مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

الفصل الأول

نظم الأعداد

الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{1,2,3,....\}$

الأعداد الكلية $A=\mathbb{N}\bigcup\{0\}$

الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}=\{...,-2,-1,0,1,2,...\}$

الأعداد النسبية $\mathbb{R}_n=\{\frac{a}{b},a,b\in Z\ ,b\neq 0\}$

الأعداد الغير نسبية $\mathbb{Q}^*=\{x:x\notin R_n\}$

مثال : الأعداد التالية التي لا تنتمي لمجموعة الأعداد النسبية $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{7},\pi,e,...$

نلاحظ أن : $\mathbb{R}_n\bigcap\mathbb{Q}^*=\phi$

الأعداد الحقيقية هي المجموعة الناتجة من اتحاد المجموعتين النسبية والغير النسبية

$$\mathbb{R}=\mathbb{R}_n\bigcup\mathbb{Q}^*$$

تمارين

أوجد ما يلي :

$R\bigcup A=$

$N\bigcup A=$

$Z\bigcup N=$

$\{0\}\bigcup N=$

$N\bigcap A=$

$Z\bigcap N=$

$R_n\bigcap Q^*=$

$R_n\bigcap R=$

مثال : إذا كانت

$$X = \{-8, -6, -\frac{5}{2}, 0, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi\}$$

صنف العناصر ضمن مجموعات الأعداد التي درستها

تمارين : بسط كل مما يلي حسب أولويات العمليات الحسابية :

$$1)\ 9 \div 3 + 4 \times 2 =$$

$$2)\ 8 - 7 \times 2 + 3 =$$

$$3)\ \frac{-8 - 4 \times -6 \div 12}{4 - 3 \times 2} =$$

$$4)\ \frac{15 \div 5 \times 4 \div 6 - 8}{-6 + 5 - 8 \div 8} =$$

خصائص بعض العمليات الجبرية

$$*\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$*\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

$$*\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$*\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$$

تمارين

أوجد مايلي :

1) $\frac{2}{3}+\frac{5}{2}=$

2) $\frac{5}{3}-\frac{3}{4}=$

3) $\frac{4}{7}\times\frac{5}{2}=$

4) $\frac{4}{3}\div\frac{1}{2}=$

القيمة المطلقة

تعريف :

$$|x| = \begin{cases} x \ , x \geq 0 \\ -x \ , x < 0 \end{cases}$$

أمثلة : أحسب مايلي

$1)\ |3| =$

$2)\ |-6| =$

$3)\ |5-\sqrt{3}| =$

$4)\ |\sqrt{5}-2| =$

$5)\ |\pi-4| =$

العمليات الجبرية

هناك أربع عمليات أساسية هي الجمع والطرح والضرب والقسمة

- عملية الجمع

أوجد نواتج عمليات الجمع التالية :

$1)3x + 5x =$

$2)4a + 2a - 3 =$

$3)2x + 5a + 3x + 5 =$

- عملية الطرح

أوجد نواتج عمليات الطرح التالية :

$1)5x + 2y - 2x + 6y - 3y =$

$2)(2a + 5b) - (4a - 3a) =$

$3)(5x^2 + 3x - 2) - (x^2 + 2x + 6) =$

أوجد ناتج ما يلي :

$1)(3x^4 - 2x^3 - 4x^2) + (x^3 - 2x^2 - 5x) - (x^2 + 7x - 2) =$

$2)(5a^2 - 3a + 4) - (a^2 - 8) =$

إيجاد قيمة المقادير الجبرية

لإيجاد قيمة المقادير الجبرية نعوض بقيمة المتغير في العبارة الجبرية ونوجد الناتج كالتالي :

مثال : أوجد قيمة المقادير التالية :

$1)\ 2a+3b-c=$

$a=3, b=1, c=2$

$2)\ 3x^2+2y-4z=$

$x=2, y=3, z=1$

$3)\ \dfrac{2a^2+5b-3c}{a+3b+4c^3}=$

$a=2, b=1, c=2$

$4)\ \left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{a}\right)\left(b^2-c^2\right)=$

$a=3, b=1, c=2$

- ضرب المقادير الجبرية

نعلم بأن عملية الضرب هي تكرار لعملية الجمع
فمثلا $5\times3=15$ تعني أن $5+5+5=15$ تم جمع العدد 5 ثلاث مرات أو $3+3+3+3+3=15$ وتعني جمع العدد3 خمس مرات .

