ملخص مبادئ الرياضيات (١)

(محتويات المحاضرة كاملة)

د. أسامة حنفي

جامعة الملك فيصل (إنتساب)

الفصل الدراسي الأولى عام ١٤٣٣ / ١٤٣٤ هـ

إعداد :

@ABOD_05

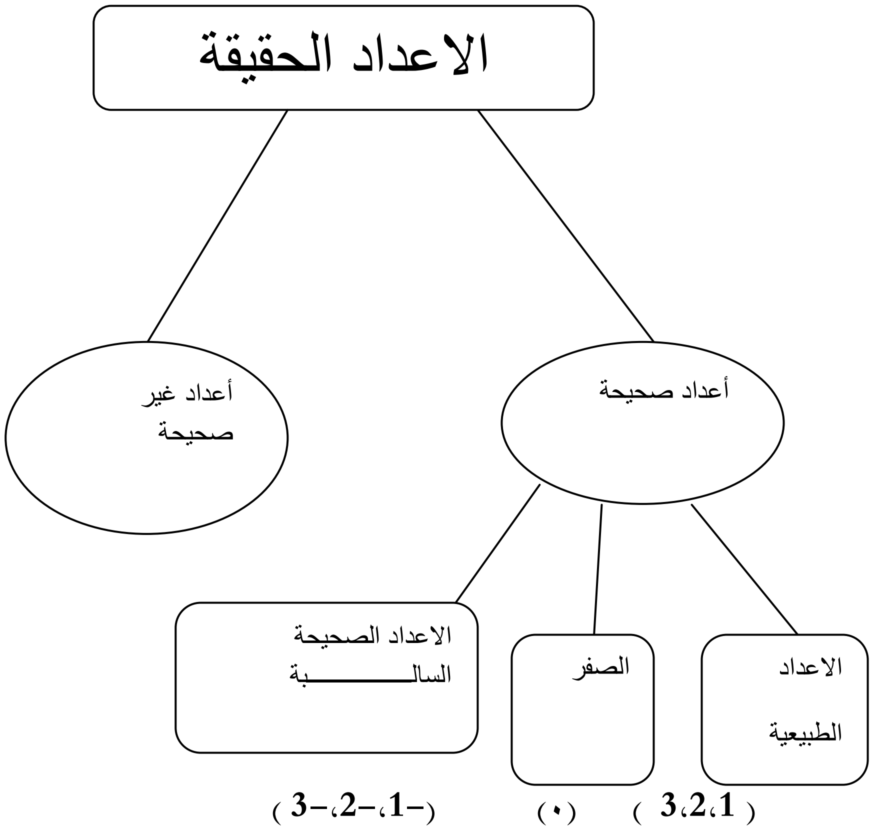
أهداء لطلاب الانتساب المطور بجامعة الملك فيصل

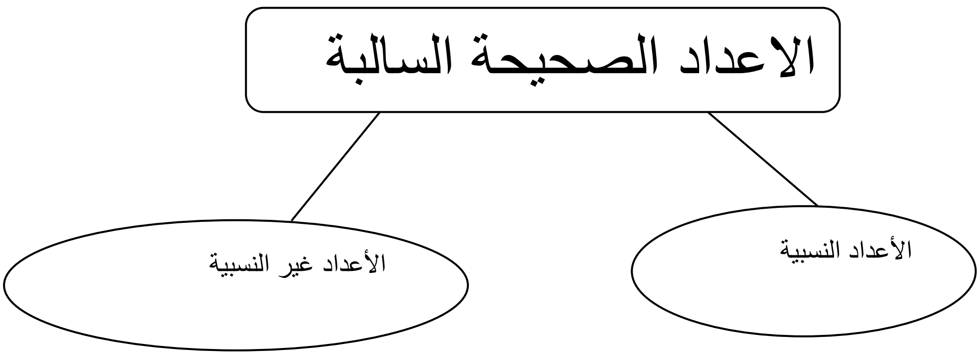
مع تمنياتي للجميع التوفيق والنجاح

- بسم الله الرحمن الرحيم -

المحاضرة الإولى

العمليات الجبرية





الأعداد غير الصحيحة:

وهي الأعداد القياسية وهي عبارة عن النسبة بين عددين صحيحين ويكون المقام لا يساوي صفر.

مثل $\frac{2}{7}$ ، $\frac{-5}{3}$ $\frac{3}{9}$

وأي عدد لا يمكن كتابته على الصورة القياسية مثل $\sqrt{2}$ و $\sqrt[4]{6}$ يسمى عدد غير نسبي .

القيمة المطلقة:

القيمة المطلقة لأي عدد هي قيمة العدد بدون النظر إلى الأشارة التي تسبق العدد

هذا يعني أن القيمة المطلقة هي عدد موجب دائما.

ويرمز للقيمة المطلقة للعدد بـ $|x|$

مثال : أوجد القيمة المطلقة للمقادير التالية :

$\frac{1}{9}$. $\frac{-3}{4}$. 11 . -5

$|11| = 11$, $|-5| = 5$

العمليات الجبرية ::

يوجد في الجبر أربع عمليات أساسية وهي

الجمع و الطرح والضرب و القسمة

جمع المقادير الجبرية :

لجمع المقادير فأننا نستخدم العلامة (+) لدلالة على عملية الجمع والتي تمثل عملية إضافة مثل :

$2x + 3x = 5x$, $7+4=11$, $2+5=7$

يشترط لجمع أي مقدران جبريان ان يكونا من نفس النوع

فمثلا :

$2x+5y$ لا يمكن جمعهما و يظل المقدار كما هو . .

مثال: $3a+8b+9a+2b = 12a + 10b$

مثال : أوجد ناتج حاصل جمع المقادير التالية:

$7x+5y +9xy$, $8x+2y$

الحل

يمكن ترتيب المقدارن السابقان كما يلي:

$$\begin{array}{rrrr} & 7x & +5y & +9xy \\ + & 8x & +2y & \\ \hline & 15x & +7y & +9xy \end{array}$$

نلاحظ من المثال أن كلا من x و y تختلف عن xy لذلك عند الجمع يتم التعامل مع كل مقدار على حدى .

طرح المقادير الجبرية :

لطرح المقادير فأننا نستخدم العلامة(−) لدلالة على عملية الطرح والتي تمثل عملية صرف أو سحب

مثال : إذ كان لديك عشر ريالات وتم شراء حلويات بست ريالات فأن المتبقي معك يكون أربع ريالات

يمكن التعبير عن ذالك رياضيا كما يلي

$10-6 = 4$

أي أن المقدار المصروف أو المسحوب نضع أمامه إشارة سالب .

لذلك عند إجراء عملية الطرح يتم تغير إشارة العدد أو المقدار الجبري المراد طرحه ثم نطبق قاعدة الجمع.

مثال: أوجد ناتج $5x - 3x$ ؟ الحل : $= 2x$

مثال: أوجد ناتج $7y - 12\ y$ ؟ الحل : $= 5y$

نلاحظ إشارة المقدار الأكبر هي سالبة لذلك عند الطرح نضع الفرق بين المقداران مع إشارة المقدار الأكبر

مثال: أوجد ناتج جمع المقادير التالية :

$2x+7y$, $-2x-6y$, $8x-3y$

الحل:

$$\begin{array}{rr} 2x & +7y \\ -2x & -6y \\ 8x & -3y \\ \hline \end{array}$$
$$\boxed{8x-2y}$$

$$7y-9y = -2y$$

نلاحظ عند جمع مقداران جبريان متساويان في القيمة ومختلفان في الإشارة فإن حاصل جمعهما يساوي صفر

مثال:أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

$$2x+4y-3z \quad , \quad -4x+5z+2y \quad , \quad 6z+7x-8y$$

الحل:

نلاحظ أن المقادير الثلاثة السابقة غير مرتبة لذلك فإننا عند جمعها لابد من ترتيبها مع مراعاة كتابة أي مقدار بنفس الإشارة التي هو عليها كما يلي:

$$\begin{array}{rrr} 2x & +4y & -3z \\ -4x & +2y & -5z \\ +7x & -8y & +6z \\ \hline 5x & -2y & -2z \end{array}$$

مثال: أوجد ناتج $(4x+2y) - (2x+5y)$

الحل: نلاحظ وجود إشارة سالب أمام القوس الثاني لذلك عند فك القوس لا بد من تغير جميع إشارات المقادير التي بداخل القوس كما يلي

$$= 4x+2y-2x-5y \qquad = 2x-3y$$

مثال: أوجد ناتج $(3x^2-3x+2) - (x^2-3x+11)$

$$= 3x^2-3x+2-x^2+3x-11 \qquad = 2x^2-9$$

مثال: أطرح المقدار $6x+5y$ من $7x+2y$

$$(6x+5y)-(7x+2y) = 6x+5y-7x-2y = -x+3y = 3y-x$$

- نلاحظ أن المقدار الذى ذكر بعد حرف " من " هو الذى كُتب اولا

مثال: أطرح المقدار $7a^2-5ab+8b^2$ من $3a^2+ab-5b^2$

الحل:

$= 3a^2+ab-5b^2-(7a^2-5ab+8b^2)$

$= 3a^2+ab-5b^2-7a^2+5ab-8b^2$

$= -4a^2+6ab-13b^2$

إيجاد قيمة المقادير الجبرية:

ويقصد به عملية التعويض بقيمة المتغيرات الموجودة بالمقدار الجبري لإيجاد قيمة هذا المقدار .

مثال : أوجد قيمة المقدار $3x-7y+9z$ ؟ إذا كان $x=2$, $y=3$, $z=5$

الحل : بالتعويض $3(2)-7(3)+9(5) = 30$

مثال: أوجد قيمة المقدار $3a-4b+6c$ ؟ إذا كان $a=3$, $b=-2$, $c=-1$

الحل: $3(3)-4(-2)+6(-1) = 11$

مثال: أوجد قيمة المقدار $3xz+5xy-2zy$ ؟ إذا كان $x=-1$, $y=2$, $z=-3$

الحل: $3(-1)(3)+5(-1)(2)-2(3)(2) = 11$

تمارين ..

اولا اوجد ناتج العمليات التالية:

(1) $8-6+3 = 11-6 = 5$

(2) $-3+8-11 = -14+8 = -6$

(3) $5n+7n-n = 11n$

(4) $6m+3n-7m-2n = -m+n$

(5) $6a^2+3ab-4b^2-8a^2-5ab-5b^2$
$= -2a^2-2ab-9b^2$

ثانيا: أوجد حاصل جمع المقادير الجبرية التالية:

(١) $5x+2y-z$, $2x+3y-z$, $2x-5y+7z$

الحل = $9x+5z$

(٢) $2n-2m-k$, $10k-3m+4n$, $4m-5n+6k$

الحل = $-m+n+15k$

(٣) $7m-3L$, $4n-m$, $2n+L+m$

الحل = $6n-2L+7m$

ثالثاً : أوجد ناتج العمليات التالية:

(١) أطرح $x9-2y$ من $5x-4y$

الحل = $-4x-2y$

(٢) أطرح $3a-8b+c$ من $4a-6b+2c$

الحل = $a+2b+c$

(٣) $(7m-2n) - (3m-4n)$

الحل = $4m - 6n$

(٤) $(3a-7b) - (2a+5b) - (3a+8b)$

الحل = $4a - 4b$

المحاضرة الثانية

ضرب المقادير الجبرية

عملية الضرب تعرف حسابيا على أنها عدد مرات تكرار الجمع لعدد معين .

