الباب السابع: التوزيع الطبيعي

Chapter 7: The Normal Distribution

مقدمة:

- يعتبر التوزيع الطبيعي (أو المعتدل) من اهم و اشهر التوزيعات الاحتمالية لانه يصف معظم الظواهر الطبيعية مثل : درجة الحرارة ، مستوى الذكاء ، الوزن ، الطول ، درجات الطلبة ، ...
- كما ان التوزيع الطبيعي يستخدم كتقريب لكثير من التوزيعات الاحتمالية و لذلك يستخدم في مجالات عديدة من فروع الاحصاء و الاستدلال الاحصائي لكثير من البحوث الطبية و الاجتماعية وعلوم الفلك و الكثير من العلوم الاخرى

دالة التوزيع الطبيعي:

يُقال أن المتغير العشوائي X يتبع توزيعاً طبيعياً بالمعلمتين μ و σ^2 إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية هي

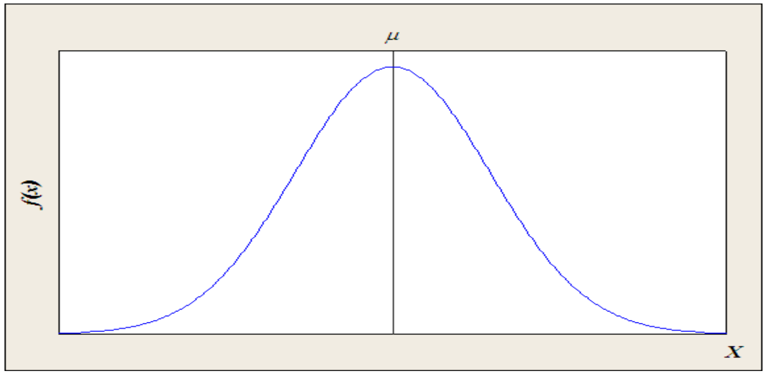
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], \qquad -\infty < x < \infty$$

حيث أن μ هي متوسط التوزيع

و σ^2 هي تباين التوزيع، وغالبا ما يكتب هكذا $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

ولرسم منحنى هذه الدالة نلاحظ أن المركز μ يناظر قمته الوحيدة. اي أن المنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي $x = \mu$