مثال أوجد ناتج ما يلي :

$1)3(5x+2y)=$

$2)(5a+1)(b+2)=$

$3)(x+2)(x+1)=$

$4)(x^2+y)(x+y^2)=$

$5)(a+b)(a-b)=$

$6)(x+y)^2=$

$7)(2x+3)^2(x+1)=$

$8)3x-\{5-3(x-2)\}=$

$9)2\{3-(x-4)\}=$

- ضرب بعض المقادير الخاصة

$$1)(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

$$2)(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$3)(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

مثال : بالاعتماد على المقادير الخاصة السابقة أوجد مايلي

$$1)(3-x)(3+x)=$$

$$2)(2a-5)(2a+5)=$$

$$3)(4+3b)^2=$$

$$4)(6-2x)^2=$$

- <u>قسمة المقادير الجبرية</u>

بسط المقدار التالي :

$$1)\frac{x^{5}}{x^{2}}+\frac{y^{4}}{y^{3}}=$$

ملاحظة مهمة في عملية القسمة يجب أن يكون المقام لا يساوي الصفر

$$2)\frac{8x^{4}y^{3}}{2xy^{2}}=$$

$$3)\frac{25m^{4}n^{3}}{15m^{2}n^{5}}=$$

مثال بسط المقدار التالي :

$$\frac{12x^{5}y^{6}}{3x^{3}y^{2}}\div\frac{25x^{4}yz^{3}}{2y^{4}z^{2}}=$$

تحليل بعض المقادير الجبرية الخاصة

- التحليل بإيجاد العامل المشترك

حلل المقادير التالية :

$1)\ 2x^3 + yx =$

$2)\ 4x^2y + 2xy^2 =$

$3)\ 2x(3x-2) - 7(3x-2) =$

$4)\ 3a(2a+5) + 2(2a+5) =$

$5)\ 3x^3y - 6x^2y^2 - 3xy^3 =$

مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

- **التحليل بالتجميع المناسب**

حلل المقادير التالية :

$1)\, 3x^2 - 6x + 4x - 8 =$

$2)\, wy + wz - 2xy - 2xz =$

$3)\, 2x^2 + 6x + 5x + 15 =$

$4)\, 2pr + ps - 6qr - 3qs =$

$5)\, 6wy - xz - 2xy + 3wz =$

- <u>تحليل المقدار الثلاثي</u>

حيث توجد عدة طرائق لتحليل المقدار الثلاثي وسنتطرق لها بشكل مفصل لاحقا

مثال : حلل المقادير التالية :

$$1)\, x^2 + 5x + 6 =$$

$$2)\, x^2 - 2x - 3 =$$

$$3)\, y^2 + 3y - 10 =$$

تحليل بعض المقادير الجبرية الخاصة

أولا : المربع التام وله صيغتان كالتالي :

$$1)\, u^2 + 2uv + v^2 = (u+v)^2$$

$$2)\, u^2 - 2uv + v^2 = (u-v)^2$$

ثانيا : الفرق بين مربعين

$$3)\, u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$$

ثالثاً : الفرق بين مكعبين

$$4)\, u^3 - v^3 = (u-v)(u^2 + uv + v^2)$$

رابعاً : جمع مكعبين

$$4)\, u^3 + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2)$$

مثال : حلل المقادير التالية بالاعتماد على ما سبق

$1)9x^2 - 4y^2 =$

$2)25a^6 - b^8 =$

$3)8m^3 - 1 =$

$4)x^3 + y^3z^3 =$

$5)m^3 + n^3 =$

$6)z^3 - 1 =$

$7)x^2 - 16y^2 =$

الفصل الثاني

المضاعف المشترك البسيط ، جمع الكسور وطرحها ، ضرب الكسور وقسمتها

سبق وتم التطرق لهذه المواضيع في الفصل الأول وسنكتفي بتطبيق ذلك على العبارات الجبرية

مثال :

أوجد المضاعف المشترك البسيط لما يلي :

$$1)\ 2x^3y\ ,\ 6xy^2$$

$$2)\ a^2b\ ,\ 3a$$

$$3)\ (x+1),\ 2x$$

مثال :

