المحاضرة الخامسة – الأسبوع الثالث

الفصل الثاني: المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية المنفصلة

- **مقدمة**

في كثير من الأحيان تكون نتائج تجربة ما قياسات وصفية أو نوعية، مثل الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقط مرة واحدة إما H **وإما** T وهي قياسات نوعية أما في تجربة إلقاء حجر نرد فتكون النتائج الأعداد من 1 **إلى** 6 وتكون النتائج في هذا الفضاء العيني نتائج قياسية (كميات عددية). وفي جميع هذه الأنواع من التجارب التي تكون النتائج فيها قياسات نوعية أو قياسات كمية فإننا سنقوم بربط كل نتيجة من نتائج الفضاء العيني لتجربة إحصائية بقيمة عددية من خلال تعريف اقترانات حقيقية على نقاط فضاء العينة وبالتالي إعطاءنا المجال.

- **المتغير العشوائي Random Variable:**

تعريف: المتغير العشوائي X هو اقتران حقيقي يعرف على فضاء العينة بحيث يعين قيمة عددية لكل نتيجة بسيطة فيه، ويرمز له بحرف لاتيني كبير X, Y ... ولأي قيمة لذلك المتغير بحرف صغير x, y ...

مثال: عرف المتغير العشوائي X والذي يمثل عدد مرات ظهور الصورة H **في تجربة القاء قطعة نقد ثلاث مرات؟**

الحل:

عناصر الفضاء العيني	قيمة X
HHH	3
HHT	2
HTH	2
HTT	1
TTT	0
TTH	1
THT	1
THH	2

نلاحظ أن كل نتيجة بسيطة من عناصر الفضاء العيني تأخذ قيمة واحدة معينة حيث البعض منها يتشابه في ذلك العدد وبذلك نستطيع إعادة تنظيم النتائج السابقة علة الصورة التالية:

النتيجة	قيمة X
{HHH}	3
{THH, HTH, HHT}	2
{THT, TTH, HTT}	1
{TTT}	0

إن مجموعة القيم التي يأخذها المتغير العشوائي X **تسمى فضاء** X والمجموعات الجزئية لهذا الفضاء تسمى حوادث تعبر عنها بدلالة X. **ففي المثال السابق تكون الحوادث** {X=0} ,{X=2} ,{X=3}.

مثال: اعتماداً على المثال السابق عرف المتغيرات العشوائية التالية:

أ) المتغير العشوائي Y يمثل الفرق المطلق بين بين عدد H **وعدد** T؟

ب) المتغير العشوائي Z يمثل عدد H **ناقصاً عدد** T؟

الحل: أ)

الحادث المقابل	قيمة Y
{TTH, THT, THH, HTH, HTT, HTT}	1
{TTT, HHH}	3

ب)

الحادث المقابل	قيمة Z
{TTT}	-3
{HTT, THT, TTH}	-1
{HHT, HTH, THH}	1
{HHH}	3

- **أنواع المتغيرات العشوائية:**

ينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين:

1- **المتغير العشوائي المنفصل (Discrete):** وهو المتغير الذي يأخذ قيماً إما محدودة أو لا نهائية محدودة بمعنى أنه يمكن ربط قيمة واحداً لواحد مع مجموعة الأعداد الصحيحة. ومن الأمثلة عليه عدد أفراد الأسرة، عدد المواليد...

2- **المتغير العشوائي المتصل (Continuous):** وهو المتغير الذي يأخذ جميع القيم في فترة ما **ومن الأمثلة على ذلك**: درجة الحرارة، وزن الإنسان...

نلاحظ أن كل قيمة من قيم المتغير العشوائي X يقابله حادث أو مجموعة من الحوادث من فضاء العينة S وبالتالي يمكن تعيين احتمالاً لهذا الحادث بدلالة المتغير العشوائي مساوياً لاحتمال الحادث في فضاء العينة S. **والمثال** التالي يوضح ذلك.

مثال: في تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات حيث X **يمثل** عدد مرات ظهور الصورة H، **أوجد**:

1- P{X=3} 2- P{X=2}

الحل: 1- نلاحظ **أن** X=3 يقابل الحادث HHH **وبالتالي** $P(X=3) = \frac{1}{8}$

2- في حالة X=2 فنلاحظ أن الحوادث التي تقابل هذه القيمة هي {HHT, HTH, THH} **وبالتالي**

$$P(X=2) = \frac{3}{8}$$

ويمكننا وضع جدول يعطينا قيم X والاحتمالات المقابلة لها كما في الجدول التالي:

قيمة X	P(X=X)
3	
2	
1	
0	

تمرين: في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرتين، إذا كان المتغير العشوائي X يمثل مجموعة العددين الظاهرين، عرف ذل كالمتغير واحتمال كل منهما؟

الجدول السابق يقودنا إلى التعريف التالي:

- **التوزيع الاحتمالي المنفصل Discrete Probability Distribution:**

تعريف: كل جدول أو معادلة يعطي جميع القيم التي يمكن أن يأخذها متغير عشوائي منفصل مع احتمال كل قيمة منها يسمى توزيعاً احتمالياً **منفصلاً أو اقتران احتمالي**، بحيث يحقق الشرطين التاليين:

1- احتمال كل قيمة من قيم X عدد غير سالب.

2- مجموع الاحتمالات للقيم التي يأخذها X **تساوي** 1.

وإذا عبرنا بالرمز $f(x)$ **للاحتمال** P(X=x) فإن الشرطين السابقين يصبحان على الصورة:

لجميع قيم x , $f(x) \geq 0$

لجميع قيم x , $\sum f(x) = 1$

مثال: هل تمثل المعادلة $f(x) = \frac{x}{15}; x = 1, 2, 3, 4, 5$ لغير ذلك: $f(x) = 0$ توزيعاً احتمالياً منفصلاً؟

الحل: لاحظ أن الشرط الأول متحقق لجميع قيم X. أما مجموع قيم $f(x)$ فهي:

إذا: f(x) توزيع احتمالي حقق الشرطين الأول والثاني.

يمكن وضع المعادلة على شكل جدول على الصورة:

X	1	2	3	4	5	المجموع

مثال: أوجد قيمة a **في الجدول التالي** والتي تجعل ذلك الجدول يمثل توزيعاً احتمالياً واحسب احتمال X **أكبر من** 4 **واحتمل** X **أقل من أو تساوي** 4؟

x	1	2	3	4	5	6
	a					

الحل: بما أن $\sum f(x) = 1$ فإن:

$$a + \frac{1}{10} + \frac{3}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1$$

وبتوحيد المقامات نجد أن:

$$a = 1 - \frac{14}{20} = \frac{20}{20} - \frac{14}{20} = \frac{5}{20} = \frac{3}{10}$$

ولإيجاد احتمال X **أكبر من** 4:

أما لإيجاد احتمال X أقل من أو يساوي 4: