البندول (THE PENDULUM)

I- البندول البسيط (Simple pendulum)

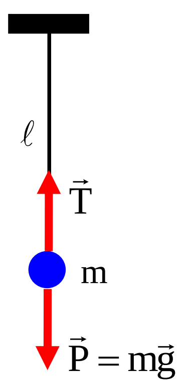
1-I تعريف البندول البسيط

البندول البسيط هو عبارة عن جسم صغير الحجم كتلته m، معلق بخيط مهمل الكتلة و عديم الفتل و الامتطاط طوله ℓ و الطرف الآخر للخيط مثبت كما يوضحه **الشكل 1**.

يتأثر البندول البسيط بقوتين : - قوة الشد $\vec{T}$

- قوة الثقل $\vec{P} = m\vec{g}$

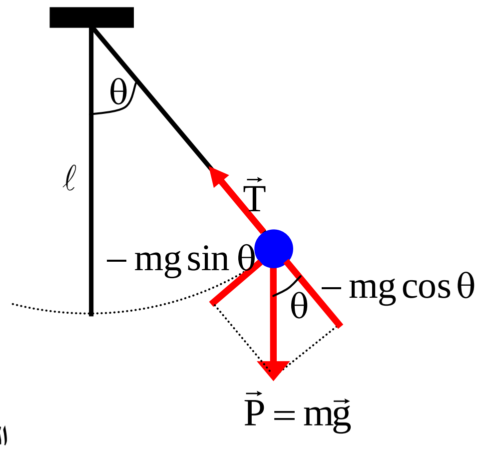
موضع الاتزان : $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$



الشكل 1

2-I معملات الحركة

لنزح الجسم عن وضع توازنه الشاقولي بزاوية θ ثم نحره (**الشكل2**).



الشكل 2

مركبات الثقل $\vec{P}$: - وفق المماس: $-mg\sin\theta$

- محمولة على الخيط: $-mg\cos\theta$

نفرض أن الاحتكاك مهمل.

تعمل المركبة المماسية للثقل $F = -mg\sin\theta$ للإعادة الجسم إلى موضع الاتزان وهي دائما عكس الإزاحة

أما المركبة محمولة على الخيط تتوازن مع قوة الشد T:

$$T + mg\cos\theta = 0$$

- العلاقة الأساسية للديناميكا :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\,a = -mg\sin\theta$$

حيث أن التسارع المماسي يرتبط بالتسارع الزاوي:

$$a = \ell\ddot{\theta} = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

نتحصل على :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta$$

إذا فرضنا أن θ صغيرة اذن $\sin\theta \approx \theta$

نتحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

حيث $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

هذه المعادلة تشبه التي وجدنها في نظام جسم-نابض: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ حيث $\omega^2 = \frac{k}{m}$

إذن حركة البندول البسيط عندما يتأجح خلال زاوية صغيرة هي حركة توافقية بسيطة و إزاحة الزاوية $\theta(t)$ تعطي بالعلاقة :

$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

او

$$\theta = \theta_{max}\sin(\omega t + \phi')$$

$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$: التردد الزاوي

θ_{max}: سعة الإزاحة الزاوية

ϕ: ثابت الطور أو الطور الزاوي

$T = \frac{2\pi}{\omega}$: الزمن الدوري

$f = \frac{1}{T}$: التردد

الزمن الدوري والتردد للبندول البسيط يعتمد فقط على طول الخيط ℓ وتسارع الجاذبية g ولا يعتمد على الكتلة m.