أوجد ناتج جمع ما يلي

$$1)\ \frac{5}{x}+\frac{2}{3}=$$

$$2)\ \frac{2}{xy}+\frac{y}{x^2}=$$

مثال : أوجد ناتج عملية الطرح :

$$1)\ \frac{3x}{2y}-\frac{5}{y}=$$

$$2)\ \frac{2+x}{x}-\frac{y}{x+1}=$$

مثال : ضع المقادير التالية في أبسط صورة

$$1)\ \frac{\frac{2}{x}-1}{\frac{4}{x^{2}}-1}=$$

$$2)\ \frac{1}{n}-\frac{1}{m}=$$

$$3)\ \frac{m}{n}+\frac{n}{m}=$$

$$4)\ \frac{x^2-9}{x^2-1} \div \frac{x-3}{x-1} =$$

$$5)\ \frac{1+\frac{1}{x}}{x-\frac{1}{x}} =$$

$$6)\ \frac{\frac{x^2}{y^2}-1}{\frac{x}{y}+1} =$$

الفصل الثالث

الأسس

إذا كان n عدد صحيح موجب فإن :

1) n من المرات $a^n = a.a.a...$

مثال : $3^5 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 243$

2) إذا كان n=0 فإن :

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

3) إذا كانت n عدد صحيح سالب فإن :

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}, a \neq 0$$

مثال : $8^{-3} = \frac{1}{8^{-(-3)}} = \frac{1}{8^3}$

البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

تمارين : بسط ما يلي :

$$1)(x^{3}y^{2})^{0} =$$

$$2)10^{-3} =$$

$$3)\frac{x^{-3}}{y^{-5}} =$$

$$4)\frac{u^{-7}}{v^{-2}} =$$

$$5)\frac{1}{x^{-5}} =$$

خواص الأسس الصحيحة

إذا كان m,n عددان صحيحان و a,b عددان حقيقيان فإن :

$$1)a^{m}\cdot a^{n} = a^{m+n}$$

$$2)(a^{n})^{m} = a^{n\cdot m}$$

$$3)(ab)^{m} = a^{m}\cdot b^{m}$$

$$4)\left(\frac{a}{b}\right)^{m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}, b \neq 0$$

$$5)\frac{a^{m}}{a^{n}} = \begin{Bmatrix} a^{m-n} \\ a^{n-m} \end{Bmatrix}, a \neq 0$$

تمارين

بسط ما يلي باستخدام الخواص السابقة :

$$1)\ 3x^{5}(2x^{2}) =$$

$$2)\ \frac{6x^{-3}}{8x^{-4}} =$$

$$3)\ (2a^{-3}b^{2})^{-2} =$$

$$4)\ \left(\frac{a^{3}}{b^{5}}\right)^{-2} =$$

$$5)\ \frac{4x^{-3}y^{-5}}{6x^{-4}y^{3}} =$$

$$6)\ \left(\frac{m^{-3}n^{3}}{n^{-2}}\right)^{-2} =$$

$$7)\ \left(\frac{x^{-3}}{y^{4}z^{-2}}\right)^{-3} =$$

الأسس الكسرية

إذا كان m, n عددان طبيعيان والعدد b أي عدد حقيقي ما عدا b لا تكون سالبة عندما n زوجية فإن :

$$1) b^{\frac{m}{n}} = (b^{\frac{1}{n}})^m$$

$$2) b^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}}$$

مثال :

$$4^{\frac{3}{2}} = (4^{\frac{1}{2}})^3 = 2^3 = 8$$

تمارين : أوجد ما يلي :

$1)4^{\frac{1}{2}} =$

$2)8^{\frac{1}{3}} =$

$3)8^{\frac{2}{3}} =$

$4)(3x^{\frac{1}{3}})(2x^{\frac{1}{2}}) =$

$5)(\frac{4x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}})^{\frac{1}{2}} =$

$6)(5y^{\frac{3}{4}})(2y^{\frac{1}{3}}) =$

أيضا يمكننا استخدام الجذور لتبسيط الأسس كما يلي :

$$b^{\frac{m}{n}} = \begin{Bmatrix} (b^{m})^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b^{m}} \\ (b^{\frac{1}{n}})^{m} = (\sqrt[n]{b})^{m} \end{Bmatrix}$$

مثال :

<u>تمارين :</u>

$$1)16^{\frac{3}{2}} = \sqrt{16^{3}}$$

$$2)x^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{x}$$

بسط مايلي :

$$3)y^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{y^{2}}}$$

$$1)\sqrt{12x^{3}y^{5}z^{2}} =$$

$$2)5\sqrt{3}+4\sqrt{3} =$$

$$3)(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) =$$

تمارين :

أنطق مقامات الكسور التالية (ضع في أبسط صورة)

$$1)\frac{3}{\sqrt{5}} =$$

$$2)\frac{2}{5+\sqrt{3}} =$$

$$3)\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{5}} =$$

اللوغاريتمات

تعريف اللوغاريتم :

