ الحد الاوسط

نشوف الاس زوجي ⟸ رتبة الحد الاوسط = $\frac{n+2}{2}$

$7 = \frac{12+2}{2} =$

$n=12 \quad , r=6$

$H_7 = nCr\,(\text{الحد الثاني})^r\,(\text{الحد الاول})^{n-r}$

$= 12C6\,(-15)^6(x)^{12-6}$

$= \frac{12P6}{6!}(-15)^6(x)^6$

$= \frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}(-15)^6(x)^6$

$= (924)(-15)^6(x)^6$

$= 10524937500\,x^6$

حل المناقشة العاشرة

1) $f(x) = x^4$

$f(-x) = (-x)^4$

$= (-x)(-x)(-x)(-x)$

$f(-x) = x^4$

∴ الدالة زوجية

---

2) $f(x) = e^{10+2x}$

∴ هي دالة أسية

---

3) $\sin(x)$

∴ هي دالة مثلثية

حل المناقشة 11

(1) $f(x)=x^{-5}$ أوجد المشتقة الأولى للدالة

بتطبيق القانون

$$y=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$$

∴ الحل هو :-

$$f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$$

---

(2) $f(x)=285$ أوجد المشتقة الأولى للدالة

بتطبيق القانون

$$y=c \Rightarrow f'(x)=0$$ (بشرط c = كمية ثابتة)

∴ حلها هو :-

$$f'(x)=0$$

---

(3) $f(x)=(x-3)(2x-8)$ اوجد المشتقة الاولى للدالة

بتطبيق القانون (الأولى X مشتقة الثانية + الثانية X مشتقة الاولى)

∴ الحل هو :-

$$f'(x)=(x-3)\cdot(2)+(2x-8)\cdot(1)$$
$$=2x-6+2x-8$$
$$=4x-14$$

حل مناقشة 12

(1) $\int 6x\,dx$ اوجد تكامل الدالة

بتطبيق قوانين التكامل

نجد ان ~~$\int k\,dx = kx$~~

القانون هو $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$

فنطبق القانون ∴ الحل هو

$$\int 6x\,dx = \frac{6x^{1+1}}{1+1}+c$$
$$=\frac{6x^2}{2}+c$$

---

(2) $\int (5x^4+10)\,dx$ اوجد تكامل الدالة

نطبق هنا قانونين من قوانين التكامل

$$\int 5x^4\,dx = \frac{5x^{4+1}}{4+1}+c$$
$$\int 10\,dx = 10x+c$$

∴ الحل هو :-

$$\int(5x^4+10)\,dx = \frac{5x^{4+1}}{4+1}+10x+c$$
$$=\frac{\cancel{5}x^5}{\cancel{5}}+10x+c$$
$$=x^5+10x+c$$

حل مناقشة ١٣

① باستخدام المتوالية 2 و 8 و 32 و ...... أوجد :-

أ) نوع المتوالية ؟؟ نقول $2 \div 8 = 4$ ، $8 \div 32 = 4$ ∴ هي هندسية .

ب) اساس المتوالية ؟؟ الاساس = 4

ج) الحد الثامن من المتوالية ؟؟

الأساس = r

$$H_8 = a \cdot r^{n-1}$$
$$= (2)(4)^{8-1}$$
$$= (2)(4)^7 = 32768$$

---

② باستخدام المتوالية 3 و 9 و 15 و ... أوجد :-

أ) نوع المتوالية ؟؟ نقول $9-3 = 6$ ، $15-9 = 6$ ∴ متوالية عددية حسابية

ب) اساس المتوالية ؟؟ اساسها = 6

ج) الحد التاسع من المتوالية ؟؟

الاساس = d

$$H_9 = a+(n-1)d$$
$$= 3+(9-1)(6)$$
$$= 3+(8)(6)$$
$$= 51$$

حل مناقشة ١٤

$$B = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \qquad A = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$$

اوجد ما يلي :-

① محدد مصفوفة A ؟؟

$$A = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6(5)-(4)(-2)$$
$$= 30 + 8 = 38$$

② حاصل جمع $A + B$ ؟؟

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 6+3 & 4+(-2) \\ (-2)+5 & 5+10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 15 \end{vmatrix}$$

③ حاصل ضرب $A \times B$ ؟؟

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6(3)+4(5) & 6(-2)+4(10) \\ -2(3)+5(5) & -2(-2)+5(10) \end{vmatrix}$$

بوضعها بشكل أكبر :-

$$\begin{vmatrix} 6(3)+4(5) & 6(-2)+4(10) \\ \boxed{18+20} & \boxed{-12+40} \\ -2(3)+5(5) & -2(-2)+5(10) \\ \boxed{-6+25} & \boxed{4+50} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 38 & 28 \\ 19 & 54 \end{vmatrix}$$

الواجبات

الواجب الأول:-

السؤال 1

حاصل جمع المقادير
$3x+4y-z$, $5x-4y-z$ يســاوي:

- ○ $8x+8y-2z$
- ○ $8x$
- ○ $2x+8y-$
- ● $8x-2z$

السؤال 2

حاصل طرح المقدار
$3x+4y-z$ من $5x-4y-z$ يســاوي:

- ● $2x-8y$
- ○ $2x-2z$
- ○ $8x+2z$
- ○ $2x+8y-$

السؤال 3

أوجد قيمة المقدار
$8x-y-2z$ اذا كان $x=1, y=-1, z=0.5$:

- ○ 7
- ○ 10
- ● 8
- ○ 9

الواجب الثاني:-

السؤال 1

عند تحليل المقدار الجبري x^3-64 يكون الناتج:

- $(x-4)(x^2+4x+16)$
- $(x-4)(x^2-4x+16)$
- $(x+4)(x^2-4x-16)$
- $(x+4)(x^2+4x+16)$

السؤال 2

اذا كان $(x-2)^2=121$ فإن قيمة x تساوي:

- $x= 13$
- $x= 11$
- $x= 142$
- $x= 2$

السؤال 3

اذا كان $\log_x 1000=3$ فإن قيمة x تساوي

- 4
- 100
- 3
- 10

الواجب الثالث:-

السؤال الأول:

المشتقة الأولى للدالة $f(x) = x^{-3}$ تساوى :

(أ) x^{-3}

(ب) $4x^{-3}$

(ج) $-3x^{-4}$

(د) x^{-4}

السؤال الثاني:

تكامل الدالة $\int x^4\, dx =$

(أ) $\frac{x^5}{5}+c$

(ب) $-\frac{x^5}{5}+c$

(ج) $\frac{x^5}{5}$

(د) $x+c$

السؤال الثالث:

الحد العاشر في المتوالية 3 ,7 ,11 ,... قيمته:

(أ) ٢١

(ب) ٤٢

(ج) ٣٩

(د) ٩٢

السؤال الرابع:

محدد المصفوفة $D=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{vmatrix}$ يساوي:

(أ) ٤٨

(ب) ٢٩

(ج) ٤٣

(د) ٣٦

انتهى .. أخوكم محمد ..E7sas