فمثلا $6+6+6+6+6 = 6*5 = 30$

مثال : أي أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون –

$7*3 = 21$, $-2*11=-22$, $-4*-5 = 20$, $7*4x=28x$, $2x *-5y = -10xy$

نلاحظ أن $x\ y$ هي نفسها $x*y$ وهي أيضا $x.y$

مثال: أوجد ناتج $2(4x-3y) + 3(7x+9y) - (x-4y)$ ؟

الحل : $8x-6y+12x+27y-x+4y = 28x + 25y$

مثال: أوجد ناتج $2a(3-4b) - 4b(5-3a)$ ؟

الحل : $6a-8ab -20b+12ab = 6a-20b+4ab$

قاعدة هامة: إذا اتحدت الأساسات فأنه عند الضرب تجمع الأساس

مثال: إذا كان المقدار x^5 فأن

س٥ ← أس

أساس

مثال : أوجد ناتج $x^3 \times x^5$ ؟

الحل: $x^5+3 = x^8$

مثال: أوجد ناتج $y^4 * y^{-5} * y^3$ ؟

الحل : $y^4-5+3 = y^2$

مثال: أوجد ناتج $3^{-4} * 3^{-2} * x3^4$ ؟

الحل : 3^{-2}

قاعدة هامة: أي مقدار أس صفر = ١

مثال : أوجد ناتج $2^{-7} * 2^5 * 2^2$ ؟

الحل : $2^0 = 1$

مثال : أوجد ناتج $2x(5-3x)+3(7x-1)-5x(3-4x)$ ؟

الحل:

$$= 10x - 6x^2 + 21x - 3 - 15x + 20x^2$$

$$= 14x^2 + 16x - 3$$

مثال: أوجد ناتج $5a(2a+4b) - 3(2a-2b) + 3b(3a-4b)$ ؟

الحل: $= 10a^2 + 29ab - 6a + 6b - 12b^2$

مثال: أوجد ناتج $(2x - y)(3x+4y)$ ؟

الحل: $= 6x^2 + 5xy - 4y^2$

مثال: أوجد ناتج $(4a+b)(3a-2b)$ ؟

الحل : $= 12a^2 - 5ab - 2b^2$

مثال: أوجد ناتج $(4m+n)^2$ ؟

الحل: $= 16m^2 + 8mn + n^2$

فى التمرين السابق كان من الممكن إيجاد الناتج مباشرة بتطبيق القاعدة التالية:

الحل = مربع المقدار الأول + ٢× الأول × الثانى + مربع الثانى

مثال : أوجد ناتج $(2x-y)^2$ ؟

الحل: $= 4x^2 - 4xy + y^2$

مثال: أوجد ناتج $(2x-y)^2+(3x+y)(2x-y)$ ؟

الحل = $10x^2-5xy$

تمارين : أولاً: أوجد ناتج ما يلى:

- $4(7x+2y)$ الحل = $28x+8y$
- $3(4a-b)-2(a-b5)+4(a+b)$ الحل = $14a+11b$
- $y^{4}*y^{-2}*y^{7}+u^{-4}*u^{-3}*u^{7}$ الحل : $y^9+u^0=y^9-1$
- $3^{-5}*3^{4}*2^{-4}*2^{5}$ الحل $3^{-1}*2=3\div 2=0.67$
- $7a(3+a)+5(2a-8)-2a(4-3a)$ الحل = $13a^2+23-40$

ثانياً- اوجد ناتج:

1− $(c+3d)(2c-d)$

$2c^2-cd+6cd-3d^2=2c^2+5cd-3d^2$

2− $(2g+t)^2=4g^2+4gt+t^2$

3− $(3m-2n)^2=9m^2-12mn+4n^2$

4− $(x+2y)^2+(2x-y)^2$

$x^2+\cancel{4xy}+4y^2+4x^2-\cancel{4xy}+y^2=5x^2+5y^2$

5− $(a+b)^2+(5a-2b)(3a-b)$

$a^2+2ab+b^2+15a^2-5ab-6ab+2b^2$

$=16a^2-9ab+3b^2$

المحاضرة الثالثة

قسمة المقادير الجبرية

يقصد بالقسمة هى النسبة بين عددين

أنه إذا اتحدت الإشارات تكون الإشارة " + " أما إذا اختلفت الإشارات تكون"−"

فمثلاً: $15 \div 3 = 5$

$-78 \div 2 = -38$

تذكر أن :

$$\frac{\text{صفر}}{\text{أى مقدار}} = \text{صفر} \qquad \frac{\text{أى مقدار}}{\text{صفر}} = \infty \qquad \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}} = \text{كمية غير محددة}$$

لذلك يشترط لإجراء عملية القسمة أن المقام لا يساوى صفر.

قاعدة هامة: عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس

مثال:

$$\frac{x^6}{x^2} = x^{6-2} = x^4 \qquad \frac{y^4}{y^7} = y^{4-7} = y^{-3}$$

مثال: اختصر المقدار الجبرى

$$\frac{14y^8x^5}{2y^6x^2}$$

الحل :

$$\frac{14y^8x^5}{2y^6x^2} = 7y^{8-6}x^{5-2} = 7y^2x^3$$

مثال:

اختصر المقدار الجبرى

$$\frac{72z^3L^9m^5}{6z^7L^3m^5}$$

الحل:

$$\frac{72z^3L^9m^5}{6z^7L^3m^5} = 12z^{3-7}L^{9-3}m^{5-5} = 12z^{-4}L^6$$

لاحظ أن $m^{5-5} = m^0 = 1$

مثال:

اختصر المقدار الجبري $\dfrac{54k^6r^8w^7}{24k^7r^4w^2}$

الحل:

$$\frac{54k^6r^8w^7}{24k^7r^4w^2}=\frac{9}{4}k^{6-7}r^{8-4}w^{7-2}$$
$$=\frac{9}{4}k^{-1}r^4w^5=\frac{9r^4w^5}{4k}$$

– إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدود على مقدار جبري ذو حد واحد

في هذه الحالة يتم استخدام القاعدة التالية

$$\frac{x+y+z}{d}=\frac{x}{d}+\frac{y}{d}+\frac{z}{d}$$

أي يتم توزيع المقام على جميع حدود البسط

ل: أوجد ناتج $\dfrac{4q^3v^5+3q^2v^4}{q^2v^2}$

الحل:

$$\frac{4q^3v^5+3q^2v^4}{q^2v^2}=\frac{4q^3v^5}{q^2v^2}+\frac{3q^2v^4}{q^2v^2}$$
$$=4qv^3+3v^2$$

أوجد ناتج $\dfrac{4x^4y^2+12x^3y^4-18xy^2}{2xy}$

$$\frac{4x^4y^2+12x^3y^4-18xy^2}{2xy}$$
$$=\frac{4x^4y^2}{2xy}+\frac{12x^3y^4}{2xy}-\frac{18xy^2}{2xy}$$
$$=2x^3y+6x^2y^3-9y$$

– إيجاد خارج قسمة مقدار جبري كثير الحدودعلى مقدار جبري كثير الحدود

فى هذه الحالة يتم إجراء القسمة المطولة كما يتضح من المثال التالي:

إذا كان حاصل ضرب مقداران جبريان هو $2x^2 - 9xy - 5y^2$

وكان أحد المقدران هو $x - 5y$ أوجد المقدار الأخر ؟

الحل:

يتم إجراء عملية القسمة كما يلي

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x + y \\
\hline
x - 5y & 2x^2 - 9xy - 5y^2 \\
 & -2x^2 + 10xy \\
\hline
 & xy - 5y^2 \\
 & -xy + 5y^2 \\
\hline
 & 0 \quad\quad 0
\end{array}
$$

على ذلك يكون المقدار الأخر هو $2x + y$

مثال: أوجد ناتج قسمة $6N^3 - 13N^2t + 8Nt^2 - 3t^3$

علي $2N - 3t$ ؟

الحل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3N^2 - 2Nt + t^2 \\
\hline
2N - 3t & 6N^3 - 13N^2t + 8Nt^2 - 3t^3 \\
 & -6N^3 + 9N^2t \\
\hline
 & -4N^2t + 8Nt^2 - 3t^3 \\
 & 4N^2t - 6Nt^2 \\
\hline
 & 2Nt^2 - 3t^3 \\
 & -2Nt^2 + 3t^3 \\
\hline
 & 0 \quad\quad 0
\end{array}
$$

وعلي ذلك يكون الحل هو $3N^2 - 2Nt + t^2$

مثال:

أوجد قيمة P التي تجعل المقدار $x^3 - 3x^3 - 5x + P$

يقبل القسمة على $x^2 - x + 3$ ؟

الحل: حتى يمكن إيجاد قيمة P لابد من إجراء عملية القسمة المطولة كما يلى:

$$
\begin{array}{r}
x-2 \qquad\qquad\qquad\qquad \\
x^2-x+3\overline{\big)\, x^3-3x^2+5x+P} \\
-x^3+x^2-3x \qquad\quad \\
\hline
-2x^2+2x+P \\
2x^2-2x+6 \\
\hline
0 \qquad\quad 0 \qquad
\end{array}
$$

نلاحظ حتى يكون المقدار x^3-3x^2+5x+P

يقبل القسمة على x^2-x+3

فلابد أن يكون $P+6=0$

$\therefore P=-6$

تمارين

اولاً- أوجد ناتج ما يلي:

1 - $\dfrac{x^4y^5+x^3y^3}{x^2y} = \dfrac{x^4y^5}{x^2y}+\dfrac{x^3y^3}{x^2y} = x^{4-2}y^{5-1}+x^{3-2}y^{3-1}$

$= x^2y^4+xy^2$

2 - $\dfrac{m^2v^7-m^3v^2}{m^2v^2} = v^5-m$

3 - $\dfrac{63a^2bc^3-42a^3b^2c^3}{7abc} = \dfrac{63a^2bc^3}{7abc}-\dfrac{42a^3b^2c^3}{7abc}$

$= 9ac^2-6a^2bc^2$

$\dfrac{2x^2}{x}=2x \qquad \dfrac{-xy}{x}=-y$

تمارين

ثانياً- إذا كان حاصل ضرب مقدران جبريان هو

$2x^2+9xy-5y^2$ وكان أحد المقدران هو $x+5y$

أوجد المقدار الآخر ؟

$$
\begin{array}{r}
2x-y \qquad\qquad \\
x+5y\overline{\big)\, 2x^2+9xy-5y^2} \\
-2x^2+10xy \qquad\quad \\
\hline
-xy-5y^2 \\
\mp xy \mp 5y^2 \\
\hline
\end{array}
$$

تمارين

$\frac{2a^2}{2a} = a \qquad \frac{-8ab}{2a} = -4b$

ثالثاً- إذا كان حاصل ضرب مقداران جبريان هو $2a^2 - 7ab - 4b^2$ وكان أحد المقداران هو $2a + b$

أوجد المقدار الآخر ؟

$$\begin{array}{r|l} & a - 4b \\ \hline 2a+b & 2a^2 - 7ab - 4b^2 \\ & -\cancel{2a^2} \mp ab \\ \hline & -8ab - 4b^2 \\ & \pm 8ab \pm 4b^2 \\ \hline & - - - - \end{array}$$

$a - 4b$

$\frac{x^2}{x} = x \qquad \frac{5x}{x} = 5$

رابعاً- أوجد قيمة R التي تجعل المقدار $x^2 + 8x + R$

يقبل القسمة على $x + 3$ ؟

$$\begin{array}{r|l} & x + 5 \\ \hline x+3 & x^2 + 8x + R \\ & -\cancel{x^2} \mp 3x \\ \hline & 5x + R \\ & -\cancel{5x} \mp 15 \\ \hline & - - - \end{array}$$

$R = 15$

$R - 15 = 0$

$R = 15$

المحاضرة الرابعة

حل المعادلات الخطية

سنتعرض أن شاء الله إلى حل المعادلات:

اولاً– المعادلات الخطية فى مجهول واحد

ثانياً– المعادلات الخطية في مجهولين

اولاً– المعادلات الخطية فى مجهول واحد

مثال: حل المعادلة التالية $5x = 2x + 12$؟

الحل : $x=4$ $3x=12$ $5x - 2x = 12$

مثال حل المعادلة التالية $4x+5 = x-3$ ؟

الحل: $x=\frac{-8}{3}$ $3x=-8$ $4x-x=-3-5$

مثال حل المعادلة التالية

$$2(y+2)+5(3y-7)=5(3y-11)+12$$

الحل: يتم فك الأقواس اولاً كما يلي

$$\begin{aligned}
&2(y+2)+5(3y-7)=5(3y-11)+12\\
&2y+4+15y-35=15y-55+12\\
&2y+15y-15y=-55+12-4+35\\
&2y=-12\\
&y=\frac{-12}{2}=-6
\end{aligned}$$