إذا كان $a \neq 1$ و $a,b \in R^+$ فإن :

$$\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$$

- الرمز $\log_a b$ يقرأ لوغاريتم b للأساس a
- الأساس $a > 0, a \neq 1$ والعدد $b > 0$ لذلك يوجد عدد وحيد c بحيث أن : $b = a^c$ وهذا يعني أن : $\log_a b$ لها قيمة وحيدة (واحد لواحد)
- يمكننا أن نقول أن لوغاريتم العدد الموجب b للأساس a هو الأس الذي يجب أن نرفع إليه الأساس a لنحصل على العدد b
- $\log_a b = c \Leftrightarrow b = a^c$ وبالتعويض عن قيمة c نجد أن : $b = a^c = a^{\log_a b}$
- $\log_a 1 = 0 \Leftrightarrow a^0 = 1$
- $a^1 = a \Leftrightarrow \log_a a = 1$

أمثلة

1) أكتب الصيغة اللوغاريتمية المقابلة للصيغة الأسية فيما يلي :

$A)3^4 = 81$

$B)2^{-5} = \dfrac{1}{32}$

$C)0.001 = 10^{-3}$

2) أكتب الصيغة الأسية المقابلة للصيغة اللوغاريتمية فيما يلي :

$$A)\log_{10} 1000 = 3$$

$$B)\log_{2} 64 = 6$$

$$C)\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

3) أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

$$A)\log_{4} x = 3$$

$$B)\log_{3} x = 2$$

$$C)\log_{x} 81 = 4$$

تمارين

حل المعادلات التالية :

$$A)\log_5 125 = x$$

$$B)\log_{10}(x^2+1) = 1$$

$$C)\log_x 27 = 3$$

قوانين اللوغاريتمات

إذا كان $x \in R^+$ و $a \in R^+ - \{1\}$ فإن :

$$1)\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$2)\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3)\log_a x^n = n \log_a x$$

مثال : إذا كانت $\log_3 5 = 1.46$ و $\log_3 2 = 0.63$ فأوجد مايلي :

1) $\log_3 10 =$

2) $\log_3 15 =$

3) $\log_3 16 =$

4) $\log_3 2.5 =$

5) $\log_3 0.4 =$

6) $\log_3 \sqrt[3]{4} =$

تمرين

حل المعادلة التالية :

$\log_4 x + \log_4 (x - y) = 2$

الفصل الرابع

التباديل(permutations)

التبديل : هو تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيها مهما .

مثال : لدينا 4 كليات في الجامعة أحد الترتيبات لهذه الكليات هو الهندسة ،العلوم، التربية ،الطب

وباستعمال مبدأ العد الأساسي يوجد 24 ترتيبا مختلفا ناتجة كالتالي 4.3.2.1=24 ويمكننا كتابة العبارة 4.3.2.1 لحساب عدد التباديل على الصورة !4 وتقرأ مضروب 4

4!=4.3.2.1=24

5!=5.4.3.2.1=120

المضروب : يكتب مضروب العدد الصحيح الموجب n على الصورة !n ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من أو تساوي n

ويعرف 0!=1

n!=n(n-1).(n-2).....2.1

التباديل : يرمز الى عدد تباديل n من العناصر المختلفه مأخوذه r في كل مرة بالرمز $_{n}p_{r}$ حيث :

$$_{n}p_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : عدد تباديل 6 مأخوذا 4 في كل مرة يساوي

$$_{6}p_{4}=\frac{6!}{(6-4)!}=\frac{6!}{2!}=6.5.4.3=360$$

تمرين : أحسب عدد تباديل 5 مأخوذة 3 في كل مرة

ملاحظة : عند كتابة التباديل على الصورة ${}_n p_r$

تدل r على عدد العوامل المتتالية المضروبة في بعضها

وتدل n على العامل الأول فمثلا الرمز ${}_5 p_3$ يدل على أخذ 3 عوامل متتالية فنبدأ بالعدد 5 وهي :

5.4.3=60 وهو الناتج نفسه من تطبيق قانون التباديل وللاختصار نكتب

$p(n,r)$ بدلا عن ${}_n p_r$

مثال : أوجد قيمة ${}_5 p_2$

الحل : **طريقة (1)**

$$ {}_5 p_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20 $$

طريقة (2)

$$ {}_5 p_2 = 5.4 = 20 $$

ملاحظات :

$$ {}_n p_n = n! $$

$$ {}_n p_n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! $$

مثال : ${}_5 p_5 = 5! = 5.4.3.2.1 = 120$

تمرين : بكم طريقة يمكن اختيار 3 كتب من مجموعة مكونة من 10 كتب ؟

التوافيق(Combinations)