كما يتضح من **الشكل التالي.**

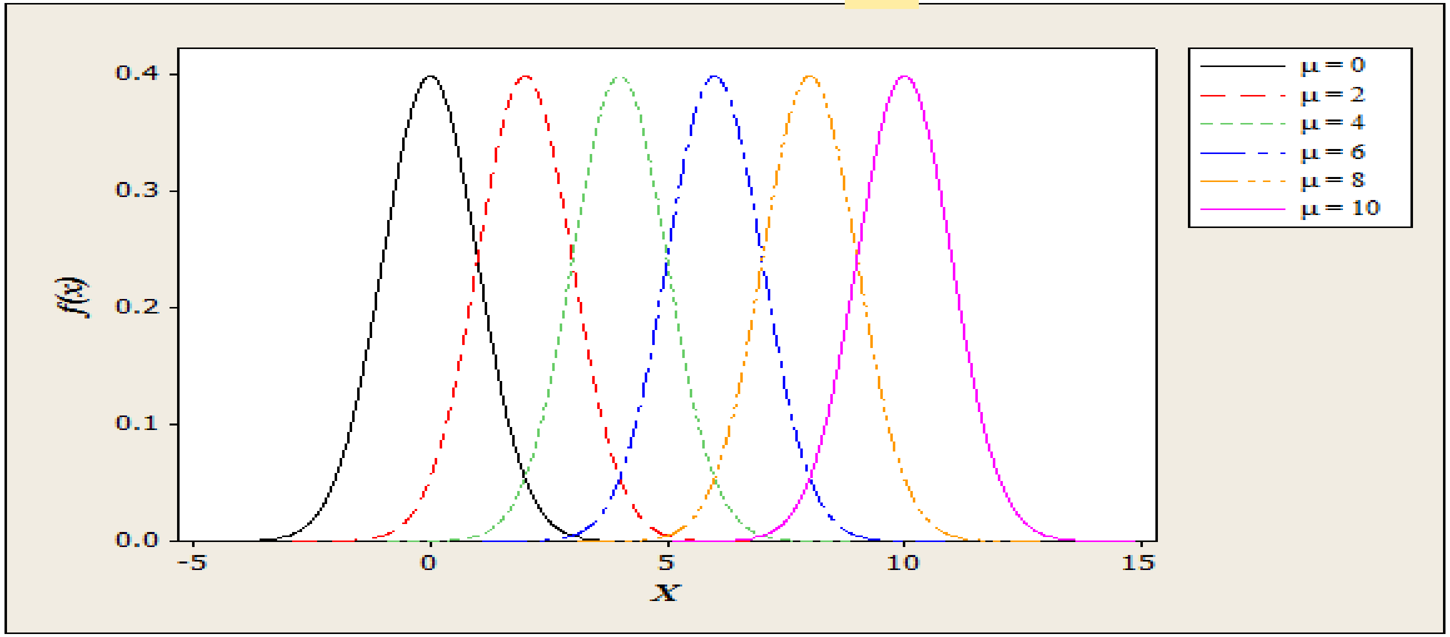


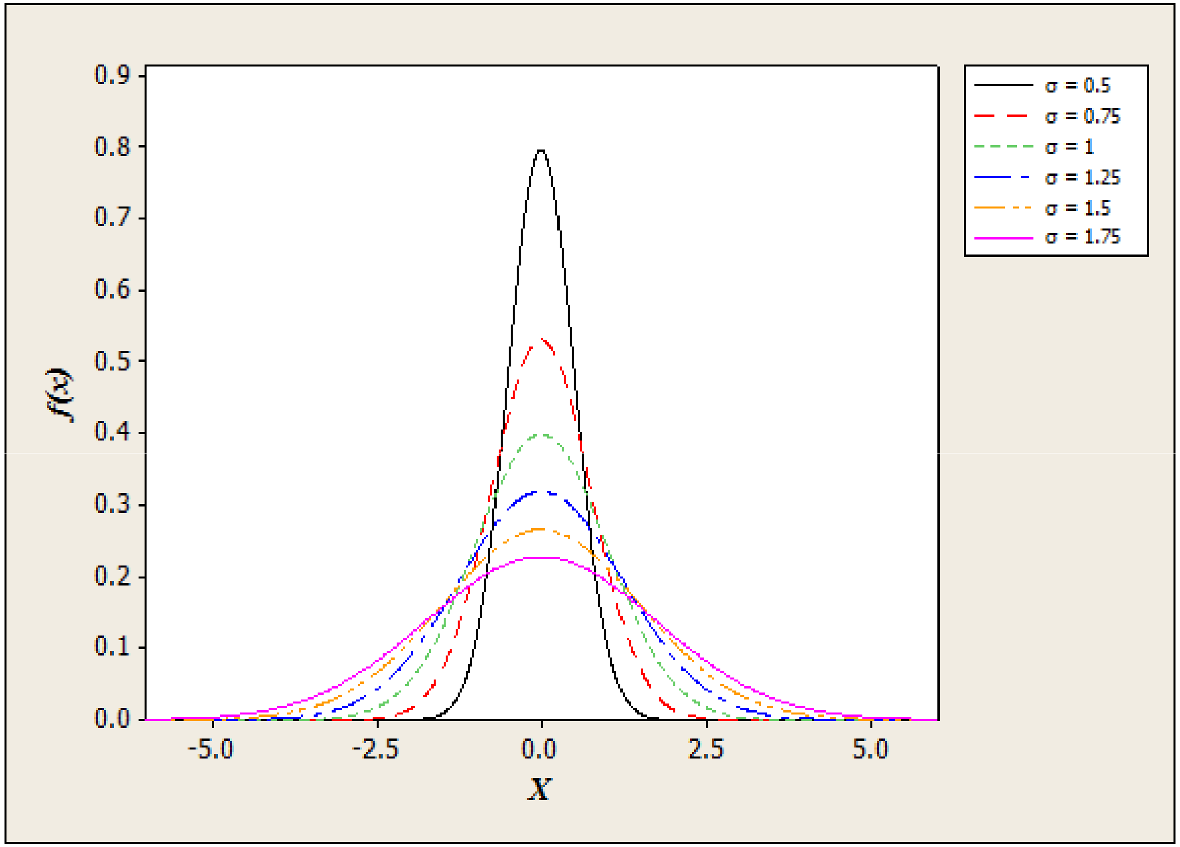
خواص التوزيع الطبيعي :

أولاً: معالم التوزيع الطبيعي

يعتمد التوزيع الطبيعي على معلمتين

- الأولى معلمة الموقع μ وهي التي تحدد موقع التوزيع عند ثبات قيمة σ
- الثانية معلمة القياس σ وهي التي تحدد مدى تباعد (تشتت) المنحنى حول المركز عند ثبات قيمة μ





0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
f(x)
-5.0
-2.5
0.0
2.5
5.0
X
σ = 0.5
σ = 0.75
σ = 1
σ = 1.25
σ = 1.5
σ = 1.75

خواص التوزيع الطبيعي:

ثانياً: منحنى التوزيع الطبيعي

- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح.
- منحنى التوزيع الطبيعي **ناقوسي الشكل** **(Bell-Shaped)** أي انه **متماثل** **(Symmetric)** حول المحور الرأسي المار بالنقطة $X = \mu$ وهي متوسط التوزيع، و عندها تقسم المساحة تحت المنحني إلى نصفين متماثلين، و بالتالي فهي **الوسيط**.
- للتوزيع **نهاية عظمى** عند النقطة $X = \mu$ أيضاً، و بالتالي تكون المنوال حيث أن للتوزيع الطبيعي قمة واحده تناظر المنوال.
- نستنتج أن المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الطبيعي يتميز بأن:

المنوال = الوسيط = الوسط = μ

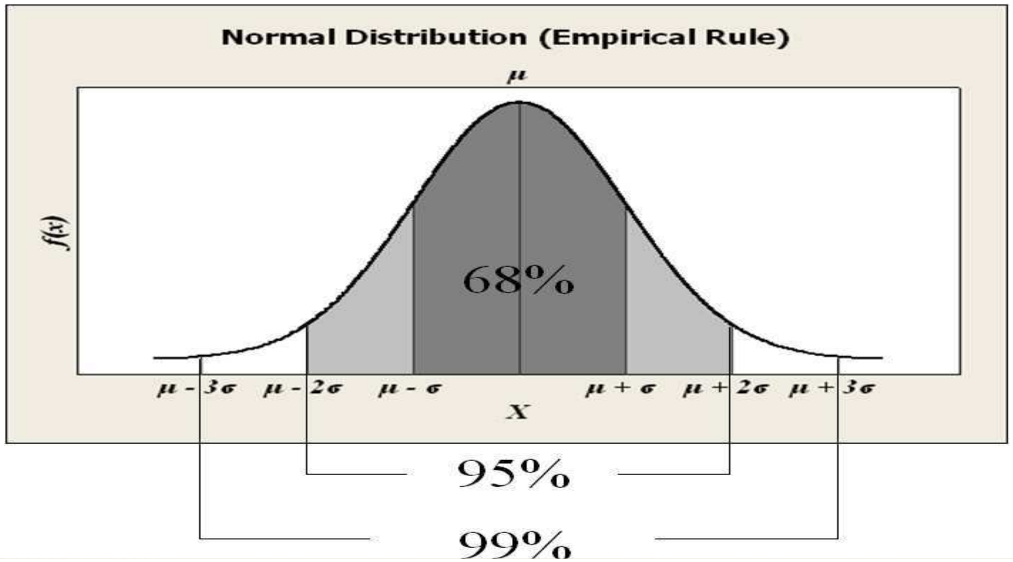
- التوزيع الطبيعي له **معامل التواء يساوي الصفر**
- منحنى التوزيع الطبيعي له نقطتي انقلاب عند $X = \mu \pm \sigma$

خواص التوزيع الطبيعي :

ثالثاً: القانون التجريبي للتوزيع الطبيعي

تنقسم المساحة تحت المنحنى الطبيعي حسب **القانون التجريبي (Empirical Rule)** إلى ثلاثة أقسام كما هو موضح بالجدول التالي وتتضح هذه النسب من خلال المساحات تحت المنحنى كما في الشكل المقابل للجدول:

المساحة التقريبية	تنحصر بين $\mu - k\sigma, \mu + k\sigma$	
تحت المنحنى	الطبيعي	الطبيعي القياسي
من المساحة الكلية68%	$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$	(-1, 1)
من المساحة الكلية95%	$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	(-2,2)
99.7% من المساحة الكلية	$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$	(-3,3)



التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري):

- المتغير المعياري $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ الذي **متوسطه صفر** $\mu = 0$ **وتباينه واحد** $\sigma^2 = 1$ يمثل الصورة القياسية للتوزيع الطبيعي والذي يطلق عليه اسم **التوزيع الطبيعي المعياري أو القياسي** (**Standard Normal Dist**)

وغالباً ما يُكتب هكذا $Z \sim N(0,1)$

- دالة كثافته الاحتمالية

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \qquad -\infty < z < \infty.$$

- يسمى هذا التوزيع بالتوزيع الطبيعي القياسي نظرا لأن كل توزيع طبيعي يمكن تحويله إلي هذا التوزيع وذلك بتحويل المتغير الفعلي X إلى المتغير القياسي Z وذلك عن طريق الصيغة التالية

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- وبذلك يكون التوزيع الطبيعي القياسي حالة خاصة من التوزيع الطبيعي المعتدل
- يطلق علي z لفظ الدرجة المعيارية Z-Score

7 – 1 – 2 : خواص التوزيع الطبيعي القياسي

- متوسط التوزيع الطبيعي القياسي $\mu = 0$ وتباينه $\sigma^2 = 1$
- المساحة تحت المنحنى الطبيعي القياسي تساوي **الواحد الصحيح**
- منحنى التوزيع الطبيعي القياسي **ناقوسي الشكل** **(Bell-Shaped)**
- أي انه **متماثل** **(Symmetric)** حول المحور الرأسي المار بالنقطة $Z = 0$ وهي متوسط التوزيع، و عندها تقسم المساحة تحت المنحني إلى نصفين متماثلين، وبالتالي فهي **الوسيط**
- للتوزيع نهاية عظمى عند النقطة $Z = 0$ أيضاً، و بالتالي تكون **المنوال** حيث أن للتوزيع الطبيعي القياسي قمة واحده تناظر المنوال.
- نستنتج أن المتغير العشوائي Z الذي يتبع التوزيع الطبيعي القياسي يتميز بأن:
  - **المنوال = الوسيط = الوسط = 0**
- التوزيع الطبيعي القياسي له **معامل التواء يساوي الصفر**
- منحنى التوزيع الطبيعي القياسي له نقتطتي انقلاب $Z = \pm 1$