مثال: حل المعادلة التالية $\frac{5x-1}{3}+\frac{4x-7}{2}=\frac{9x-11}{7}$

الحل: في هذه الحالة لابد من توحيد المقامات اولاً للطرف الأيمن

$$\begin{aligned}
&\frac{5x-1}{3}+\frac{4x-7}{2}=\frac{9x-11}{7}\\
&\frac{2(5x-1)+3(4x-7)}{6}=\frac{9x-11}{7}\\
&\frac{10x-2+12x-21}{6}=\frac{9x-11}{7}\\
&\frac{22x-23}{6}=\frac{9x-11}{7}
\end{aligned}$$

مثال : حل المعادلة التالية

$$\frac{3x+1}{5}=\frac{2x-1}{3}$$

الحل: في هذه الحالة حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

أى أن

$$\begin{aligned}
&\frac{3x+1}{5}=\frac{2x-1}{3}\\
&3(3x+1)=5(2x-1)\\
&9x+3=10x-5\\
&9x-10x=-5-3\\
&-x=-8\\
&x=8
\end{aligned}$$

ثم حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين

$$\frac{22x-23}{6}=\frac{9x-11}{7}$$

$$7(22x-23)=6(9x-11)$$

$$154x-161=54x-66$$

$$154x-54x=-66+161$$

$$100x=95$$

$$x=\frac{95}{100}=0.95$$

ثانياً– حل المعادلات الخطية فى مجهولين

مثال حل المعادلات التالية :

$5x+2y = 12$ ⟵ ١

$7x-3y = 11$ ⟵ ٢

الحل : يتم ضرب المعادلة (١) x 7 والمعادلة (٢) x 5 وبطرح المعادلتين (٣) – (٤)

$35x + 14y = 84$ ⟵ ٣

$\underline{-35x-15y= -15}$ ⟵ ٤

$29y = 29 \quad y=1$

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة y =١ ينتج أن

$5x+2(1) = 12$

$5x=12 – 2$

$5x = 10 \quad x=2$

أى أن الحل هو x = 2 و y =1

مثال حل المعادلات التالية :

$3x-5y=8 \longrightarrow$ ١

$8x+2y=6 \longrightarrow$ ٢

الحل : يتم ضرب المعادلة (١) $8x$ والمعادلة (٢) $3x$ لتكون

$24x-40y = 64$

$\underline{24x+6y = 18}$ وبطرح المعادلتين ينتج

$-46y=46 \quad y=1$

وبالتعويض فى معادلة (١) عن قيمة $y = -1$ ينتج أن الحل هو $x = 1$ و $y = -1$

تمارين

١ –حل المعادلة التالية

$1-\quad 9y-3=4y+7$

$9y-4y=3+7$

$5y=10$

$y=\frac{10}{5}$

$y=2$

$2-\quad 3(x-5)+2(x+2)=4(x-1)+15$

$3x-15+2x+4=4x-4+15$

$5x-11=4x+11$

$5x-4x=11+11$

$$3 - \quad \frac{4x-1}{2} = \frac{x+8}{3}$$

$$3(4x-1) = 2(x+8)$$

$$12x - 3 = 2x + 16$$

$$12x - 2x = 16 + 3$$

$$10x = 19$$

$$x = \frac{19}{10} = 1.9$$

توحيد مقامات

حل المعادلات التالية :

$$4 - \quad \boxed{\frac{2x+1}{2} + \frac{x-1}{5}} = \frac{7x-2}{4}$$

$$\frac{5(2x+1) + 2(x-1)}{10} = \frac{7x-2}{4}$$

$$\frac{10x+5+2x-2}{10} = \frac{7x-2}{4}$$

$$\frac{12x+3}{10} = \frac{7x-2}{4}$$

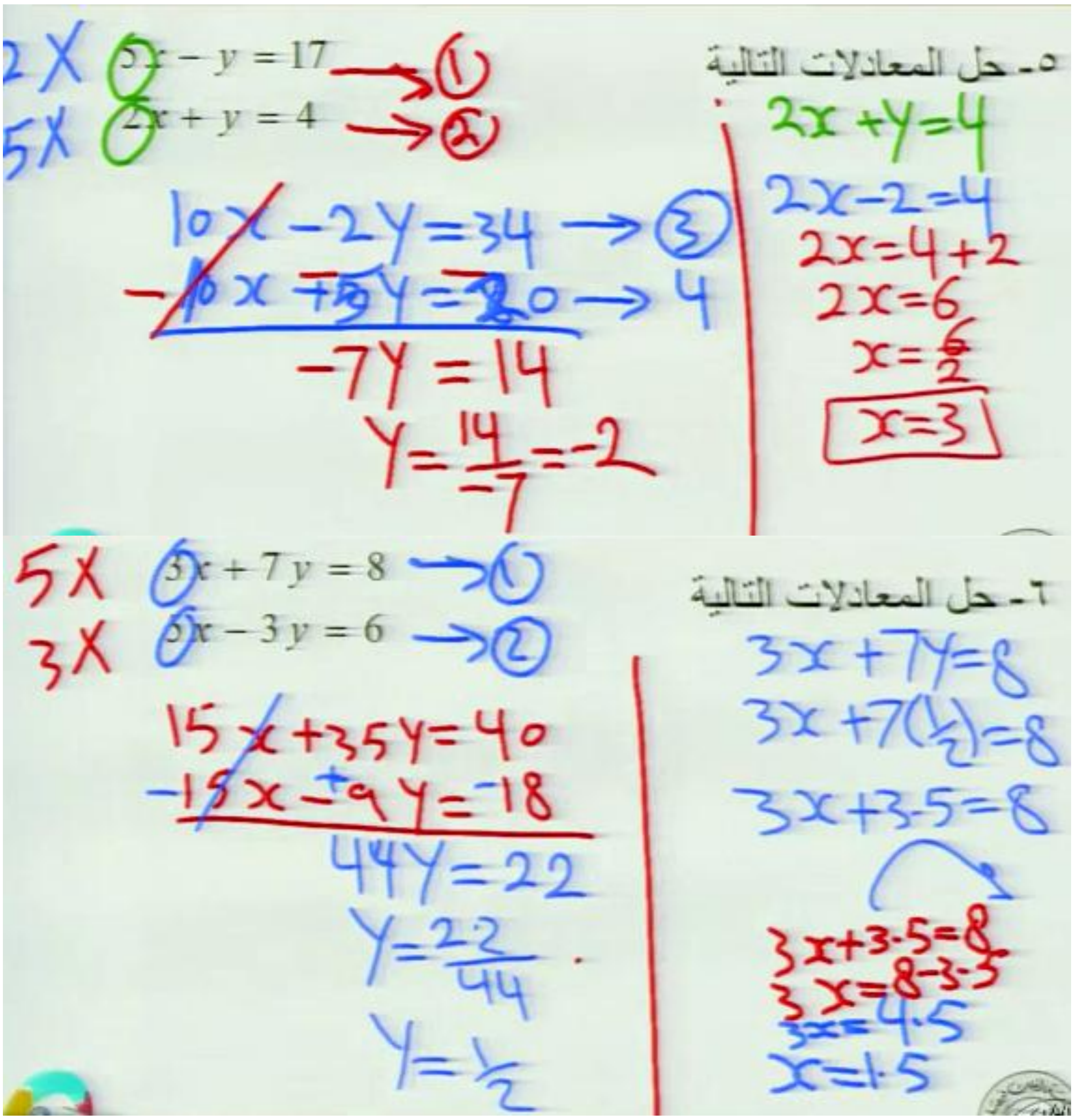
$$4(12x+3) = 10(7x-2)$$

$$48x + 12 = 70x - 20$$

$$20 + 12 = 70x - 48x$$

$$32 = 22x$$

$$x = \frac{32}{22}$$



المحاضرة الخامسة

تطبيقات تجارية

مثال:

اشترت هند دفترا و علبة الوان بقيمة 7.5ريالات.فما ثمن الدفتر اذا كان ثمن علبة الالوان 4.25 ريالات؟

الحل:

ثمن الدفتر هــو x لذلك يكون

$x = 7.5 - 4.25 = 3.25$ ريال

مثال:

اشترى محمد 5 علب من الجبن سعر العلبة 14 ريال. و 2كيس ارز بسعر 40 ريال للكيس. أوجد ما دفعه محمد؟

الحل:

ما دفعة محمد $= 5 \times 14 + 2 \times 40 = 150$ ريال

نقطة التوازن للسوق

هي النقطة التي يكون عنها دالة الطلب = دالة العرض

$$S(x) = D(x)$$

ويطلق على الكمية المطلوبة أو المعروضة عندها بكمية التوازن وأيضا السعر عند هذه النقطة يطلق عليه سعر التوازن ورمزه p

مثال : إذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد خلال العلاقه التالية :

$$p=180-3x$$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال $p=5x+20$

المطلوب : تحديد كمية وسعر التوازن ؟

الحل : دالة الطلب = دالة العرض

$180-3x = 5x+20$

$180-20 = 5x+3x$

$160 = 8x$

$X= 20$

كمية التوازن ٢٠ وحدة

لتحديد سعر التوازن يتم التعويض في أي دالة (الطلب – العرض)

$P=180-3x$

$P= 180-3(20)$

$P=180-60$

$P= 120$

- **نقطة التعادل**

عند دراسة تحليل الايرادات والتكاليف فأننا نحدد نقطة التعادل وهي النقطة التى تتساوى عندها الايرادات مع التكاليف

أى أن الإيراد الكلى = التكاليف الكلية

$$C(x) = R(x)$$

تشير x إلى عدد الوحدات المنتجة والمباعه

الإيراد الكلي $R(x)$

ويتحدد من خلال الايراد الكلى = سعر البيع x عدد الوحدات

التكاليف الكلية $C(x)$

التكاليف الكلية = التكاليف المتغيرة + التكاليف الثابتة

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة عدد الوحدات

تحديد الربح الأكبر

الربح الكلى = الايراد الكلى – التكاليف الكلية

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

عند التعادل الربح الكلي = ٠

مثال : **إذا كان التكلفة المتغيرة لإنتاج وحدة واحدة من احد المنتجات هي ٥ ريال و التكاليف الثابتة هى 100000 ريال و سعر بيع الوحدة الواحدة هو 9 ريال.**

أوجد : ١ – عدد الوحدات الذى حُقق التعادل؟ ٢–عدد الوحدات الذى حُقق ربح قدره 20000 ريال ؟

الحل : تحديد دالة التكاليف الكلية:

التكاليف المتغيرة = التكلفة المتغيرة للوحدة x عدد الوحدات

التكاليف المتغيرة = 5x التكاليف الثابتة = 100000

التكاليف الكلية هي $C(x) = 5x + 100000$

تحديد الإيراد الكلي = : سعر البيع x عدد الوحدات $\quad R(x) = 9x$

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$P(x) = R(x) - C(x)$

$= 9x - (5x + 100000)$

$= 9x + 5x - 100000$

$= 4x - 100000$

عند التعادل الربح الكلي = صفر

$= 4x - 100000 = 0 \qquad 4x = 100000 \qquad x = 2500$

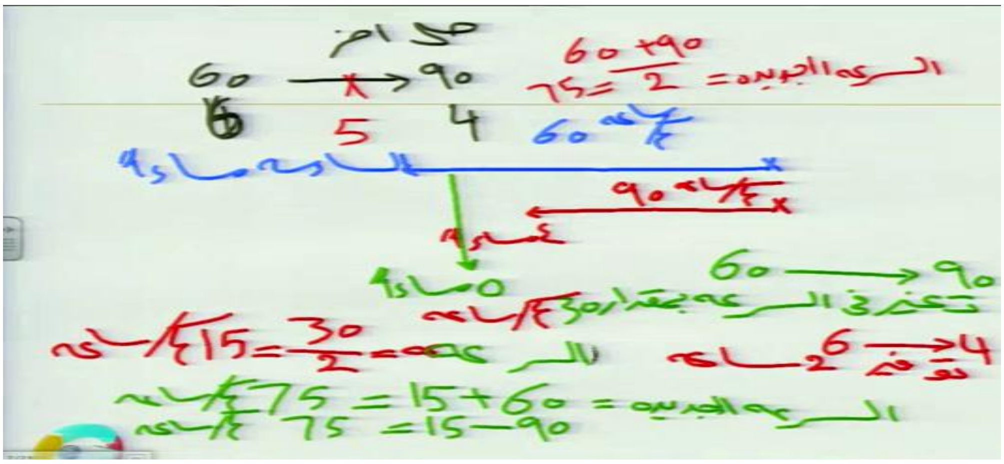
عدد الوحدات الذى يحقق ربح قدرة 20000 ريال الربح الكلي = ٢٠٠٠٠ = $P(x)$