التوافيق هي تنظيم العناصر حيث يكون الترتيب فيها غير مهم

بفرض أنك تريد اختيار 3موظفين من بين 7 موظفين في إحدى الإدارات لحضور اجتماع فإن الترتيب في اختيارهم غير مهم

وعليه فيمكنك استخدام التوافيق

الرمز ${}_nC_r$ يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$ ويمكن أن تكتب على الصورة $$\binom{n}{r}$$

مثال : عدد توافيق 6 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة

$${}_6C_2 = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6!}{48} = 15$$

مثال : يريد مدير شركة اختيار 5 محاسبين من بين 8 محاسبين لعمل حسابات معينة للشركة ، بكم طريقة يمكن للمدير اختيار المحاسبين محمد، أحمد، خالد ، فهد ، سعد ؟

الحل : الترتيب غير مهم فالناتج يساوي توافيق 8 مأخوذة 5 في كل مرة أي أن

$${}_8C_5 = \frac{8!}{(8-5)!5!} = \frac{8!}{3!5!} = 8 \cdot 7 = 56$$

ملاحظات : $${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

مثال : أوجد ${}_6C_4$

الحل : $${}_6C_4 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 5 = 15$$

تمرين : أوجد ${}_5c_2$

ملاحظات :

$$
\begin{aligned}
{}_nc_n &= 1\\
{}_nc_0 &= 1\\
{}_nc_1 &= n
\end{aligned}
$$

مثال :

$$
\begin{aligned}
{}_3c_3 &= 1\\
{}_5c_0 &= 1\\
{}_7c_1 &= 7
\end{aligned}
$$

مثال : يتكون مجلس إدارة شركة كبرى من 8 أعضاء فإذا كان عبدالله ، حسان ، محمد هم أعضاء في مجلس الإدارة فبكم طريقة يمكن أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسا ، نائبا للرئيس ، وأمينا للسر على الترتيب مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيا .

الحل : بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء المجلس فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدا ممكن تطبيق التباديل

$$ {}_8p_3 = 8\cdot 7\cdot 6 = 336 $$

ملاحظة : لو كان الترتيب غير مهم ممكن نطبق التوافيق كما يلي :

$$ {}_8c_3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = 8\cdot 7 = 56 $$

أيضا بالطريقة الأخرى

$$ {}_8c_3 = \frac{{}_8p_3}{3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56 $$

الفصل الخامس

المعادلات الخطية

تعريف : المعادلة التي تكتب على الصورة : $ax+b=0$ ، $a \neq 0$ ، $a,b \in R$ ، x تسمى متغير

تسمى هذه المعادلة بالمعادلة الخطية لأنها تمثل خط مستقيم في المستوى الإحداثي

نظرية : خصائص التساوي

لكل $a,b,c \in R$

1) اذا كان $a=b$ فإن $a+b=b+c$ خاصية الإضافة

2) اذا كان $a=b$ فإن $a-c=b-c$ خاصية الطرح

3) اذا كان $a=b$ و $c \neq 0$ فإن $ca=cb$ خاصية الضرب

4) اذا كان $a=b$ و $c \neq 0$ فإن $\frac{a}{c}=\frac{b}{c}$

$\log 8$

مثال : حل المعادلات الخطية التالية

1) $5x-4=2x+8$

2) $7x-10=4x+5$

مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

مثال : حل المعادلات الخطية الكسرية التالية :

(1 $\frac{x+1}{3}-\frac{x}{4}=\frac{1}{2}$

(2 $5-\frac{3a-4}{5}=\frac{7-2a}{2}$

مثال : حل المعادلات التالية :

(1 $4(x+3)=6(x-2)$

(2 $4-3(x+2)+x=5(x-1)-7x$

حل المعادلات الخطية ذات المجهولين :

أولا : طريقة الحل بالتعويض

1) حل النظام التالي باستخدام طريق التعويض $\begin{Bmatrix} 3x + y = 10 \\ x - 2y = 1 \end{Bmatrix}$

2) $\begin{Bmatrix} x + 3y = 2 \\ 2x + y = 4 \end{Bmatrix}$

3) $\begin{Bmatrix} x + y = 1 \\ 2x + 3y = -3 \end{Bmatrix}$

ثانيا : طريقة الحل بالحذف

مثال : حل أنظمة المعادلات الخطية التالية :

