فكرة الاستكمال: بفرض  هي n+1 قيم مختلفة معطاة للمتغير x و أن 

هي قيم الدالة المصاحبة. نشيد كثيرة حدود من الدرجة n ولتكن  تمر بالنقط  ، حيث I = 0,…,n . وبفرض أن  تتفق مع  مرة واحدة عند كل نقطة من الـ n + 1 نقطة :

 حيث  عبارة عن n+1 من المجاهيل ولذلك سوف نحتاج إلى n+ 1 من الشروط (constraints ) :

 لمعرفة كيفية إيجاد  سوف نجري المثال التالي :

مثال :

بفرض n=2 و  

أي سوف نشيد كثيرة حدود من الدرجة الثانية تمر بهذه النقط . سوف نكون نظام من المعادلات الخطية يحتوي على معاملات كثيرة حدود :



باستخدام الشروط :  حيث I=0,1,2 نحصل على :



هنا النظام من المعادلات يمكن كتابه على لصوره الاتيه :

=

بتعويض بقيم أعطاه الجدول من المعادلات

6

0

12

بحل هذه المعادلات باستخدام طريقه جاوس للحذف سوف نحصل على , ,:

*يقال إن تستكمل عند ب*

*و*

*لسوء الحظ إذا كانت n كبيره فان هذه الطريقة غالية جدا سوف نعرض صيغه أكثر سهوله وأقل تكلفه :*

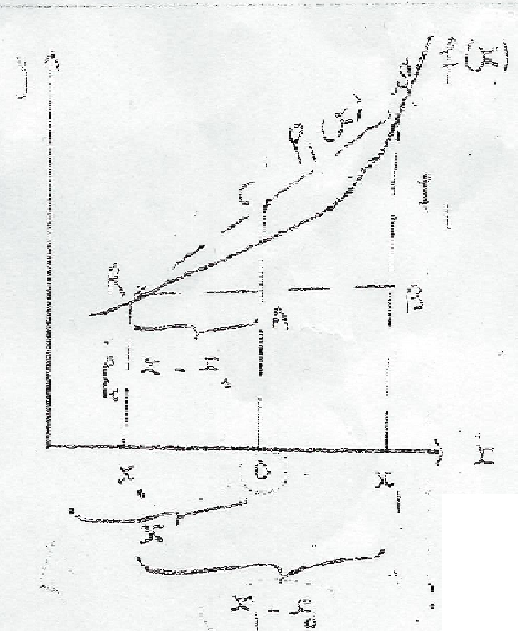
***صيغه لاجرانج للاستكمال (lagrange interpolation formula )***

*إذا كان عندنا نقطه واحده في الجدول فان كثيره الحدود التي تتفق مع الدالة عند نقطه واحدة تكون كثيرة الحدود ثابتة (أي كثيرة الحدود من الدرجة صفر )وتعطى بالعلاقة :*

*أما اذاكان عندنا نقطتين من الجدول (انظري الشكل )فانه من السهل إيجاد علاقة لكثيرة الحدود*

*بين*

النقطتين كالاتى:



تقرب الدالة f(x)بين R,Sبالوتر RS .إذن قيمة الدالة عند النقطة Dسوف تقرب بالقيمة CD..من تشابه المثلثات

RCA+RSB:

*F(x)=CD*

*أي أن*

*حيث*

*كثيرات الحدود تحقق الاتي:*

*بصورة عامة*

*وهذه تسمى صورة لاجرانيج للاستكمال و تسمى كثيرات حدود لا جرانيج وتحقق :*

من الواضح أن يجب ان تحتوي على عوامل على هيئه ( j. ئلاحظ ان هناك nمن الـ j,s التي لا تساوى k .

*(1)حيثA ثابت نعين Aبحيث أن*

*بوضع في (1) للحصول على A*

الفروق المقسومة (Divided Differences ) :

يوجد مشكلتين عند استخدام طريقة لاجرانج للاستكمال :

1. عدد العمليات الحسابية أكثر من عدد العمليات الحسابية الموجودة في طريقة الفروق المقسومة .
2. إذا أردنا إضافة أو حذف نقطة مجدولة من مجموعة النقط المعطاة والتي تستخدم في تشييد كثيرة حدود الاستكمال للدالة f(x) فإنه يجب أن نعيد جميع الحسابات . فمثلا إذا أضيفت النقطة  ، حيث إلى مجموعة النقاط  فإنه من أجل حساب  لابد من إعادة جميع الحسابات ولا يمكننا استنتاج  من  .

طريقة الفروق المقسومة تعتمد على أن الدالة معرفة عند نقط مختلفة لـ x وليس من الضروري أن تكون قيم x على مسافات متساوية ولا تكون مرتبة بترتيب معين .