$4x - 100000 = 20000 \qquad 4x = 20000 + 100000 = 120000 \qquad X = 30000$

تمارين : سار محمد بسيارة تبلغ سرعتها 60 كم / ساعة فوصل الى المكان المحدد ف الساعة السادسة مساءا وعندما سار بسرعة 90 كم / ساعة من نفس نقطة البداية وصل الى المكان المحدد نفسه الساعة الرابعة مساء

فهل يمكنك معرفة السرعة التي يجُب أن يصل بها الى نفس المكان المحدد ف تمام الساعة الخامسة مساء ؟

الحل :



٢- اشترى محمود بضاعة بمبلغ 3450 ريال فباعها بمبلغ ٥٠٠٠ ريال حدد نسبة الربح التى حققها؟

الحل : مقدار الربح = ٥٠٠٠ -٣٤٥٠ = ١٥٥٠ ريال

نسبة الربح = مقدار الربح / مقدار الشراء x ١٠٠

= ١٥٥٠/٣٤٥٠ x ١٠٠ = ٤٤،٩٢ %

٣- إذا كان سعر بيع الوحدة من احد المنتجات 40 ريال و التكلفة المتغيرة للوحدة 25 ريال والتكاليف الثابتة هى 75000 ريال حدد عدد الوحدات التى تحقق التعادل و ماهى الاباح الناتجة من بيع

وانتاج 4000 وحدة؟ وما هى عدد الوحدات التى يجب بيعها لتحقيق ارباح قدرها 10000 ريال؟

الحل

الربح الكلي = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$R(x) = 40x$

$C(x) = 25x + 75000$ $\quad =40x - (25x + 75000)$ $\quad =40x - 25x - 75000$

$= 15x - 75000$

عند التعادل الربح الكلي = صفر

$15x-75000 = 0 \quad 15x= 75000 \quad x = 5000$

عند انتاج ٤٠٠٠ وحدة

$P(x) = 15x-75000 \quad =15(4000)-75000 \quad P= -1500$

الربح الكلي = ١٠٠٠٠ ريال

$X15-75000 = 10000$

$15x = 10000+75000 \quad 15x = 85000 \quad X= 5,666$

٤- اذا كانت دالة الطلب لأحد المنتجات تتحدد من خلال العلاقة التالية $P= 145 - 4x$

كما أن دالة العرض تتحدد من خلال $P=2x+13$

المطلوب : تحديد كمية وسعر التوازن؟

الحل :

عند التوازن $x = 22$ $= 132=6x$ $= 145-13= 2x+4x$ $145 - 4x = 2x+13$

سعر التوازن من خلال التعويض $x=22$

$145 - 4(22) = 57$ S.R

المحاضرة السادسة

تحليل المقادير الجبرية

يقصد بتحليل المقدار الجبري هو إيجاد المكونات الأساسية لهذا المقدار

هناك العديد من الطرق لتحليل المقدار الجبري منها :

- العامل المشترك
- الفرق بين المربعين
- الفرق بين المكعبين
- مجموع المكعبين
- تحليل المقدار الثلاثي

اولاً –العامل المشترك

وهو يعني المقدار الموجود في جميع عناصر المقدار الجبري

مثال : حلل المقدار $5xy + x^2$

الحل:

$$5xy + x^2 = x(5y+x)$$

مثال : حلل المقدار $9ab + 3bc$

الحل:

$$9ab + 3bc = 3b\,(3a + c)$$

مثال : حلل المقدار $2y^2 - 8y + 18y^7$

الحل:

$$= 2y(y-4+9y^6)$$

مثال: حلل المقدار $24x^3y - 15xy^3$

الحل: $= 3xy(8x^2-5y^2)$

ثانياً – الفرق بين المربعين

إذا كان لدينا مقداران مربعان وبينهما اشارة سالب يطلق علي هذا المقدار الفرق بين المربعين مثل $x^2 - y^2$

يمكن تحليل الفرق بين المربعين كما يلي

= (الجذر التربيعي للأول – الجذر التربيعي للثانى) (الجذر التربيعي للأول + الجذر التربيعي للثانى)

أى أن

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

مثال : حلل المقدار $25x^2 - y^2$

الحل:

$$25x^2 - y^2 = (5x - y)(5x + y)$$

مثال : حلل المقدار $64x^3 - 4xy^2$

الحل

$= 64x^3 - 4xy^2 = 4x\,(16x2 - y2 \qquad = 4x\,(4x - y)\,(4x + y)$

مثال:

حلل المقدار $48x^2y - 75y^3$

الحل :

$= 3y\,(16x^2 - 25y) \qquad = 3y\,(4x - 5y)\,(4x + 5y)$

مثال :

حلل المقدار $169x^5y - 144xy^5$

الحل :

$= xy\,(169x^4 - 144y^4) \qquad = xy\,(13x^2 - 12y^2)\,(13x^2 + 12y^2)$

ثالثاً– الفرق بين المكعبين

يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة موجب الفرق بين المكعبين مثل : $x^3 - y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين

أحدهما صغير والأخر كبير كما يلي

(جذر الأول–جذر الثاني) (مربع الأول +جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن :

$$x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + xy + y^2)$$

- مثال : حلل المقدار $8a^3 - 125b^3$

الحل:

$$= (2a-5b)(4a^2 + 10ab + 25b^2)$$

مثال: حلل المقدار $27x^3 - 216y^3$

الحل:

$$= (3x - 6y)(9x^2 + 18xy + 36y^2)$$

$$= 3(x-2y)9(x^2+2xy+4y^2)$$

$$= 27(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$$

رابعاً– مجموع المكعبين

- يطلق على المقدارين المكعبين اللذان بينهما اشارة موجب مجموع المكعبين مثل : $x^3 + y^3$ ويمكن تحليل هذا المقدار إلي قوسين

أحدهما صغير والأخر كبير كما يلي

(جذر الأول+جذر الثاني) (مربع الأول –جذرالأول*جذر الثاني+مربع الثاني)

أى أن :

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2-xy - +y^2)$$

مثال: حلل المقدار $64x^3 + 125y^3$

الحل:

$$= (4x + 5y)(16x^2 - 20xy + 25y^2)$$

مثال:

حلل المقدار $24bc^4 + 81b^4c$

الحل:

$$= 3bc\,(8c^3 - 27b^3)$$

$$= 3bc\,(2c+3b)\,(4c^2 - 6bc - 9b^2)$$

حلل المقادير التالية :

١ – $x^3 + 5x^2 - 7x^5$ الحل : $= x2\,(x + 5 - 7x^3)$

٢ – $25g^3h^2 + 75g^5h^7$ الحل : $= 25g3h2\,(1+3g^2h^5)$

٣ – $48L^3 - 75\,Ld^2$ الحل : $= 3L\,(4L - 5d)\,(4L+5d)$

٤ – $18u^3v^3 - 50\,uv^5$ الحل : $= 2uv\,(3u - 5v)\,(3u + 5v)$

٥ – $27a^3 - x^3$ الحل : $= (3a-x)\,(9a^2+3ax+x^2)$

٦ – $72c^5d^3 - 242c^3d^5$ الحل : $= 2c3d3\,(6c - 11d)\,(6c + 11d)$

٧ – X^3-64 الحل : $= (x-4)\,(x2+4x+16)$

٨ – $125 + 8r^3$ الحل : $= (5+2r)\,(25-10r+4r^2)$

٩ – $250\,x^2y^5 + 2x^5y^2$ الحل : $= 2x^2y^2\,(125y^3 + x^3)$

المحاضرة السابعة

تابع تحليل المقادير الجبرية

خامساً– تحليل المقدار الثلاثي

يقصد بالمقدار الثلاثي الذى يكون على الشكل التالي:

$$ax^2 + bx + c$$

ويتم تحليل المقدار الثلاثى إلى قوسين إلا أن تحليل المقدار الثلاثى يتوقف علي إشارة الحد الثالث أي هل هى موجبة أم سالبة ؟

وبالتالى نكون أمام حالتين وهما:

١– أشارة الحد الثالث موجبة

٢– أشارة الحد الثالث سالبة

أشارة الحد الثالث موجبة

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

١– حاصل ضربهما = الحد الثالث

٢– أشارتهما متشابهة نفس أشارة الحد الأوسط

٣– مجموع حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

مثال: حلل المقدار س $x2 + 5x + 6$

الحل: $= (x+2)(x+3)$

نلاحظ أننا بحثنا عن عددان حاصل ضربهما ٦ ومجموعهما ٥

كما أن الاشارات متشابهة نفس أشارة الحد الاوسط موجب

مثال: حلل المقدار ص $y^2 - 10y + 21$

الحل: $= (y - 3)(y - 7)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٢١ ومجموعهما ١٠

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

مثال: حلل المقدار $w^2 - 9w + 20$

الحل: $= (w-4)(w-5)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٢٠ ومجموعهما ٩

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

مثال: حلل المقدار $m^2 - 13m + 42$

الحل: $= (m-6)(m-7)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٤٢ ومجموعهما ١٣

كما أن الاشارات متشابهة نفس اشارة الحد الاوسط سالب

أشارة الحد الثالث سالب

في هذه الحالة يتم تحليل المقدار الثالث إلى مقدران يكون:

١- حاصل ضربهما = الحد الثالث

٢- أشارتهما مختلفة اى احدهما موجب والاخرى سالب وأشارة الاكبر نفس اشارة الحد الأوسط

٣- الفرق حاصل ضرب الطرفين = الحد الأوسط

مثال: حلل المقدار $x2 - x - 12$

الحل: $= (x - 4)(x + 3)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ١٢ والفرق بينهما ١

كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر سالب مثل الأوسط والأخر موجب

مثال: حلل المقدار $x2 + 2x - 35$

الحل: $= (x + 7)(x - 5)$

نلاحظ أننا نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٣٥ والفرق بينهما ٢

كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر موجب مثل الأوسط والأخر سالب

مثال: حلل المقدار $x^3 + s^3 - 42s$

الحل $= s (s2 + s + 42)$

$= s (s-7) (s+6)$

نلاحظ أننا أخذنا س عامل مشترك اولاً ثم

نبحث عن عددان حاصل ضربهما ٤٢ والفرق بينهما ١

كما أن الاشارات مختلفة والعدد الاكبر موجب مثل الأوسط والأخر سالب

حلل المقادير التالية:

١- $2x^2 + 13x + 15$ الحل : $= (2x+3) (x+5)$

٢- $x^2 +11x +24$ الحل : $= (x + 3) (x + 8)$

٣- $6q^2 - q - 15$ الحل : $= (3q-5) (2q + 3)$

٤- $2a^2 + a^2 - 15a$ الحل : $= a (2a - 5) (a + 3)$

٥- $y^2 + 12z + 35$ الحل : $= (z+5) (z+7)$

٦- $k^2 - 4k - 12$ الحل : $= (k+2) (k-6)$

المحاضرة الثامنة

حل المعادلات من الدرجة الثانية في مجهول واحد

تكون صورة المعادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد هي

$$ax^2 + bx + c = 0$$

ويمكن حلها باستخدام التحليل أو باستخدام القانون كما يلي

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل: يتم تحليل المقدار الثلاثي كما يلي

$$0 = (5 - x)(2 - x)$$

اى أن

$0 = 2 - x$ ومنها $x = 2$

أو $0 = 5 - x$ ومنها $x = 5$

حل أخر باستخدام القانون

$a = 1$ $b = -2$ $c = 10$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{7 + 3}{2}$$

$x= (7+3)/2= 5$

$x= (7-3)/2= 2$

مثال : حل المعادلة التالية

$X^2 -2x - 24 = 0$

الحل :