1) $\begin{Bmatrix} 2x+3y=6 \\ 3x-3y=4 \end{Bmatrix}$

2) $\begin{Bmatrix} x+5y=-1 \\ -x+2y=8 \end{Bmatrix}$

(3 $\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$

(4 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 4y = -3 \end{cases}$

حل معادلات الدرجة الثانية بمجهول واحد

تعريف : المعادلة التربيعية في مجهول واحد هي على الصورة التالية :

$ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$ و a,b,c و x هو المتغير

ويمكن حل هذه المعادلات بعدة طرائق مختلفة منها

أولا : طريقة الحل بالتحليل

ويمكن أن تكتب المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ كحاصل ضرب عاملين من الدرجة الأولى وذلك باستخدام التحليل

مثال : حل المعادلات التالية باستخدام التحليل :

1) $x^2 + 5x + 6 = 0$

2) $x^2 - 3x - 4 = 0$

3) $2x^2 = 5x$

4) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

5) $4x^2 = 3x$

6) $x^2 - 6x + 5 = -4$

ثانيا : حل المعادلات التربيعية باستخدام خاصية إكمال المربع

إذا كان لدينا $x^2 + bx$ فيمكننا إضافة مربع نصف معامل x : $(\frac{b}{2})^2$

ليصبح لدينا مربع كامل $x^2 + bx + (\frac{b}{2})^2 = (x + \frac{b}{2})^2$

مثال : أكمل العبارات التالية لتصبح مربعا كاملا

1) $x^2 - 3x$

2) x^2+5x

مثال : حل المعادلات التربيعية التالية باستخدام خاصية إكمال المربع

1) $x^2+6x-2=0$

2) $2x^2-4x+3=0$

3) $x^2+3x-2=0$

4) $3x^2 - 12x + 3 = 0$

ثالثا : حل معادلات الدرجة الثانية باستخدام القانون العام

إذا كان لدين المعادلة التالية : $ax^2 + bx + c = 0$ فإن :

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ يسمى القانون العام لحل المعادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

ملاحظة : $b^2 - 4ac$ يسمى المميز وهناك عدة حالات للحل حسب المميز نوضحها كما يلي :

1) إذا كان المميز $b^2 - 4ac$ موجب فإنه يوجد حلان حقيقيان

2) إذا كان المميز $b^2 - 4ac$ يساوي الصفر فإنه يوجد حل واحد حقيقي مكرر

3) إذا كان المميز $b^2 - 4ac$ سالب فإنه يوجد حلان تخيليان (جذران مترافقان)

مثال : أوجد نوع الحلول للمعادلات التالية باستخدام المميز

1) $2x^2 - 4x + 1 = 0$

2) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

3) $2x^2 - 4x + 3 = 0$

تمارين : حل المعادلات التالية باستخدام القانون العام

1) $2x^2 - 6x + 5 = 0$

2) $x^2 + 3x + 2 = 0$

3) $x^2 + 3x + 6 = 0$

4) $x^2 + 3x = 0$

5) $x^2 - 4 = 0$

الفصل السادس

المتتابعات الحسابية والهندسية

المتتابعة الحسابية : هي مجموعة من الأعداد مرتبة في نمط محدد أو ترتيب معين ويسمى كل عدد في المتتابعة حدا

ويمكن أن تكون المتتابعة منتهية أي لها عدد من الحدود مثل :

-5,0,5,10,15,20

أو غير منتهية حيث تستمر إلى مالانهاية مثل :

0,2,4.6,8,........

ويرمز للحد الأول a_1 والحد الثاني a_2

مثال : 2,5,8,11,14 متتابعة منتهية

.... ,2,5,8,11,14.17 متتابعة غير منتهية

- يحدد كل حد في المتتابعة الحسابية بإضافة قيمة ثابتة إلى الحد الذي يسبقه ، وتسمى هذه القيمة بأساس المتتابعة
  فالمتتابعة الحسابية 2,5,8,11,14 يوجد فرقا ثابتا بين الحدود وهو أساس المتتابعة مقداره 3 , 5-2=3
  مثال: في المتتابعة الحسابية ....,-8,-6,-4 أوجد الحدود الخمسة التالية

  مثال : بين إذا كانت المتتابعة التنالية حسابية أم لا؟
  -2,-6,-10,-15,-20,-25

  مثال : أوجد أساس المتتابعة التالية : $0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{3}{4},1,\frac{5}{4},\frac{3}{2}$

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

الصيغة التالية تعبر عن الحد النوني لمتتابعة حسابية حدها الأول a_1 وأساسها d حيث n عدد طبيعي

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

مثال : أوجد الحد الثامن في المتتابعة التالية :

2,7,12,17,....