خواص التوزيع الطبيعي القياسي:

تنقسم المساحة تحت المنحنى الطبيعي القياسي حسب **القانون التجريبي (Empirical Rule)** إلى ثلاثة أقسام كما هو موضح بالجدول التالي:

المساحة التقريبية تحت المنحنى الطبيعي القياسي	تنحصر بين
68 % من المساحة الكلية	(-1 , 1)
95 % من المساحة الكلية	(-2, 2)
99 % من المساحة الكلية	(-3, 3)

حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي

- تُحسب أي مساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي باستخدام جدول (Z) وهناك ثلاث خطوات رئيسية لحساب هذه المساحة في أي مسألة معطاة وهي كالتالي:

(١) ننظر إلى المتغير العشوائي في المسألة:

إذا كان المتغير X يتبع توزيع طبيعي عادي

أي أن $\mu \neq 0, \sigma \neq 1$

نحول X إلى Z بالتحويلة

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

إذا كان المتغير Z يتبع توزيع طبيعي قياسي

أي أن $\mu = 0, \sigma = 1$

لا نحتاج إلى تحويل ونتجه إلى الخطوة (٢) مباشرة

حيث :

μ= متوسط التوزيع الطبيعي العادي

σ= الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي العادي

وهما معطيان في المسألة

٢) ننظر إلى الإحتمال المطلوب في المسألة على أي صورة هو:

أشكال الاحتمالات

أقل من

$$P(Z \le a) = \Phi(a)$$

محصور بين قيمتين

$$P(a \le Z \le b) = P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

أكبر من

$$P(Z \ge a) = 1 - P(Z < a) = 1 - \Phi(a)$$

(٣) نوجد قيمة $\Phi(a)$ مباشرة من جدول z ثم نعوض بقيمتها في الخطوة رقم (٢) حسب المطلوب في المسألة

كيفية إيجاد قيمة $\Phi(a)$ من الجدول:

نفرض أن a=2.75 نقسم هذا العدد إلى قسمين كالتالي حيث أن

مجموعهما يعطي نفس القيمة a

القسم الأول هو: a1=2.70

ويتم البحث عنه في العامود الأول من اليسار في جدول التوزيع الطبيعي القياسي

القسم الثاني و هو: a2=0.05

ويتم البحث عنه في الصف الأول في جدول التوزيع الطبيعي القياسي

*يوجد لدينا جدولان للتوزيع الطبيعي القياسي أحدهما يوجد القيم الجدوليه في حالة كانت a قيمة سالبة والأخر في حالة كانت a قيمة موجبة.

وبأستخدام المثال السابق نوجد $\phi(a)$ عند القيم التالية

a=2.7
$\Phi(2.7)=0.9953$

a= 0,05
$\Phi(0.05)= 0.5199$

a = 2
$\Phi(2)=0.9772$

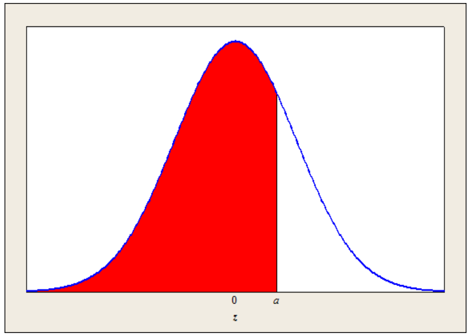
a= 0.7
$\Phi(0.7)= 0.7580$

ملاحظات مهمة:

جميع قيم الاحتمالات في الجدول محسوبة كلها على الصورة: $P(-\infty < Z < a)$ أو $P(-\infty \leq Z \leq a)$ أو $P(Z \leq a)$ أو $\Phi(a)$ سواء كانت قيمة a موجبة أو سالبة، وبالتالي فإن:

$$= \Phi(a) = P(Z \leq a)$$ **المساحة التي على يسار القيمة a تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري)**

*منحنى التوزيع الطبيعي القياسي متماثل حول الصفر وبالتالي ما يقال عن النصف الموجب ينطبق على النصف السالب.



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998

جدول التوزيع الطبيعي القياسي للقيم الموجبة للمتغير المعياري **Z**

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

جدول التوزيع الطبيعي القياسي للقيم السالبة للمتغير المعياري **Z**

حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي

لتوضيح طريقة إستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

1. $\Phi(0)=$
2. $P(Z<1.5)=$
3. $P(1<Z<2.4)=$
4. $P(Z>0.8)=$
5. $P(Z<-1.2)=$

حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي القياسي:

لتوضيح طريقة إستخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي:

1. $\Phi(0) = P(Z < 0) = 0.5000$
2. $P(Z < 1.5) = \Phi(1.5) = 0.9332$
3. $P(1 < Z < 2.4) = \Phi(2.4) - \Phi(1) = 0.9918 - 0.8413 = 0.1505$
4. $P(Z > 0.8) = 1 - \Phi(0.8) = 1 - 0.7881 = 0.2119$
5. $P(Z < -1.2) = \Phi(-1.2) = 0.1151$