وبالتحليل $(x+4)(x-6)$

$x-6=0$ أى أن $x= 6$

أو $x+4 =0$ $x=-4$

حل أخر باستخدام القانون

$a= 1$ $b= -2$ $c = 10$

$$x= \frac{2 \pm \sqrt{4-4(1)(-24)}}{2(1)}$$

$$x= \frac{2+10}{2}$$

$x= (2+10)/2= 6$

$x= (10-3)/2= -4$

مثال: حل المعادلة $12x^2 + 4x = 33$

الحل: $12x^2 + 4x - 33 = 0$

الحل باستخدام القانون

$a = 12 \quad b = 4 \quad c = -33$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(12)(-33)}}{2(12)}$$

$$x = \frac{-4 \pm 40}{24}$$

$x = (-4+40) / 24 = 1.5$

$x = (-4-40) / 24 = -1.833$

تمارين

حل المعادلات التالية:

* $x^2 - 10x + 24 = 0$

$(x-6)(x-4)$

$x = 6$ أو $x = 4$

* $x^2 + 4x = 32$

$2x + 4x - 32 = 0$

$(x-4)(x+8)$

$x = -8$ أو $x = 4$

*$2x2 - 17x + 8 = 0$

$a = 2 \quad b = -17 \quad c = 8$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{289 - (4x2x8)}}{2x2}$$

$$\frac{15 + 17}{4} = x$$

$8 = 4/(15+17) = x$

$0.5 = 4/(15-17) = x$

تطبيقات تجارية واقتصادية

مثال : إذا كانت دالة العرض لأحد المنتجات هي $p(x) = S(x) = x^2 + 14$

وكانت دالة الطلب هي $p = D(x) = 174 - 6x$

المطلوب : حدد كمية وسعر التوازن ؟

الحل :

عند التوازن . . دالة الطلب = دالة العرض $p(x) = D(x) = S(x)$

$174 - 6x = x^2 + 14$

$x^2 + 6x + 14 - 174 = 0$

$x^2 + 6x - 160 = 0$

$(x-10)(x+16) = 0$

$x+16=0 \quad x-10=0$

$x=-16$ **مرفوض** $x=10$ **كمية التوازن**

تحديد سعر التوازن بالتعويض فى دالة العرض $p = x^2 + 14$

$P = (10)^2 + 14 = 114$

او بالتعويض فى دالة الطلب $p = 174 - 6x$

$P = 174 - 6(10) = 114$

متال:

إذا كان x تشير إلى عدد الوحدات المنتجة والتى يمكن ان تباع بسعر $p = 100 - 0.6x$ وكانت دالة التكاليف الكلية هى

اوجد: $C(x) = 5x + 2000$

عدد الوحدات التى تحقق التعادل؟

وما هو الربح او الخسارة عندما يكون عدد الوحدات المنتجة والمباعة 100 وحدة؟

وما هو عدد الوحدات اللازم لتحقيق ربح قدرة 1000 ريال؟

الحل :

إيجاد دالة الإيراد الكلى = سعر البيع x عدد الوحدات

$R(x) = x(100-0.6x) \qquad = 100x-0.6x^2$

دالة التكاليف الكلية $c(x) = 5x + 2000$

الربح الكلى = الايراد الكلي – التكاليف الكلية

$$\mathbf{P(x) = R(x) - C(x)}$$

$$\mathbf{P(x) = 100x - 0.6x^2 - (5x+2000)}$$

$$\mathbf{P(x) = 100x - 0.6x^2 - 5x - 2000}$$

$$\mathbf{P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000}$$

عند التعادل الربح الكلى = صفر

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000 = 0$$

$$a = -0.6 \qquad b = 95 \qquad c = -2000$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-95 \pm \sqrt{9025 - 4(-0.6)(-2000)}}{2(-0.6)}$$

$$x = \frac{-95 \pm 65}{-1.2}$$

$$x = \frac{-95 - 65}{-1.2} = 133.33$$ وحدة

$$x = \frac{-95 + 65}{-1.2} = 25$$

- الربح او الخسارة عندما يكون عدد الوحدات المنتجة والمباعة ١٠٠ وحدة

$$\mathbf{P(x) = -0.6x^2 + 95x - 2000}$$

$P_{(x)} = -0.6_{(100)}^2 + 95_{(100)} - 2000$

$P_{(100)} = 1500$

- عدد الوحدات اللازم لتحقيق ربح قدرة ١٠٠٠ ريال

$P_{(x)} = -0.6x^2 + 95x - 2000 = 1000$

$P_{(x)} = -0.6x^2 + 95x - 3000 = 0$

$$P(x) = -0.6x^2 + 95x - 3000 = 0$$

$$a = -0.6 \qquad b = 95 \qquad c = -3000$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-95 \pm \sqrt{9025 - 4(-0.6)(-3000)}}{2(-0.6)}$$

$$x = \frac{-95 \pm 42.72}{-1.2}$$

$$x = \frac{-95 - 42.72}{-1.2} = 114.76$$

$$x = \frac{-95 + 42.72}{-1.2} = 43.56$$

المحاضرة التاسعة

الأسس

سبق وان درسنا قاعدة هامة:

١ – إذا اتحدت الأساسات فأنة عند الضرب تجمع الأسس

٢ – عند القسمة إذا اتحدت الأساسات تطرح الأسس

مثال: أختصر المقدار التالى:

$$\frac{z^5 n^3 z^4}{n^2 z^2 n^3} = \frac{z^9 n^3}{z^2 n^5} = z^{9-2} n^{3-5} = z^7 n^{-2}$$

قاعدة هامة :

$$(x^n)^m = x^{n \times m}$$

مثال : $(2^5)^3 = 2^{5 \times 3} = 2^{15}$

مثال: اختصر

$$(x^5)^{-1} = x^{5\times -1} = x^{-5} = \frac{1}{x^5}$$

مثال: اختصر المقدار $\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3$

الحل:

$$\left(\frac{2ab^3}{3ba^2}\right)^3 = \frac{2^3a^3b^9}{3^3b^3a^6} = \frac{8}{27}a^{3-6}b^{9-3}$$

$$= \frac{8}{27}a^{-3}b^6 = \frac{8b^6}{27a^3}$$

مثال: اختصر المقدار $\sqrt[3]{27x^9}$

الحل:

$$\sqrt[3]{27x^9} = 27^{\frac{1}{3}}x^{\frac{9}{3}} = 3x^3$$

مثال: اختصر المقدار $\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}}$

الحل:

$$\sqrt{\frac{75m^3n}{3mn^3}} = \sqrt{25m^2n^{-2}} = 5mn^{-1} = \frac{5m}{n}$$

مثال :حل المعادلة التالية: $(x-1)^2 = 64$ ؟

الحل : بأخذ الجدر التربيعي للطرفين

$$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{64}$$
$$x - 1 = 8$$
$$x = 8 + 1 = 9$$

مثال :حل المعادلة التالية:

$$\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}} = 2$$

الحل : بتكعيب الطرفين

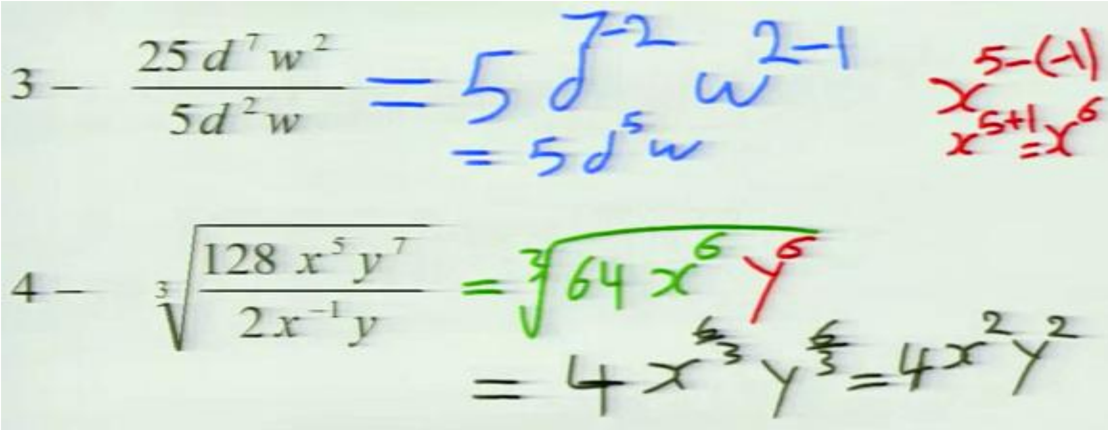
$$\left(\sqrt[3]{\frac{x+42}{x}}\right)^3 = (2)^3$$
$$\frac{x+42}{x} = 8$$
$$x + 42 = 8x$$
$$42 = 8x - x$$
$$42 = 7x$$
$$x = \frac{42}{7} = 6$$

تمارين :

اختصر المقادير التالية:

$$1- \left(\frac{2xy}{5xy^2}\right)^2 = \frac{2^2 \cancel{x^2} y^2}{5^2 \cancel{x^2} y^4} = \frac{4}{25} y^{-2}$$

$$2- \sqrt[3]{64 L^9 f^{-6}} = \sqrt[3]{64}\, L^{9/3} f^{-6/3}$$
$$= 4 L^3 f^{-2}$$



اللوغاريتمات

هي قوة الأس المرفوع لأساس معين

$10^3 = 1000$ لذلك يكون

$\log_{10} 1000 = 3$ الأس

الأساس 10

وكذلك $32 = 2^5$

$\log_{2} 32 = 5$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_{5} a = 3$

الحل : $a = 5^3 = 125$

مثال

أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_{2} x = 7$

الحل:

$128 = 2^7 = x$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_x 64 = 2$

الحل :

$$x^2 = 64$$

$$x^2 = 8^2$$

$$x = 8$$

مثال

أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_{32} u = \frac{1}{5}$

الحل:

$$2 = 32^{\frac{1}{5}} = x$$

مثال أوجد قيمة المجهول اذا كان $\log_a 256 = 4$

الحل:

$$a^4 = 256$$

$$a = (256)^{\frac{1}{4}}$$

$$a = 4$$

تمارين :

أوجد قيمة المجهول فيما يلي :

1- $\log_3 9 = t$

$9 = 3^t$

$3^2 = 3^t \Rightarrow t = 2$

2- $\log_a 81 = 2$

$81 = a^2$

$9^2 = a^2 \Rightarrow a = 9$

3- $\log_5 125 = k$

$125 = 5^k$

$5^3 = 5^k \Rightarrow 3 = k$

4- $\log_{49} x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = (49)^{3/2}$

$x = (7^2)^{3/2} = 7^3 = 343$

5- $\log_{81} r = \frac{3}{4}$

$r = (81)^{3/4} = (3^4)^{3/4} = 3^3 = 27$

6- $\log_{121} x = \frac{1}{2}$

$x = (121)^{1/2} = 11$

7- $\log_{625} 125 = g$

$125 = 625^g$

$5^3 = 5^{4g} \Rightarrow 3 = 4g$

$g = \frac{3}{4}$

قوانين اللوغاريتمات

- $\log x^n = n \log x$

مثال:

$$\log 5^4 = 4 \log 5$$

$$\log 8 = \log 2^3 = 3 \log 2$$

قانون :

- $$\log(x \times y) = \log x + \log y$$

مثال:

$$\log 20 = \log(5 \times 4) = \log 5 + \log 4$$

$$\log 42 = \log(6 \times 7) = \log 6 + \log 7$$

قانون :

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

مثال:

$$\log\left(\frac{35}{2}\right) = \log 35 - \log 2$$
$$= \log(7 \times 5) - \log 2$$
$$= \log 7 + \log 5 - \log 2$$