الحل : أولا نوجد أساس المتتابعة d

$$a_1 = 2$$

$$a_8 = 2 + (7)5 = 37$$

مثال: أوجد a_n علما أن : $n = 9$ ، $d = 6$ ، $a_1 = -4$

مثال : أوجد a_{15} علما أن : $d = -3$ ، $a_1 = 5$

- في بعض الأحيان يعطى في المسألة حدان غير متتاليين في متتابعة حسابية وتسمى جميع الحدود الواقعة بين الحدين أوساطا حسابية ويمكن استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة

إيجاد الأوساط الحسابية

مثال : أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة التالية :

-6,.,.,.,.,24

الحل : بما أنه يوجد 4 جذور بين الحدين فإن n=6

نوجد الآن قيمة d

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$24 = -6 + (6-1)d$$
$$24 = -6 + 5d$$
$$5d = 30$$
$$d = 6$$

إذا المتتابعة هي : -6,0,6,12,18,24 الأوساط الحسابية المطلوبة هي 0,6,12.18

تمرين : أوجد خمسة أوساط حسابية بين الحدين 22 ,8-

المتسلسلات الحسابية

يمكن الحصول على المتسلسلة الحسابية بوضع لإشارة الجمع بين حدود المتتابعة لذا فالمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية ويسمى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة المجموع الجزئي ويرمز له بالرمز S_n

المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

الصيغة العامة $s_n = n(\frac{a_1 + a_n}{2})$

الصيغة البديلة $s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

مثال : أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية التالية

2+7+12,........+67

تمرين : أوجد مجموع حدود المتسلسلة التالية :

2+5+7+....+43

مثال : أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7$ ، $a_n = 79$ ، $s_n = 430$

.

مثال : أوجد الحدود الثلاثة للمتتابعة التي فيها $a_n = 36$ ، $n = 8$ ، $s_n = 120$

مقرر مبادئ الرياضيات للإدارة
أستاذ المادة/ ثابت القحطاني
البريد الالكتروني taalqahtani@ud.edu.sa

صيغة حدود المتسلسلة $\sum_{k=1}^{n} f(k)$

مثال : أوجد المجموع التالي : $\sum_{k=1}^{3}(2k+1)=$

الحل :

$$\sum_{k=1}^{3}(2k+1)= (2+1)+(4+1)+(6+1)$$

$$=3+5+7=15$$

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية

المتتابعة الهندسية : يعطى الحد النوني في المتتابعة الهندسية التي حدها الأول a_1 **وأساسها** r **بالصيغة التالية :**

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

مثال أكتب معادلة الحد النوني للمتتابعة الهندسية التالية : $\frac{1}{2},1,2,4,8,....$

إيجاد الأوساط الهندسية

مثال : أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 768,.,.,. ,3

تمرين : أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين $\frac{1}{2}, \ldots, 512$

تمرين : أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحدين $\frac{1}{4}, \ldots, 1024$

المجموع الجزئي لمتسلسلة هندسية

الصيغة العامة $s_n = \dfrac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$

الصيغة البديلة $s_n = \dfrac{a_1 - a_n r}{1-r} \quad , \quad r \neq 1$

تمرين : أوجد مجموع المتسلسلة التي فيها $a_1 = 2 \quad , \quad n = 10 \quad , \quad r = 3$

تمرين : أوجد مجموع المتسلسلة التي فيها $a_1 = 2000 \quad , \quad a_n = 125 \quad , \quad r = 3$

يمكن كتابة مجموع المتسلسلة كالتالي : $\sum_{k=1}^{n} ar^{k-1}$

مثال : أوجد مجموع حدود المتسلسلة التالية $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$

مثال : أوجد مجموع حدود المتسلسلة التالية $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$s = \frac{a_1}{1-r} \quad , \quad |r| < 1$$

وإذا كان $|r| \geq 1$ **فلا يوجد للمتسلسلة مجموع**

مثال : أوجد مجموع المتسلسلة التالية : $\frac{2}{3}+\frac{6}{15}+\frac{18}{75}+..$

مثال : أوجد مجموع المتسلسلة التالية : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+....$