$P(Z < -0.4) = 0.3446$

$P(Z < -0.27) = 0.3192$

$P(Z > -0.27) = 1 - 0.3192 = 0.6808$

تطبيقات علي الدرجة المعيارية والتوزيع الطبيعي:

الدرجة المعيارية (Z - Score)

هي درجة معيارية في توزيع متوسطه الحسابي يساو (صفراً) وانحرافه المعياري يساوي (1) وبذلك يمكن مقارنة الدرجة مع غيرها من الدرجات التي تنتمي لنفس التوزيع ، وذلك بحساب الدرجة المعيارية لكل منها ، ومن ثم يكون التفضيل في ضوء مقدار قيمة الدرجة المعيارية .

ويرمز **للدرجة المعيارية بالرمز *Z*** **وللدرجة الخام بالرمز *X*** ويتم تحويل X إلى Z كما ذكرنا سابقا بالتحويلة:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

مثال:

إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المفردات (50)والانحراف المعياري (10) فاوجدي:

١-الدرجة المعيارية الناظرة للدرجة الخام 60

٢-الدرجة المعيارية المناظرة للدرجة الخام 45

٣-الدرجة الخام المناظرة للدرجة المعيارية 1.5

الحل:

حسب المعطيات الوسط الحسابي =10، الانحراف المعياري = 60

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

١- $$Z = \frac{60 - 50}{10} = 1$$

٢- $$Z = \frac{45 - 50}{10} = -0.5$$

٣- $$1.5 = \frac{X - 50}{10} = X - 50 = 15 \Rightarrow X = 65$$

مثال:

طالب في الشعبة A في مادة الاحصاء 85 وطالب آخر في شعبة B علامته في الاحصاء 80 اذا علمت درجات كل من الشعبتين تتبع توزيع طبيعي متوسطها وانحرافها المعياري كما يلي:

١ الشعبة A: $\mu = 79\,, \quad \sigma = 6$

٢- **الشعبة B:** $\mu = 76\,, \quad \sigma = 2$

حدد أي الطالبتين أداؤه وتحصيلة أفضل في مادة الاحصاء مقارنة بزملائه

- الدرجة المعيارية للطالب الذي في الشعبة A $\quad Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{85-79}{6} = 1$

- الدرجة المعيارية للطالب الذي في الشعبة B $\quad Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{80-76}{6} = 2$

- ومن مفهوم الدرجة المعيارية نستنتج أن الطالب في الشعبة B أداؤه أفضل من طالب الشعبة A لأن الدرجة المعياريه له أعلي بالرغم من درجة الطالب في الشعبة Aوهي 85 أعلي من الطالب في الشعبة B وهي 80

أمثلة علي التوزيع الطبيعي وحساب المساحة تحت المنحنى:

مثال:

إذا كان دخل (1000)أسرة في مدينة ما يتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه(μ) 1800 ريال وانحرافه المعياري (σ) 300 ريال. أوجدي:

١. احتمال الحصول على دخل أسرة أكبر من 2400ريال.
٢. احتمال الحصول على دخل أسرة أقل من 2550ريال.
٣. احتمال الحصول على دخل أسرة ينحصر بين 1650 و2250 ريال.
٤. أوجد عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 1500ريال.

الحل:

- نفرض أن (X) هو دخل الأسرة.
- المتغير (X) متغير عشوائي مستمر يتبع توزيع طبيعي عادي بمتوسط (μ) يساوي1800 ريال ، وانحراف المعياري (σ) يساوي 300 ريال.

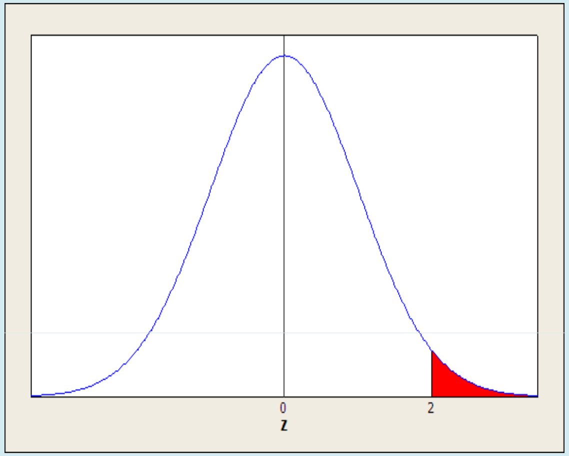
١- احتمال أن يكون دخل الأسرة أكبر من **2400** ريال.

$$P(X > 2400) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{2400-1800}{300})$$