- هام جداً:

$$\log_a a = 1$$

$\log_5 5=1$ $\log_7 7=1$ $\log 10=1$

إذا لم يكتب الأساس تحت اللوغاريتم يكون 10

- مثال: أوجد قيمة المقدار

$$\log 2-\log 10+\log 5+2\log\sqrt{10}-\log 16+\log 4^2$$

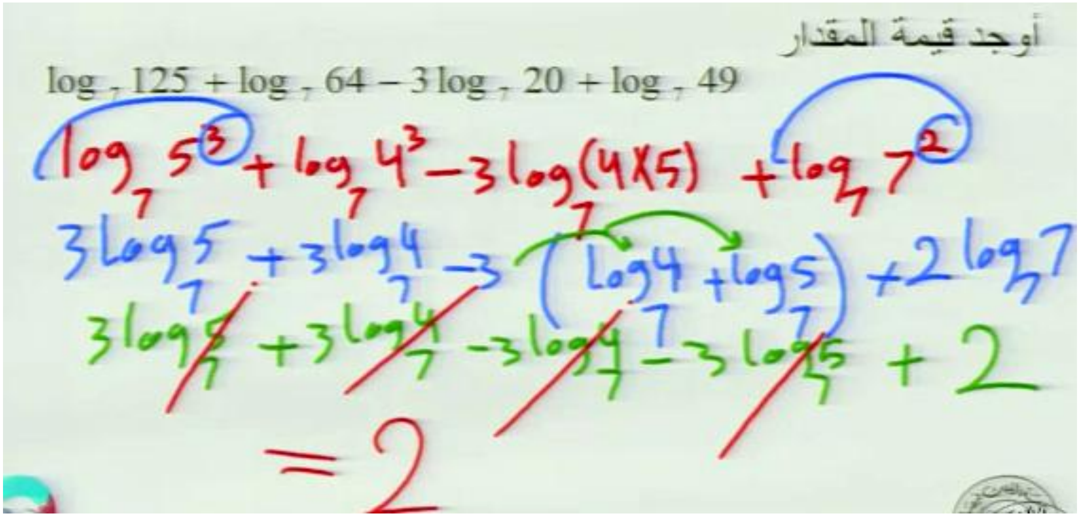
الحل:

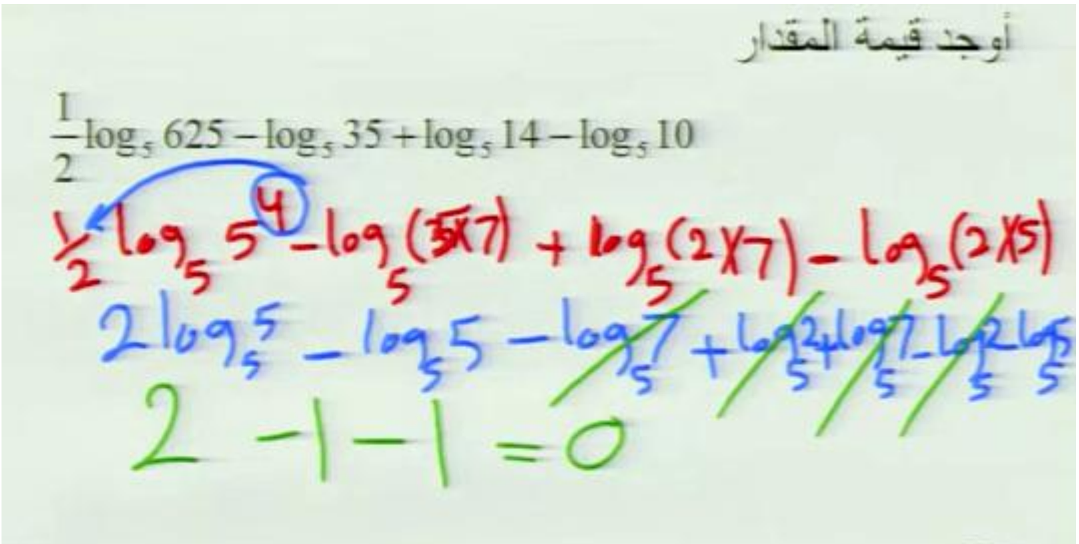
$$=\log 2-1+\log 5+2\log 10^{\frac{1}{2}}-\log 4^2+\log 4^2$$

$$=\log(2\times 5)-1+2\times\frac{1}{2}\log 10$$

$$=\log 10-1+\log 10$$

$$=1-1+1=1$$





المحاضرة العاشرة

التباديل والتوافيق

التباديل

- وهي تشير إلى عدد طرق ترتيب الأشياء. ويمز لها بالرمز **P**

فأذا كان لدينا **n** من الأشياء نريد ترتيبها **r** من الترتيبات فأن عدد طرق الترتيب هى $_nP_r$

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}P$$

$$_nP_r = n\,(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$$

مثال: اوجد قيمة $_5P_2$

$$P=5x4 = 20$$

مثال: أوجد قيمة $_6P_3$

$$P=6x5x4 = 120$$

- لاحظ أن $_nP_n= n!$

أى أن $_3P_3 = 3! = 3x2x1 = 6$

كما أن $5P5 = 5! = 5x4x3x2x1 = 120$

- مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة $_6P_2$ هي :

أ) 12 ب) 30 ج) 36 د) 15

الحل: $_6P_2 = 6x5 = 30$ الإجابة هي (ب)

- مثال أختار الإجابة الصحيحة:

قيمة $_6P_6$ هي :

(أ) 36 (ب) 26 (ج) !6 (د) 256

الحل $_6P_6 = 6!$ الإجابة هي ج

مثال: أتفقت 6 فرق رياضية على تكوين دورى خاص بها احسب عدد المباريات التى يتم لعبها؟

الحل: عدد المباريات $_6P_2 = 6x5 = 30$ 30 مباراة

مثال: بكم طريقة يمكن جلوس ٤ اشخاص على ٥ كراسي ؟

الحل عدد الطرق $5P4 = 5x4x3x2 = 120$ 120طريقة

التوافيق

- وتشير إلى عدد طرق الاختيار ويرمز لها بالرمز C

فأذا كان لدينا n من الأشياء ونريد أن نختار منها عدد r فأن عدد طرق الاختيار هى C حيث أن $_nC_r$

$$_nC_r = \frac{nPr}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\dots 3x2x1}$$

- مثال أوجد قيمة $_5C_2$ ؟

الحل : $_5C_2 = \frac{5x4}{2x1} = 20$

- مثال أوجد قيمة $_7C_4$ ؟

الحل : $_7C_4 = \frac{7x6x5x4}{4x3x2x1} = 35$

هام جداً

$_nC_n = 1$ .. $_6C_6 = 1$ .. $_8C_8 = 1$ .. $_{12}C_{12} = 1$ ..

$_nC_0 = 1$ .. $_4C_0 = 1$ .. $_7C_0 = 1$ .. $_{10}C_0 = 1$

$_nC_1 = n$ .. $_5C_1 = 5$ .. $_{11}C_1 = 11$ .. $_7C_1 = 7$

مثال: إدارة بها 12 موظف نريد أن نختار منهم 3 لتكوين لجنة أحسب عدد طرق الاختيار؟

الحل: عدد طرق الاختيار $= 220$ $\quad {}_{12}C_3 = \frac{12x11x10}{3x2x1}$

مثال: بفرض فى المثال السابق إذا نص على أن مدير الأدارة لابد من اختياره أحسب عدد طرق الاختيار ؟

الحل: عدد طرق الاختيار $= 55$ $\quad {}_{11}C_2 = \frac{11x10}{2x1}$

تمارين

اولاً– أوجد قيمة ما يلي :

١) ${}_8P_2 = 8x7 = 56$ ٢) ${}_5P_3 = 5x4x3 = 60$ ٣) ${}_7P_4 = 7x6x5x4 = 840$

٤) $3! = 3x2x1 = 6$ ٤) ${}_4P_4 = 4! = 4x3x2x1 = 24$ ٥) ${}_8C_2 = \frac{8x7}{2x1} = 28$

٦) ${}_9C_1 = 9$ ٧) ${}_7C_4 = \frac{7x6x5x4}{4x3x2x1} = 35$ ٨) ${}_6C_6 = 1$

ثانياً–

١ –اتفقت ١٠ فرق رياضية على تكوين دورى فيما بينها أوجد عدد المباريات التي يمكن لعبها؟

الحل : ${}_{10}P_2 = 10 \text{ x } 9 = 90$ 90 مباراة

٢ –إدارة بها ١٥ موظف نريد تكوين منهم لجنة مكونه من ثلاثة اوجد عدد طرق ؟

الحل : $455 = \frac{15x14x13}{3x2x1} = {}_{15}C_3$ 455 طريقة

وإذا نص على اختيار شخص معين (ننقص واحد من البسط والمقام)

$91 = \frac{14x13}{2x1} = {}_{14}C_2$ 91 طريقة

المحاضرة الحادي عشر

نظرية ذات الحدين

مثال : أوجد مفكوك $(x+3)^2$ ؟

الحل : سبق وأن درسنا أنه يمكن فك هذا المقدار باستخدام قاعدة الضرب

$$(x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

مثال : أوجد مفكوك $(x+3)^2$ ؟

نلاحظ هنا أن الأس ليس 2 وإنما هو 3 لذلك لا تصلح القاعدة السابقة و يتم إجراء الضرب للقوس في نفسه ثلاث مرات أو نطبق القاعدة ثم نضرب الناتج في القوس نفسه مرة أخرى وفى حالة الأس أكبر من هذا يكون الأمر أطول وأصعب لذا جاءت نظرية ذات الحدين لتحل لنا هذه المشكلة كما يتضح مما يلي : (النظرية)

$$(x+a)^n = nC0a^0x^n + nC1a^1x^{n-1} + nC2a^2x^{n-2} + \ldots + nCna^nx^0$$

مثال : أوجد مفكوك $(x+3)^2$ ؟

$$(x+3)^3 = 3C0(3)^0x^3 + 3C1(3)^1x^2 + 3C2(3)^2x^1 + 3C3(3)^3x^0$$

$$(x+3)^3 = x^3 + 9x^2 + 27x + 27$$

الحد العام لنظرية ذات الحدين هو

$$H_{r+1} = ncr(socand\ \mathrm{term})^{r}(first\ \ \mathrm{term})^{n-r}$$

دائماً r أقل من رتبة الحد بمقدار واحد . .

مثال :

أوجد الحد الخامس فى مفكوك $(x+3)^9$ ؟

الحل

$$H_{r+1} = ncr(socand \text{ term})^{\text{r}}(first \text{ term})^{\text{n-r}}$$

نجد أننا نريد H_5 لذلك $\text{r}=4$ $\quad n=9$

$$H_5 = 9c4(3)^4(x)^5 = 126\times 81x^5 = 10206x^5$$

مثال :

أوجد الحد الرابع فى مفكوك $(2x-5y)^7$ ؟

الحل

$$H_{r+1} = ncr(socand \text{ term})^{\text{r}}(first \text{ term})^{\text{n-r}}$$

نجد أننا نريد H_4 لذلك $\text{r}=3$ $\quad n=7$

$$H_4 = 7c3(-5y)^3(2x)^4 = 35\times -125y^3\times 16x^4$$
$$= -70000x^4y^3$$

الحد الأوسط

يتوقف الحد الأوسط على الأس اذا كان فردى أو زوجي .. الأس زوجى يكون رتبة الحد الأوسط $\frac{n+2}{2}$ أما اذا كان لدينا الأس فردى يوجد حدان أوسطان رتبتهما هى $\frac{n+3}{2}$ و $\frac{n+1}{2}$ ..