الفصل السابع

المصفوفات

أنواع المصفوفات

1- المصفوفة الصفرية $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2- مصفوفة الصف $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

3- مصفوفة العمود $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

4- المصفوفة المربعة $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

5-المصفوفة القطرية $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

6- مصفوفة الوحدة $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

7- المصفوفة المثلثية $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

تساوي مصفوفتين

تتساوى مصفوفتان إذا كان لهما نفس العناصر وبالترتيب نفسه

مثال : إذا كانت المصفوفتان التاليتين متساويتين فأوجد قيمة x و y

الحل :

$$\begin{bmatrix} 2 & y \\ x & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$y = -4$$

$$x = 5$$

مثال : إذا كانت :
$$\begin{bmatrix} 3-x & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & y+5 \end{bmatrix}$$

فأوجد قيمة x وy

الحل :

جمع المصفوفات وطرحها

مثال : إذا كان $\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ و $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ فأوجد :

$$\underline{A} + \underline{B} =$$

$$\underline{B} + \underline{A} =$$

$$3\underline{A} + 2\underline{B} =$$

$$5\underline{A} - 3\underline{B} =$$

ضرب المصفوفات

لكي تتم عملية ضرب المصفوفتين التاليتين $\underline{A}_{m\times n}\times\underline{B}_{n\times s}$ لابد وان يتحقق الشرط التالي :

عدد الأعمدة في المصفوفة n الأولى يساوي عدد الصفوف في المصفوفة الثانية n

مثال : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\underline{A}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix} \quad و \quad \underline{B}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

مثال : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\underline{A}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix} \quad و \quad \underline{B}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -2\\ 2 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

الحل :

$$\underline{A}_{2\times 2}\times\underline{B}_{2\times 3}=$$

في المثال السابق هل يمكن ايجاد $\underline{B}_{2\times 3}\times\underline{A}_{2\times 2}$ ولماذا ؟

تمرين : أوجد حاصل ضرب المصفوفتين التاليتين :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} =$$

مثال : حل المعادلة المصفوفية التالية :

$$2\underline{X} - 3\underline{A} = 3\underline{B} - \underline{X}$$

حيث : $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $\underline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

مثال : إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ فاوجد :

$$\underline{A}^2 - 2\underline{A} + 3I =$$

المحددات

أولا : المحددة 2×2

إذا كانت لدينا المصفوفة التالية $\underline{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ فإن المحددة لها هي دلتا Δ وهي على الصورة التالية :

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=(a_1b_2)-(a_2b_1)$$

مثال : أوجد محددة المصفوفة التالية : $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

مثال : أوجد محددة المصفوفة التالية : $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

ثانيا : المحددة 3×3

إذا كانت المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ فإن المحددة لها على الصورة التالية :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال : أوجد محددة المصفوفة التالية $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

طريقة أخرى (طريقة كرامر)

معكوس المصفوفة : يرمز لمعكوس المصفوفة بالرمز $\underline{A}^{-1}$

$$\underline{A}\cdot\underline{A}^{-1}=\underline{A}^{-1}\cdot\underline{A}=I$$

إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ فإن معكوس الدالة يحسب كالتالي

أولا نوجد المحددة الدلتا $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

ثانيا نوجد معكوس المصفوفة بالطريقة التالية $\underline{A}^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}$

مثال : إذا كانت المصفوفة $\underline{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

فأوجد $\underline{A}^{-1}$

الحل :

تمرين : إذا كانت $\underline{A}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ فأوجد $\underline{A}^{-1}$

مثال : أوجد قيمة X التي تجعل المصفوفة التالية $\underline{A}=\begin{bmatrix} x-2 & x \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس

الحل :

تمرين : أوجد قيمة x التي تجعل المصفوفة التالية $\underline{A}=\begin{bmatrix} 3 & x+1 \\ -2 & x \end{bmatrix}$ ليس لها معكوس

حل نظام المعادلات الخطية باستخدام المحددات

الطريقة : لحل النظام التالي $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

أولا : نوجد المحددة $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = (a_1b_2) - (b_1a_2)$

ونوجد مصفوفة الثوابت $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

ثم نوجد $\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ و $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

ثانيا نوجد قيمة المجهولين x و y كالتالي

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ و $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$

مثال : حل النظام التالي $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$

مثال : حل نظام المعادلات التالي باستخدام المحددات

$$\begin{cases} x + 3y = 3 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

مثال : حل النظام التالي

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = -1 \end{cases}$$