يمكن إيجاد السرعة الزاوية بإشتقاق الإزاحة الزاوية بالنسبة للزمن:

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = -\omega\theta_{max}\sin(\omega t+\phi) = \omega\theta_{max}\cos(\omega t+\phi+\pi/2)$$

يمكن الحصول على التسارع من خلال أخذ مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\omega^2\theta_{max}\cos(\omega t+\phi) = \omega^2\theta_{max}\cos(\omega t+\phi+\pi)$$

تتحرك النقطة المادية m على مسار دائري إذن يكون طول القوس: $s = \ell\,\theta$

يمكن الحصول على السرعة الخطية و التساع الخطي كما يلي:

- السرعة الخطية :
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(\ell\theta)}{dt} = \ell\dot{\theta}$$

- التساع الحطي :
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\ell\dot{\theta})}{dt} = \ell\ddot{\theta}$$

- إجمال الطاقات:

طاقة الحركة:
$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\ell^2\dot{\theta}^2(t)}{2}$$

طاقة الوضع طاقة الوضع هي الشغل الذي تبذله القوة المحافظة:

$$dE_p = -dW(\vec{F}) = -\vec{F}\,d\vec{r} = -mg\ell\sin\theta\,d\theta$$ حيث $(d\vec{r} = \ell\,d\theta\,\vec{u}_\tau)$

و بتكامل هذه العلاقة:
$$E_p = -mg\ell\int\sin\theta\,d\theta$$

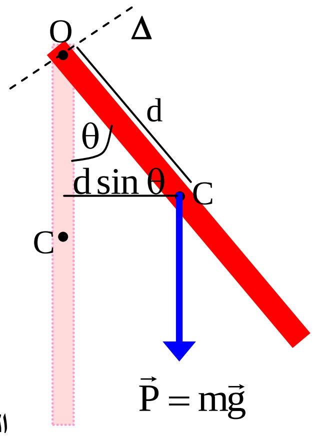
نتحصل على طاقة الوضع
$$E_p = mg\ell(1-\cos\theta)$$

حيث أن طاقة الوضع تكون صفرعندما يكون البندول في أسفل التأرجح.

II- البندول الفيزيائي

II-1 تعريف

البندول الفيزيائي هو عبارة عن جسم صلب كتلته m معلق بتماسك مع محور ساكن غير مار من مركز كتلته و يمكن أن يقوم البندول تحت تأثير بحركة اهتزازية (**الشكل**3).



الشكل 3

2-II معملات الحركة

نفرض بندول فيزيائي معلق بتماسك مع المحور Δ المار من النقطة O. عند إزاحة البندول بزاوية θ فإن قوة الجاذبية توفرعزم تدوير حول المحو (Δ)

مقدار عزم التدوير $\tau = -mgd\sin\theta$ سالب لأنه يميل إلى إنقاص θ و حيث $d = OC$ و C مركز الكتلة.

بكتابة قانون نيوتن الثاني لحركة الدوران:

$$\sum \tau = I\alpha$$

I: عزم القصور الدوران

α: التساع الزاوي

τ: مقدر عزم الدوران

التساع الزاوي:
$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

اذن:
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\sin\theta$$

نحصل على المعادلة:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{I}\sin\theta = 0$$

إذا فرضنا θ صغيرة تكتب المعادلة التفاضلية للحركة :

$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

حيث التردد الزاوي :
$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

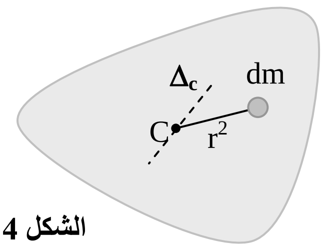
الدلة θ بالنسبة للزمن تكتب:
$$\theta = \theta_{max}\cos(\omega t + \phi)$$

نلاحظ أن هذه الاهتزازات ممكنة فقط إذا كان محور التعليق غير مار من مركز كتلة البندول الفيزيائي أي $d \neq 0$.

III- تذكيربعزم القصور

- غزم قصور جسم صلب بالنسبة لمحور دوران Δ_C مار من مركز كتلة C (**الشكل**4) هو:

$$I_{/\Delta c} = \int r^2\, dm$$



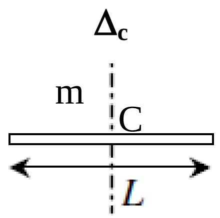
الشكل 4

- **نظرية هويغنز شتينز**: عزم قصور جسم صلب بالنسبة لمحور دوران Δ_O المار من نقطة O (نقطةالتعليق):

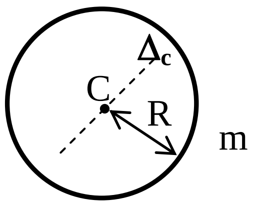
$$I_{/\Delta o} = I_{/\Delta c} + md^2$$

أمثلة: جسم صلب متجانس

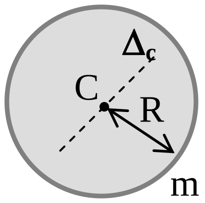
قظيب: $I_{/\Delta c} = \frac{m\ell^2}{12}$



حلقة: $I_{/\Delta c} = mR^2$

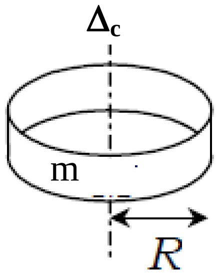


قرص: $I_{/\Delta c} = \frac{mR^2}{2}$



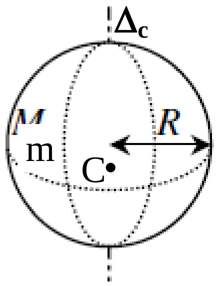
اسطوانة: **ملآنة** $I_{/\Delta c} = \frac{mR^2}{2}$

فارغة $I_{/\Delta c} = mR^2$



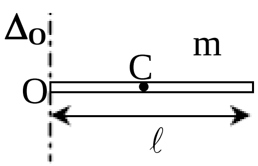
دائرة: **ملآنة** $I_{/\Delta c} = \frac{2mR^2}{5}$

فارغة $I_{/\Delta c} = \frac{2mR^2}{3}$

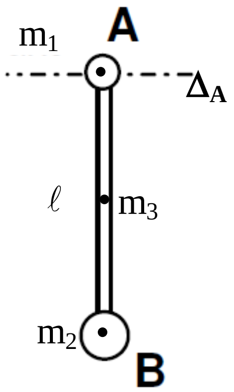


تطبيقات:

مثال1: عزم قصور قظيب كتلته m و طوله ℓ بالنسبة لمحور مار من أحد أطرافه.



$$I_{/\Delta o} = I_{/\Delta c} + md^2 = \frac{m\ell^2}{3}$$



مثال2: جسم صلب متجانس يتكون من ثلاثة أجزاء كما يوضحه الشكل التالي:

ابحث عن القصور بالنسبة لمحور دوران يمر من النقطة A إذا اعتبرنا أن R_1 ، R_2 $<<\ell$.

$$I_{/\Delta A}=I_{1/\Delta c}+I_{2/\Delta c}+I_{3/\Delta c}$$
$$=\frac{2m_1R_1^2}{5}+(\frac{2m_2R_2^2}{5}+m_2(\ell+R_2)^2)+(\frac{m_3\ell^2}{12}+m_3(\frac{\ell}{2}+R_1)^2$$
$$\approx m_2\ell^2+\frac{m_3\ell^2}{12}+m_3(\frac{\ell}{2})^2$$
$$\approx \ell^2(m_2+\frac{m_3}{3})$$

ملاحظة: نلاحظ مما سبق أن نتائج البدول البسيط هي حالة خاصة من البندول الفيزيائي. حجم البندول البسيط صغير جدا إذا نستطيع اهمال $I_{/\Delta c}$ أمام md^2 و بتعويض هذا الشرط في العلاقة $\omega=\sqrt{\frac{mgd}{I}}$ نحصل على $\omega=\sqrt{\frac{g}{d}}$.

تعتبر الحركة الاهتزازية من أهم مجالات الدراسة في الفيزياء فهي تصادف كثيرا في الطبيعة و الحياة اليومية مثل الاجسام و المنظومات الميكانيكية و الدرات الكهربائية. فقلب الإنسان ينبض باستمرار بشكل اهتزازي منتظم، الصوت ينتج اهتزاز ذرات الهواء، الذرات في الشبكة البلورية للجسم تتهتز توافقيا ومعظم الآلات والأجهزة التي نستعملها في حياتنا اليومية كنواس الساعة الجدارية مكبس داخل استوانة محرك تحوي أنظمة مهتزة من زنبركات وكتل وغيرها.