$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$

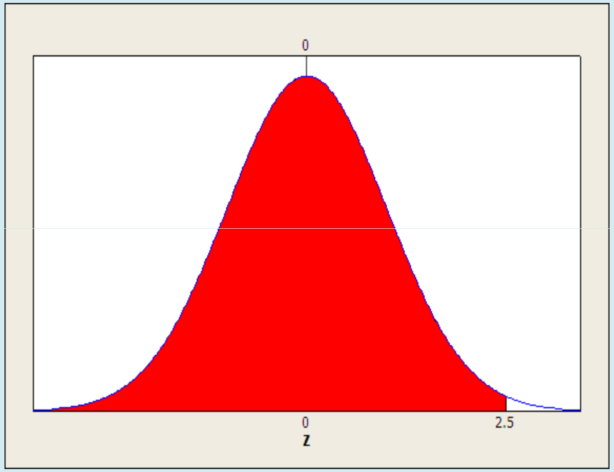
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 =$$

$$= 0.0228$$



٢-احتمال أن يكون دخل أسرة أقل من 2550ريال.

$$P(X<2550)=P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{2550-1800}{300})$$
$$=P(Z<2.5)=$$
$$=\Phi(2.5)=0.9938$$



٣-احتمال أن يكون دخل الاسرة ينحصر بين 1650 و 2250 ريال

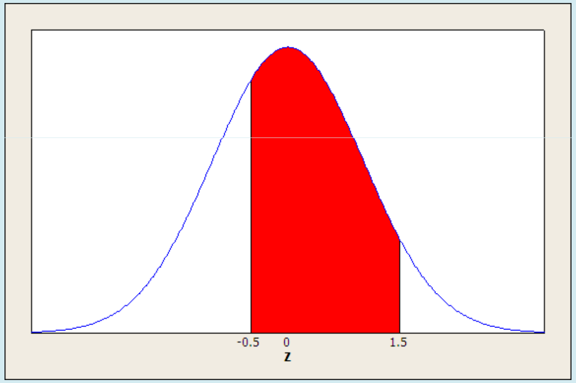
$$P(1650 < X < 2550) = P\left(\frac{1650-1800}{300} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{2550-1800}{300}\right)$$

$$= P(-0.5 < Z < 1.5)$$

$$= \Phi(1.5) - \Phi(-0.5)$$

$$= 0.9332 - 0.3085$$

$$= 0.6247$$



٤- عدد الأسر التي يزيد دخلها عن 1500ريال :

احتمال أن يزيد دخل الاسرة عن 1500ريال =(فقرة ٢) × عدد الأسر الكلي

$= 0.8413 \times 1000$

$= 841.3 \approx 841$ أسرة

توزيعات المعاينة:

مجتمع المتوسطات الحسابية للعينات:

يعتمد شكل ونوع التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية للعينات العشوائية على توزيع المجتمع الأصلي الذي اختيرت منه هذه العينات العشوائية ، والنظرية الآتية تعطي التوزيع الاحتمالي لمجتمع المتوسطات الحسابية للعينات العشوائية الكبيرة.

نظرية النهاية المركزية

إذا كان لدينا مجتمع غير محدود مفرداته (X) تتبع توزيعاً احتمالياً متوسطه μ وانحرافه المعياري σ. سحبنا من هذا المجتمع عينات عشوائية حجم كل منها (n)، وكانت (n) كبيرة الحجم ($n \geq 30$). فإن الوسط الحسابي $\bar{X}$ لهذه العينات يتبع تقريباً توزيعاً طبيعياً له الخصائص التالية:

$$\mu(\bar{X}) = \mu, \quad \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ملاحظة هامة:..

إذا كانت قيمة المعلمة σ مجهولة نستخدم قيمة الانحراف المعياري للعينة S بدلاً عنها كتقدير لها.

مثال:

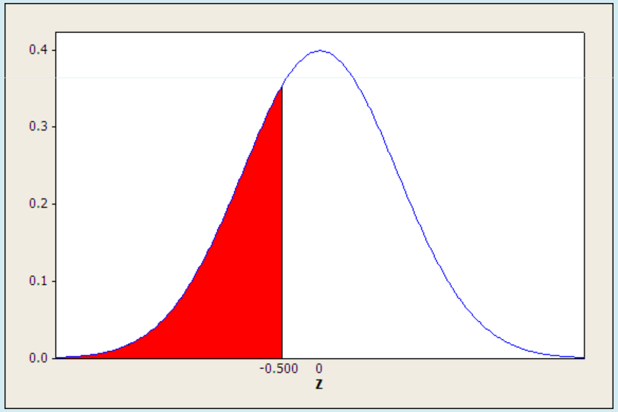
إذا كان بدل السكن المعطى للموظف شهرياً ضمن الراتب بإحدى الشركات يتبع

توزيعاً طبيعياً متوسطه μ (170)ريال وانحرافه σ (8) ريال

أجيبي عن الاسئلة التالية:

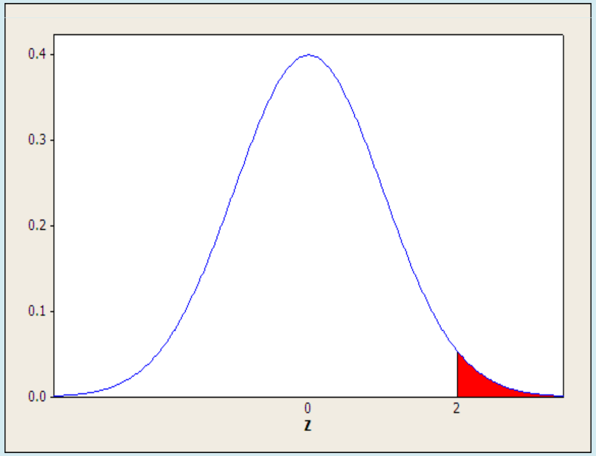
١- اخترنا موظفاً عشوائياً فما احتمال أن يقل بدل سكنه عن **166** ريال ؟

$$P(X<166)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{166-170}{8}\right)$$
$$=P(Z<-0.5)$$
$$=\Phi(-0.5)$$
$$=0.3085$$



٢- سحبت عينة من (64)موظف. فما هو احتمال أن يكون متوسط بدل سكنهم أكبر من 172ريال؟

$$P(\overline{X} > 172) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu(\overline{X})}{\sigma(\overline{X})} > \frac{172 - 170}{8/\sqrt{64}}\right)$$
$$= P(Z > 2) = 1 - P(Z < 2)$$
$$= 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772$$
$$= 0.0228$$



مثال:

إذا كان عدد الحوادث الأسبوعية على إحدى الطرق يتبع توزيعاً احتمالياً ما بمتوسط **(4)** حوادث ، وانحراف معياري **(2)** خلال **(64)** أسبوع ، ما هو احتمال أن يكون متوسط عدد الحوادث فيها يزيد عن **(4.2)** حادثاً ؟

خلال (64) أسبوع ، احتمال أن يكون متوسط عدد الحوادث فيها يزيد عن (4.2) حادثاً هو:

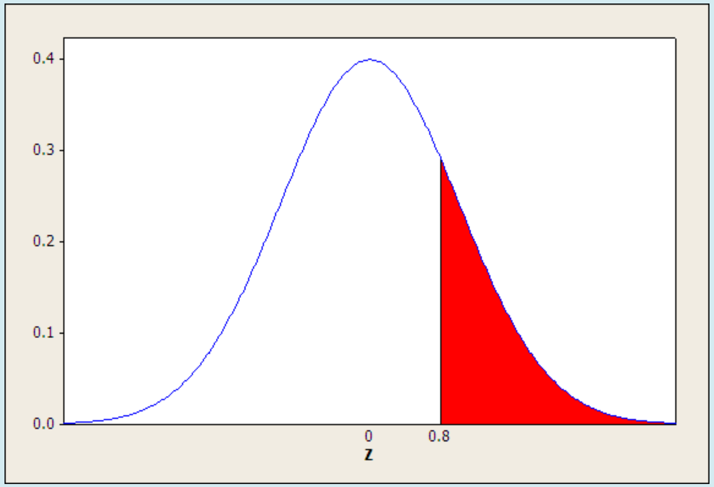
$$\mu = 4 \quad , \quad \sigma = 2 \quad , \quad n = 64$$

$$P(\overline{X} > 4.2) = P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{4.2 - 4}{2 / \sqrt{64}}\right)$$

$$= P\left(Z > \frac{0.2}{0.25}\right) = P(Z > 0.8)$$

$$= 1 - P(Z < 0.8) = 1 - \Phi(0.8)$$

$$= 1 - 0.7881 = 0.2119$$



مسائل (توزيعات المعاينة):

نفترض أن X تمثل الوزن بالرطل لسمكة من نوع السلمون الكبير الذي يُصطاد عند مصب الأنهار ، و نفترض

أن للمتغير X توزيعاً طبيعياً متوسطة 30 وانحرافه المعياري 6.

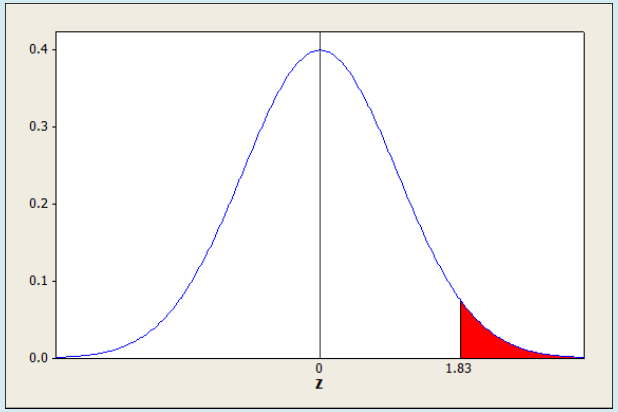
أحسب احتمال أنه إذا اصطيدت سمكة سلمون فإن وزنها:

١. سيكون على الأقل 41 رطلاً.

٢. سيكون بين الـ 20 و الـ 40 رطلاً.

