المحاضرة الرابعة

تابع نظرية الاحتمالات

قوانين ديمورغان :

وهي :

- $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

ومنها نستنتج :

- $P(\overline{A \cup B}) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
- $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$

+ مثال : إذا كان :

– $P(A) = 0.3$ – $P(B) = 0.4$ $P(A \cup B) = 0.5$

أوجد ما يلي :

١– احتمال حدوث الحادثين معاً .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = 0.7 - 0.5$$
$$= 0.2$$

٢– عدم حدوث الحادثين .

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B})$$
$$1-0.5$$
$$= 0.5$$

٣– عدم حدوث الحادث A أو الحادث B .

$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B})$$
$$1-0.2$$
$$= 0.8$$

٤– حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B.

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$
$$= 0.3 - 0.2$$
$$= 0.1$$

٥- حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A.

$$P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.4 - 0.2$$
$$= 0.2$$

٦- احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كانا حادثين منفصلين .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
$$= 0.3 + 0.4$$
$$= 0.7$$

الاحتمال الشرطي :

يعرف على أنه احتمال وقوع الحادث A مشروطاً بحدوث الحادث B .. ويرمز له بالرمز $P(A/B)$ ويعرف :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

وكذلك يمكن تعريف احتمال حدوث الحادث B مشروطاً بحدوث الحادث A .. ويعرف : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

+ مثال : رميت قطعة نقد ٣ مرات ، فإذا رمزنا لظهور الصورة بحرف H وظهور الكتابة بحرف T ، إذا علم أن الوجه الأول في الرمية الأولى H ، فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H,H ؟

الحل :

- الفضاء العيني S =

$$\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)\}$$

- نفرض أن A يمثل الحادث *ظهور الوجه الأول* .. - نفرض أن B يمثل *ظهور الوجهان الآخران*
- المطلوب $P(A/B)$.
- قانون الاحتمال : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
- بالنظر لفضاء العينة :

$$P(A) = \frac{4}{8}$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

- بالتعويض في قانون الاحتمال :

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

قاعدة الضرب :

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن :

- $P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A)$
- $P(A \cap B) = P(B)\ P(A/B)$

+ مثال : إذا كان :$P(A) = 0.6$ – $P(B) = 0.3$ – $P(A/B) = 0.4$ –

أوجد :

– $P(B/A)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.3+0.4}{0.6} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$$

– $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B/A)$$

$$= 0.6 \times 0.4 = 0.12$$

الحوادث المستقلة :

يقال بأن الحادثان A,B حادثان مستقلان إذا كان حصول أحدهما لا يؤثر على الآخر.

$$P(A/B) = P(A)$$

$$P(B/A) = P(B)$$

وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي : $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

نحصل على : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

+ مثال : إذا كان A,B حادثين مستقلين ، وكان $P(A) = 0.4$ و $P(B) = 0.6$

أوجد :

– $P(\overline{A \cap B})$

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$

$$= 1 - 0.24$$

$$= 0.76$$

– $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= 0.4 \times 0.5$$

$$= 0.24$$

+ مثال : إذا كان $P(A) = 0.6$ – $P(A/B) = 0.6$ – $P(B/A) = 0.5$ – هل الحادثان A,B مستقلان ؟

الحل :

بما أن $P(A/B) = P(A) = 0.6$ فإن الحادثان A,B مستقلان .

مع ذلك نجد أن $P(B) = P(B/A) = 0.5$

تمارين : إذا كان $P(B) = 0.8$ – $P(A) = 0.7$ –

أوجد ما يلي :

١- $P(AUB)$ إذا كانا حادثين مستقلين .

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0.8 + 0.7 - (0.8 \times 0.7)$$
$$= 0.94$$

٢- $P(AUB)$ إذا كانا حادثين منفصلين .

$$P(AUB) = P(A) + P(B)$$
$$= 0.8 + 0.7$$
$$= 1.5$$

٣- $P(\overline{A \cap B})$ إذا كانا حادثين مستقلين .

$$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$$
$$= 1 - (0.8 \times 0.7)$$
$$= 0.44$$

٤- $P(A/B)$ إذا كانا حادثين مستقلين .

$$P(A/B) = P(A)$$
$$= 0.7$$

٥- $P(B/A)$ إذا كانا حادثين منفصلين .

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$
$$= \frac{0}{0.7} = .44$$