في هذه الحالة بدلا من فرض . أن :



سوف نكتب كثيرة الحدود في صورة مختلفة:

صيغة نيوتن:

صغية نيوتن لكثيرة الحدود  من الدرجة n تعرف كالأتي:

المطلوب إن تستكمل  .

أي أن  تساوي f(x) عند النقط المعطاة 

I= 0, …, n

سوف نحدد قيم باستخدام الفروق المقسومة :

بفرض =

الفروق لمقسومة لf :

الفروق من الدرجة صفر :

الفروق من الدرجة الأولى :

=

وتسمى الفروق من الدرجة الأولى بين ,

لفروق من الدرجة الثانية :

=

الفروق الفردية من الدرجة n :

=

ملاحظات :

1. =

أي أن

نلاحظ أن n=1 تعطي كثيرات حدود لاجرانج المعطاة في (\*) .

بصورة عامة : صورة لاجرانج للاستكمال :

بفرض هي n+1 قيم مختلفة معطاة للمتغير x ولا يشترط وجود مسافة منتظمة بين قيم x ولا يزيد قيم x أن تكون مرتبة بنظام معين. ونفرض أن هي قيم الدالة المصاحبة. تشيد كثير حدود من الدرجة n تمر بالنقطة المعطاة :

مثال:

شيدي كثيرة حدود لانجرانج من الدرجة الثالثة والتي تمر بأول أربع نقط من الجدول التالي ثم أوجدي :

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| 22.0 | 3.2 |
| 17.8 | 2.7 |
| 14.2 | 1.0 |
| 38.3 | 4.8 |
| 51.7 | 5.6 |

الحل:

مثال:

أوجدي كثيرة حدود الاستكمال للدالة إذا كان , & وذلك باستخدام صيغة لانجرانج و من ثم أوجدي

الحل:

















b)) لإيجاد التي تمر بالخمس نقط المعطاة سوف نضيف حد واحد فقط ل:



عندما 



نلاحظ انه عند حساب  إننا استخدمنا الضرب المتداخل لكي نقلل عدد العمليات الحسابية وهده الميزة ليست موجودة عند استخدام طريقه لاجرانج للاستكمال.

نلاحظ أيضا انه قد حصلنا على نفس النتيجة التي حصلنا عليها لنفس المثال عند استخدام كثيرة حدود لاجرانج للاستكمال.

وهدا ليس غريب لأن جميع كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة والتي تمر بنفس الأربع نقاط تكون متساوية على الرغم من أنهم لهم أشكال مختلفة .نتيجة مهمة لهده الخاصية أن كثيرات حدود الاستكمال التي لها نفس الدرجة وتمر بنفس النقط يكون لهم نفس الخطأ .ادن الخطأ الذي يمكن إثباته لكثيرة الحدود التي نحصل عليها

مثال:من الجدول التالي أوجدي كثيرة الحدود لإخراجf3(x) ودلك لاستكمال الدالة f(x) ثم احسبي f(0.6). إذا علمت أن f(x)=lnx.ثم حددي الخطأ باستخدام(صيغه الخطأ).احسبي الخطأ المطلق؟

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 0.8 | 0.7 | 0.5 | 0.4 | X |
| -0.233144 | -0.356675 | -0.693147 | -0.916291 | F(x) |

الحـــل:

=+

=

=

=

=

=











في المثال السابق قدري قيمة f(0.6) باستخدام كثيرة حدود لاجرانج من الدرجة الأولى :



مثال : شيدي جدول الفروق المقسومة ثم استخدمي هذا الجدول لتشيد كثيرة حدود من الدرجة الثالثة:

F(1)= 24 , F(-1)= 0 , F(2)= 60 , F(3)= 120

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| F[xi, x+1 , x+2 , x+3 ] | F[xi, x+1 , x+2] | F(x, xi +1 ) | Fi | Xi |
|  |  | 12 | 24 | 1 |
| 1 | 8 | 20 | 0 | -1 |
|  | 10 | 60 | 60 | 2 |
|  |  |  | 120 | 3 |

F3(x)= 24+12(x-1) +8(x-1)(x+1) +1(x-1)(x+1)(x-2)

مثال: شيدي جدول الفروق المقسومة ثم استخدمي هذا الجدول لتشيد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة التي تمر بالنقطة المعطاة في الجدول التالي والتدوير إلى سبعة أرقام محسوسة :

(ب) باستخدام كثيرة الحدود لتقريب إلي F(0,6) , F(1,2) , F(2,1)

|  |  |
| --- | --- |
| F(x) | X |
| 0.099669 | 0.1 |
| 0.463648 | 0.5 |
| 0.982794 | 1.5 |
| 1.144169 | 2.2 |
| 1.190290 | 2.5 |