مثال :

مثال: أوجد الحد الأوسط فى مفكوك $(x-2)^{10}$ ؟

الحل

رتبة الحد الوسط هى $\frac{10+2}{2}=6$

نجد أننا نريد H_6 لذلك $\text{r}=5$ $\quad n=10$

$$H_6 = 10C5(-2)^5(x)^5 = 252\times -32\times x^5$$
$$= -8064x^5$$

الحد الخالي من س

أوجد الحد الخالي من x فى مفكوك $\left(x-\frac{4}{x}\right)^{12}$ ؟

الحل

$$H_{r+1}=12Cr\left(\frac{-4}{x}\right)^{r}(x)^{12-r}$$

$$=12Cr\ (-4)^{r}\ (x)^{-r}\ (x)^{12-r}$$

$$=12Cr\ (-4)^{r}\ x^{12-2r}$$

بما أننا نريد الحد الخالي من x لذلك نضع $12-2r=0$

$12=2r$ .. $r = 6$ أي هو الحد السابع

الحد الذي يحتوي على س٤

أوجد الحد الذى يحتوى على x^4 فى مفكوك $\left(x-\frac{4}{x}\right)^{12}$ ؟

الحل

$$H_{r+1}=12Cr\left(\frac{-4}{x}\right)^{r}(x)^{12-r}$$

$$=12Cr\ (-4)^{r}\ (x)^{-r}\ (x)^{12-r}$$

$$=12Cr\ (-4)^{r}\ x^{12-2r}$$

بما أننا نريد الحد الذى يحتوى على من x^4

لذلك نضع $12-2r=4$

$12-4 = 2r$ .. $8=2r$ … $r=4$ أي هو الحد الخامس

تمارين :

١- أوجد الحد السادس في مفكوك $(x+4)^{12}$ ؟

$$H_{r+1} = nC_r\,(\text{الثاني})^r\,(\text{الأول})^{n-r}$$

$$H_6 \to r = 5$$

$$H_6 = 12C_5\,(4)^5\,(x)^{12-5}$$

$$= 12C_5 \times 4^5\,x^7$$

٢- أوجد الحد الأوسط في مفكوك $(5x+y)^8$ ؟

رتبة الحد : $\frac{n+2}{2} = \frac{8+2}{2} = 5$

$$H_5 = 8C_4\,(y)^4\,(5x)^4$$

$$= 8C_4 \times 5^4\,y^4\,x^4$$

٣- أوجد الحد الخالي من x في مفكوك $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ ؟

$$H_{r+1} = 9C_r\left(\frac{-1}{x}\right)^r (x^2)^{9-r}$$

$$= 9C_r\,(-1)^r\,x^{-r}\,x^{18-2r}$$

$$= 9C_r\,(-1)^r\,x^{18-3r}$$

$$18 - 3r = 0$$

$$18 = 3r$$

$$r = \frac{18}{3} = 6$$

$\therefore H_7$ الحد السابع هو الخالي من x

4- أوجد الحد الذي يحتوي على x^3 في مفكوك $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9$ ؟

$$H_{r+1} = {}^9C_r(-1)^r x^{18-3r}$$

$$18-3r=3$$

$$18-3=3r$$

$$15=3r$$

$$r=\frac{15}{3}=5$$

$\therefore H_6$ الحد السادس

٥- أوجد مفكوك المقدار $(5x-2y)^4$ ؟

$$= {}^4C_0 (-2y)^0 (5x)^4$$

$${}^4C_1 (-2y)^1 (5x)^3$$

$${}^4C_2 (-2y)^2 (5x)^2$$

$${}^4C_3 (-2y)^3 (5x)^1$$

$${}^4C_4 (-2y)^4 (5x)^0$$

المحاضرة الثانية عشر

المتواليات

سيتم تدريس:

١– المتواليات العددية (الحسابية)

٢– المتواليات الهندسية

اولاً– المتواليات العددية

يطلق على متسلسلة الأعداد التي يكون الفرق فيها بين أى حد والحد السابق له مباشرة مقدار ثابت المتوالية العددية .. فمثلاً– ٢، ٥ ، ٨ ، ..

يطلق عليها المتوالية العددية حيث أن

٨–٥ = ٣

٥–٢ = ٣

الفرق الثابت يسمى أساس المتوالية ويرمز له بالرمز "d"

الرموز المستخدمة:

a **الحد الأول**

d **أساس المتوالية (الفرق الثابت)**

L **الحد الأخير**

H_n **الحد العام**

S_n **مجموع المتوالية**

القوانين المستخدمة

الحد العام

$$H_n = a + (n-1)d$$

مجموع المتوالية يمكن إيجاده بطريقتين:

١– بمعلوميه الحد الأخير

$$S_n = \frac{n}{2}(a + L)$$

٢– بمعلوميه أساس المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

مثال

فى المتوالية التالية ٣ ، ٧ ، ١١ ، ... أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الخامس ؟

٤- الحد التاسع ؟

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل

بما أن $4 = 11-7$ و $7-3=4$

أذن الفرق مقدار ثابت

١- نوع المتوالية : متوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d=4$

٣- الحد الخامس $H5 = a + 4d$

$H5 = 3 + 4(4) = 19$

٤- الحد التاسع $H9 = a + 4d$

$H9 = 3 + 4(8)$

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}\,(2a + (n-1)\,d)$$

$$S_n = \frac{10}{2}\,(2x3 + 9x4) = 5(6 + 36) = 210$$

مثال متوالية حدودها 70، 65 ، 60، .... ،25

١- حدد نوع المتوالية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد السادس ؟

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

٥- عدد حدود المتوالية ؟

الحل:

١- بما أن 5- = 65-70 .. 5-=65-70

أذن الفرق مقدار ثابت أى أن المتوالية عددية

٢- أساس المتوالية $d = -5$

٣- الحد السادس $H6 = a + 5d$

$$H6 = 70 + 5(-5) = 45$$

٤- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)\,d\right)$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}\left(2x70 + 9x-5\right)$$

$$=5(140 - 45) = 5 \text{ x } 95 = 475$$

٥- عدد حدود المتوالية

$$L = a + (n-1)d = 25$$

$$= 70+(n-1)x -5 = 25 \qquad = 70 - 5n + 5 = 25 \qquad = 70+5-25=2n$$

$$50=2n \qquad n = 10$$

مثال

متوالية عددية مجموعها 864 وحدها الأول 9 وحدها الأخير 99 أوجد عدد حدود المتوالية وأساس المتوالية؟

الحل : إيجاد عدد حدود المتوالية $S_n = \frac{n}{2}(a + L)$

$$864 = \frac{n}{2}(9+99)$$

$$864 = 54n \qquad n = \frac{864}{254} = 16$$

إيجاد أساس المتوالية بما أن عدد الحدود 16يكون الحد الأخير هو H_{16}

$$H_{16} = L = a + 15d = 99$$

$$= 9+15xd = 99$$

$$= 15d = 90 \qquad d = 6$$

مثال :متوالية عددية حدها الثانى 8 و حدها الخامس 25 أوجد حدها العاشر ومجموع العشرين حداَ الأولى منها ؟

الحل :

$$H_5 = a + 4d = 23$$

$$H_2 = a + d = 8$$

$$3d = 15 \qquad d = 5$$ بطرح المعادلتين فإن

بالتعويض فى أى معادلة لإيجاد قيمة الحد الأول

$$a+d = 8 \qquad a+5=8 \qquad a= 3$$

$$H10 = a + 9d \quad = \quad 3 + 9(5) \quad = 48$$ الحد العاشر

مجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية

$$S_n = \frac{n}{2}\,(2a + (n-1)\,d)$$

$$S_n = \frac{20}{2}\,(2x3 + 19x5)$$

$$= 10\,(6 + 95) = 10 \text{ X } 101 = 1010$$

مثال : متوالية عددية مكونة من خمس حدود ومجموع حديها الثاني والرابع ٥٢ ومجموع حديها الثالث والخامس ٦٦ أوجد المتوالية ؟

الحل : مجموع الحدين الثاني والرابع = ٥٢

$$H_2 + H_4 = a + d + a + 3d$$

$$= 2a + 4d = 52 \quad (1)$$

مجموع الحدين الثالث والخامس

$$H_3 + H_5 = a + 2d + a + 4d$$

$$= 2a + 6d = 66 \quad (2)$$

بطرح المعادلة الأولى من الثانية يكون الناتج

$$2d = 14 \qquad d = 7$$

إيجاد الحد الأول للمتوالية : يتم التعويض في المعادلة الأولى :

$$2a + 4d = 52$$

$$2a + 4(7) = 52$$

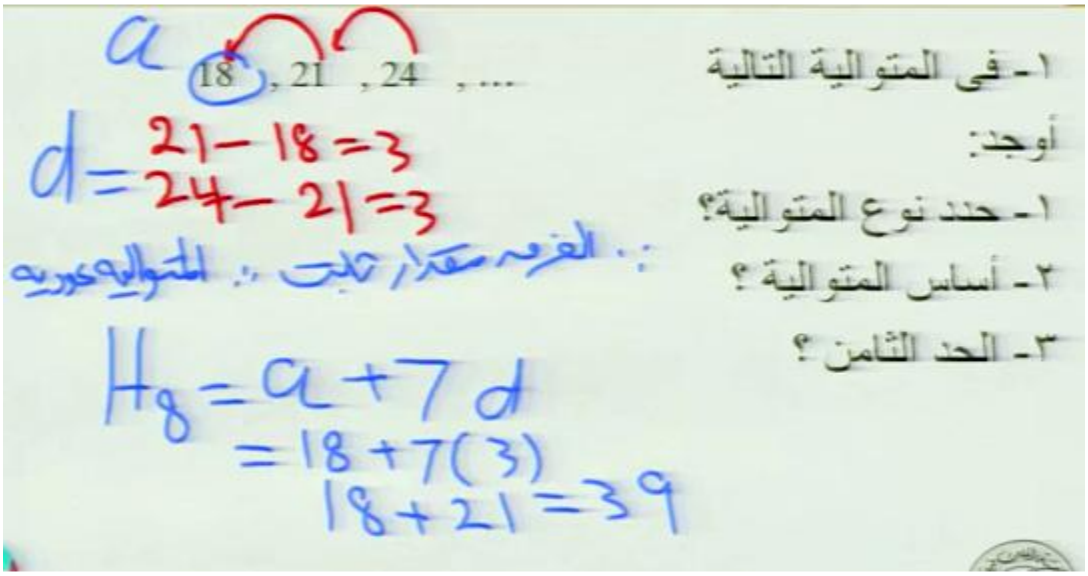
$$2a + 28 = 52$$

$$2a = 52 - 28 \qquad 2a = 24 \qquad a = 12$$

وبذلك تكون المتولية هي

12.19.26.33.40

تمارين



١- فى المتوالية التالية

a 18 , 21 , 24 , ...

أوجد:

١- حدد نوع المتوالية؟

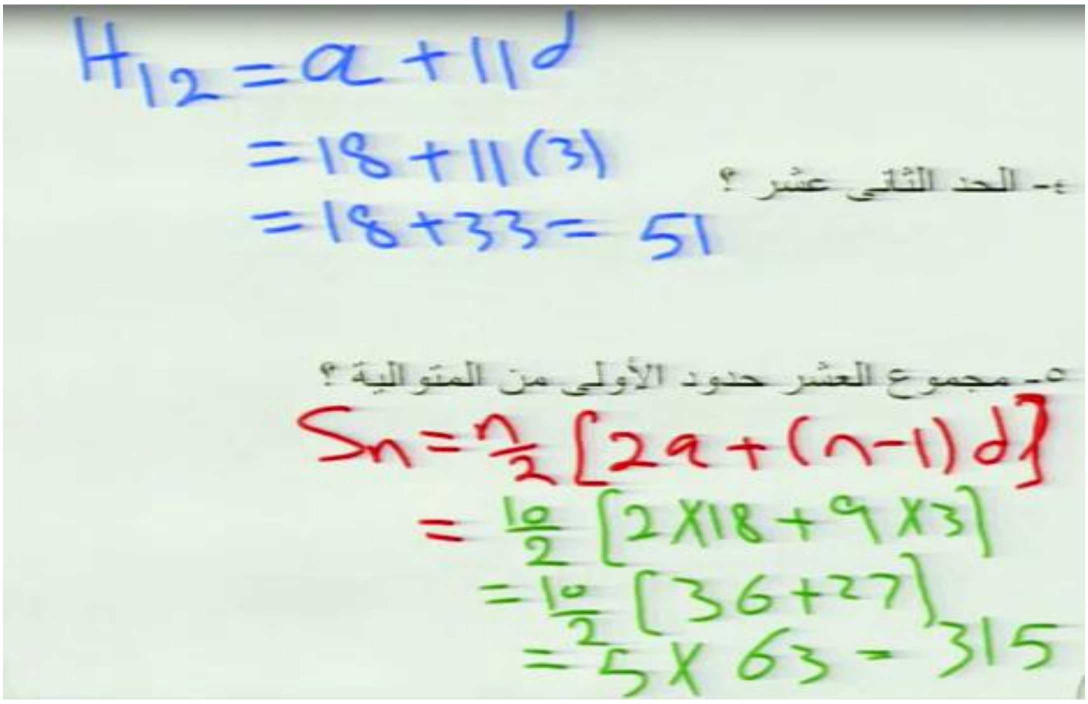
٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد الثامن ؟

$$d = \begin{matrix} 21 - 18 = 3 \\ 24 - 21 = 3 \end{matrix}$$

∴ الفرق مقدار ثابت ∴ المتوالية عددية

$$H_8 = a + 7d$$
$$= 18 + 7(3)$$
$$18 + 21 = 39$$



٤- الحد الثاني عشر ؟

$$H_{12} = a + 11d$$
$$= 18 + 11(3)$$
$$= 18 + 33 = 51$$

٥- مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$= \frac{10}{2}[2 \times 18 + 9 \times 3]$$
$$= \frac{10}{2}[36 + 27]$$
$$= 5 \times 63 = 315$$