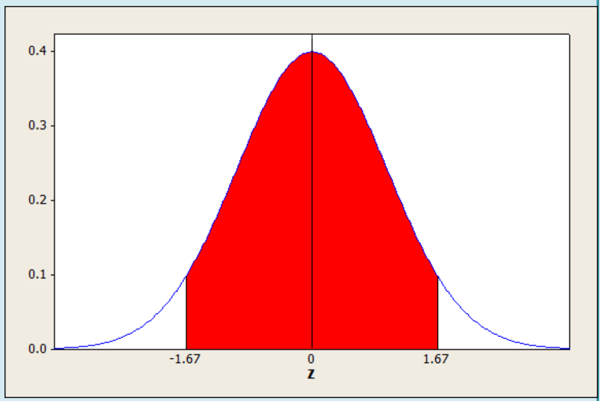
(١

$$P(X \geq 41) = P(Z \geq \frac{41-30}{6})$$
$$= P(Z \geq 1.83) = 1 - P(Z \leq 1.83)$$
$$= 1 - \Phi(1.83) = 1 - .9664 = 0.0336$$



-٢

$$P(20 \leq X \leq 40) = P(\frac{20-30}{6} \leq Z \leq \frac{40-30}{6})$$
$$= P(-1.67 \leq Z \leq 1.67)$$
$$= \Phi(1.67) - \Phi(-1.67)$$
$$= .9525 - .0475 = .905$$



درجات نسبة الذكاء لمجموعة من 6 طلاب تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط 100 و تباين 144.ما هو احتمال أن يُختار طالب بشكل عشوائي تكون درجة نسبة ذكائه بين 90 و 110 درجة؟

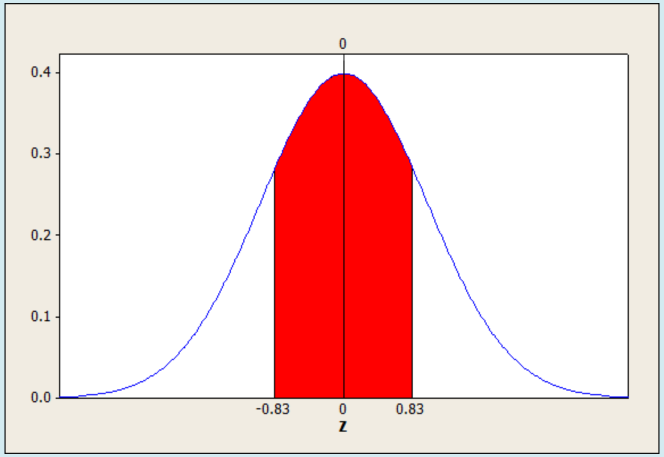
$$\mu = 100 \quad , \quad \sigma = 12 \quad , \quad n = 6$$

$$P(90 \le X \le 110) = P\left(\frac{90-100}{12} \le Z \le \frac{110-100}{12}\right)$$

$$= P(-0.83 \le Z \le 0.83)$$

$$= \Phi(0.83) - \Phi(-0.83)$$

$$= .7967 - .2033 = 0.5934$$



الإختبار الذاتي

اختر الإجابة المناسبة للفقرات التالية

1.التوزيع الطبيعي توزيع

A.	B.	C.	D.
ملتو لليمين	ملتو لليسار	متماثل	غير متماثل

2. تنحصر 95% من بيانات المتغير الطبيعي القياسي بين

A.	B.	C.	D.
(-1, 1)	(-2, 2)	(-3, 3)	(-4, 4)

3. المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي بكامله يساوي

A.	B.	C.	D.
1	-1	0	0.5

4. قيمة $P(Z < 0)$ حيث Z متغير طبيعي قياسي

A.	B.	C.	D.
1	-1	0	0.5

إذا كان الربح الصافي السنوي بإحدى الشركات يتبع توزيع طبيعي بمتوسط 10مليون ريال، وانحراف معياري 1مليون ريال، وكانت الشركة مكونة من 100فرع.

5. احتمال أن يزيد دخل فرع من فروع الشركة عن 12 مليون ريال

A.	B.	C.	D.
0.9772	0.0228	0.8413	0.1587

6. احتمال أن يقل دخل فرع من فروع الشركة عن 8 مليون ريال

A.	B.	C.	D.
0.9772	0.0228	0.8413	0.1587

7. احتمال أن يتراوح دخل فرع من فروع الشركة بين 9 و11 مليون ريال

A.	B.	C.	D.
0.9544	0.0456	0.6826	0.3174

8. عدد الفروع التي يتراوح دخلها بين 9 و11 مليون ريال

A.	B.	C.	D.
954	46	683	317

إذا كانت قيمة المؤشر العام اليومي في أحد أسواق الأسهم تتبع توزيع معين بمتوسط يساوي 5000 نقطة، وانحراف معياري يساوي 100 نقطة. اخترنا عينة من 100يوم بشكل عشوائي لتقييم أداء السوق.

9. احتمال أن تزيد قيمة المؤشر العام في أحد الأيام عن 5150 نقطة

A. 0.9332	**B.** 0.0668	**C.** 0.9938	**D.** 0.0062

10. احتمال أن تتراوح قيمة المؤشر العام في أحد الأيام بين 5250 و4750 نقطة

A. 0.9876	**B.** 0.0668	**C.** 0.9938	**D.** 0.0062