٢- فى المتوالية التالية $\underset{a}{86}, 82, 78, \ldots$

أوجد:

$$d = \begin{cases} 82 - 86 = -4 \\ 78 - 82 = -4 \end{cases}$$

١- حدد نوع المتوالية؟ عددية حسابية

٢- أساس المتوالية ؟

٣- الحد العاشر ؟

$$H_{10} = a + 9d$$
$$= 86 + 9(-4)$$
$$= 86 - 36 = 50$$

٤- الحد الثانى عشر ؟

$$H_{12} = a + 11d$$
$$= 86 + 11(-4)$$
$$86 - 44 = 42$$

٥- مجموع العشرين حداً الأولى من المتوالية ؟

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$
$$S_{20} = \frac{20}{2}[2 \times 86 + 19 \times -4]$$
$$= 10[172 - 76]$$
$$10(96) = 960$$

$L = H_{11} = a + 10d$

$5 + 10d = 35$

$10d = 35 - 5$

$10d = 30$

$d = \frac{30}{10} = 3$

٣- متوالية حسابية حدها الاول = 5و حدها الاخير = 35

و مجموعها 220 فماهو عدد حدودها وأساسها؟

$a = 5 \quad L = 35 \quad S_n = 220$

$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

$220 = \frac{n}{2}[5 + 35]$

$220 = \frac{n}{2} \times 40$

$220 = 20n$

$n = \frac{220}{20}$

$\boxed{n = 11}$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2 \times 77 + 9 \times -9]$$

$$5[154 - 81] = 5 \times 73$$

$$= 365$$

٤- متوالية عدديه حدها الثانى 68 وحدها الرابع 50 أوجد المتوالية ومجموع العشر حدود الأولى منها؟

$$H_4 = \cancel{a} + 3d = 50$$

$$H_2 = -\cancel{a} \mp 1d = -68$$

$$2d = -18$$

$$d = \frac{-18}{2}$$

$$d = -9$$

$$a + d = 68$$

$$a - 9 = 68$$

$$a = 68 + 9$$

$$\boxed{a = 77}$$

77, 68, 59, 50, ..

٥- متوالية حسابية مكونه من اربع حدود وكان مجموع الحدين الأول والرابع=70 ومجموع الحدين الثانى والثالث = 70 أوجد المتوالية؟

$$a, \ a + d, \ a + 2d, \ a + 3d$$

$$a + a + 3d = 70$$

$$\boxed{2a + 3d = 70} \longrightarrow (1)$$

$$a + d + a + 2d = 70$$

$$\boxed{2a + 3d = 70} \longrightarrow (2)$$

عدد المجاهيل أكبر عدد المعادلات ..
عدد لانهائي من الحلول ولا يمكن حصر المتوالية

المحاضرة الثالثة عشر

المتوالية الهندسية

يطلق علي متسلسلة الأعداد التى يكون خارج قسمة أى حد فيها على الحد السابق له مباشرة مقدار ثابت بالمتوالية الهندسية.

الرموز المستخدمة

a الحد الأول

r أساس المتوالية

S_n مجموع n من الحدود

S_∞ مجموع المتوالية إلى ما لانهاية

القوانين المستخدمة

الحد العام $\quad H_n = a\ r^{n-1}$

مجموع عدد معين من الحدود

$$S_n = \frac{a\ (r^n - 1)}{r - 1}$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$S_\infty = \frac{a}{1 - r}$$

مثال: فى المتوالية 4 ، 8 ، 16 ،... أوجد الحد العاشر ومجموع العشر حدود الأولى من المتوالية ؟

الحل:

نجد أن $\quad 2 = \frac{16}{8} = \frac{8}{4}$

أذن المتوالية هندسية وأساسها $\quad r = 2$

الحد العاشر $\quad H_{10} = a\, r^9$

$= 4(2)^9 = 2048$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية.

$$Sn= (a\ (r^{n-1})\ )/(r-1)$$

$$S10= (4\ (2\ 10^{-1})\ )/(2-1) = 4092$$

مثال : متوالية هندسية حدها الأول 5 وأساسها 3− أوجد الحد السادس ومجموع الثمان حدود الأولى منها؟

الحل : $r=-3$ $a = 5$

الحد السادس $= 5\ (-3)^5 = -1215$ $H6=ar^5$

مجموع الثمان حدود الأولى من المتوالية هو

$$Sn= \frac{a\ (rn-1)}{r-1}$$

$$Sn= (5\ ((-3)^{8-1})\ )/(-3-1) = -8200$$

مثال : متوالية هندسية حدها الرابع 448 وحدها السادس7168 أوجد المتوالية ؟

الحل : $H6 = ar^5 = 7168$

$$H4 = ar^3 = 448$$

بقسمة المعادلتين ينتج أن

$$r^2 = 16 \qquad r=\sqrt{16} = 4$$

بالتعويض في المعادلة الأولى نجد أن :

$$H6 = ar^5 = a(4)^5 = 7168$$

$$1024a = 7168$$

$$a = \frac{7168}{1024} = 7$$

المتوالية هي 7.28.112.448....

مثال: فى المتوالية 729 ، 243 ، 81 ، .... أوجد الحد الثامن و مجموع العشر حدود الأولى ومجموع المتوالية إلى ما لانهاية ؟

الحل: نجد أن خارج قسمة أى حد على السابق له مقدار ثابت لذلك هى متوالية هندسية

أساسها $r = \frac{243}{729} = \frac{81}{243} = \frac{1}{3}$

الحد الثامن $H_8 = ar^7 = 729\ (\frac{1}{3})^7 = \frac{1}{3} = 0.333$

مجموع العشر حدود الأولى من المتوالية

$$S_{10} = \frac{729(\left(\frac{1}{3}\right)^{10} - 1)}{\frac{1}{3} - 1}$$

$$= \frac{-728.9876}{-0.6666} = 1093.5$$

مجموع المتوالية إلى مالانهاية

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{729}{1-\frac{1}{3}}$$

$$= 1093.5$$

أوجد مجموع المتوالية 199 ، 99.-5 ، 75.49 ،... إلى ما لانهاية ؟

الحل $a = 199$ $r = \frac{49.75}{-99.5} = \frac{-99.5}{199} = \frac{-1}{2}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{199}{1+0.5} = 132.66$$

المحاضرة الرابعة عشر

المحددات و المصفوفات

أولاً– المحددات

المحدد من الرتبة الثانية يكون على الصورة التالية

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ويمكن الحصول على قيمة المحدد = (a11 x a22) – (a12 x a 21)

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٨ & ٧ \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = (٥ x ٨) – (٣ x ٧)

= ٤٠ – ٢١ = ١٩

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = (-٣ x ٤) – (٦ x -١)

= -١٢ + ٦ = -٦

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -١٢ & ٤ \\ -٣ & -٢ \end{vmatrix}$$

الحل:

قيمة المحدد = (-١٢ x -٢) - (-٣ x ٤)

= ٢٤ + ١٢ = ٣٦

استخدام المحددات فى حل المعادلات

باستخدام المحددات حل المعادلات التالية :

$$5x + 2y = 19$$

$$4x - y = 10$$

الحل : حتى يمكن إيجاد قيمتى كلاً من x و y يتم حساب

Δy و Δx وΔص كما يلى :

Δ ويحتوى على معاملات x و y

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} = (٥ \text{ x} -١) - (٤ \text{x} ٢)$$

= -٥ - ٨ = -١٣

Δx ويتم أستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلى:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} ١٩ & ٢ \\ ١٠ & -١ \end{vmatrix} = (١٩\text{x} -١) - (١٠\text{x} ٢)$$

$= -19 - 20 = -39$

Δy ويتم أستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلي:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = (5 \times 10) - (4 \times 19)$$

$= 50 - 76 = -26$

وبالتالي يمكن الحصول على قيمة x و y كما يلي :

$x = \Delta x / \Delta = -39 / -13 = 3$

$y = \Delta y / \Delta = -26 / -13 = 2$

مثال: حل باستخدام المحددات المعادلات التالية :

$$7x + 3y = 2$$

$$4x - 2y = 10$$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (7 \times -2) - (4 \times 3)$$

$= -14 - 12 = -26$

Δx يتم إستبدال معاملات x بقيم النواتج كما يلي :

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -10 & -2 \end{vmatrix} = (2 \times -2) - (-10 \times 3)$$

= -٤ +٣٠ = ٢٦

Δy يتم إستبدال معاملات y بقيم النواتج كما يلي :

$$y\Delta = \begin{vmatrix} ٧ & ٢ \\ ٤ & ١٠- \end{vmatrix} = (٧x -١٠) -(٤x ٢)$$

= -٧٠ -٨ = -٧٨

وبالتالي يمكن الحصول على قيمة س و ص كما يلي :

$x= x\Delta / \Delta$ = ٢٦/ -٢٦ = -١

$y= y\Delta / \Delta$ = -٧٨/ -٢٦ = ٣

المحددات من الرتبة الثالثة

مثال أوجد قيمة المحدد
$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 6 & 4 & 1 \\ -3 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

حتى يمكن إيجاد قيمة هذا المحدد يتم استخدام عناصر الصف الأول كما يلى: قيمة المحدد =

$$= 2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -3 & 8 \end{vmatrix}$$
$$= 2(36-8)+5(54+3)+7(48+12)$$
$$= 2(28)+5(57)+7(60)$$
$$= 56+285+420 = 761$$

ثانياً– المصفوفات

يتم التركيز على العمليات الجبرية للمصفوفات كما يلى :

إذا كان

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

أوجد

$1 - g' \ , \ h'$

$2 \quad g + h$

$3 - \ 2g + h$

$4 - gh$

$5 - g^{-1}$

الحل: يمكن الحصول على g', h' بتبديل الصفوف لأعمدة والأعمدة إلى صفوف كما يلي:

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$g' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad h' = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 12 \end{bmatrix}$$

٢- $g + h$ يتم جمع كل رقم مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة الأخرى كما يلى

$$g + h = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 6 \\ 3 & 18 \end{bmatrix}$$

٣- $2g + h$ يتم ضرب كل عنصر فى $2 \times g$ ثم جمع الناتج مع الموجود فى نفس مكانه من المصفوفة h كما يلى

$$2g + h = \begin{bmatrix} 10 & 14 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 13 \\ -1 & 24 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

٤- gh يتم ضرب عناصر الصفوف فى المصفوفة g x عناصر أعمدة المصفوفة h ثم جمع الناتج كما يلي

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \qquad , h\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 5\times3+7\times7 & 5\times-1+7\times12 \\ -4\times3+6\times7 & -4\times-1+6\times12 \end{bmatrix}$$

$$gh = \begin{bmatrix} 64 & 79 \\ 30 & 76 \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة

٥- يرمز إلى مقلبو بالمصفوفة ك بــ g^{-1} حيث أن

مقلوب المصفوفة = $\frac{١}{\text{المحدد}}$ x مصفوفة المرافقات المبدلة

$$g = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_g = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -4 & 6 \end{vmatrix} = (5\times6) - (7\times -4)$$
$$= 58$$

ويمكن الحصول على مصفوفة المرافقات المبدلة :

تبديل أماكن عناصر القطر الرئيسى

تبديل أشارات عناصر القطر الأخر

مصفوفة المرافقة المبدلة = $\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

مقلوب المصفوفة

$$g^{-1} = \frac{1}{58}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

النهاية

تمت وبحمدالله بعد جهد

أتمنى للجميع التوفيق والنجاح

والحرص كل الحرص على متابعة المحاضرات وحل التمارين وفهم المقرر

كي تحصل على ماتريد وعدم الاعتماد على الملخص فقط دون فهم المقرر

مبادئ الرياضيات (١)

د . أسامة حنفي

جامعة الملك فيصل

أخوكم : @ABOD_05