المحاضرة الثالثة نظرية الاحتمالات

مقدمة : مفهوم الاحتمال .. هناك عدة طرق متعددة يمكن من خلالها تقديم مفهوم الاحتمال منها :

١/ طريقة الرأي الشخصي : وهي تعتمد على التقدير الشخصي للفرد والذي يرغب بتعيين احتمال حدوث حادث ما ، و كأن يقول احتمال حصوله على تقدير مرتفع لمقرر الاحصاء للإدارة نظرًا للجهد الذي بذله في دراستها .

٢/ طريقة التكرار النسبي :و ويعرف بأنه إذا تكرر إجراء تجربة احصائية n من المرات تحت نفس الظروف وكان عدد المرات التي تؤدي إلى حدوث الحادث A يساوي , n(A) فإن التكرار النسبي لهذا الحادث هو $\frac{n(A)}{n}$ ، وإذا كبرت n بدون حدود وكانت n(A) تكبر معها بحيث يؤول التكرار النسبي في النهاية إلى عدد ثابت ,وليكن p فعندئذ تقول أن احتمال الحادثA هو العدد. p

مثال : عند رمي قطعة نقد عدد معين من المرات بحيث يتم تسجيل ظهور الصورة فيها ، نلاحظ أن التكرار النسبي يقترب من $\frac{1}{2}$ عند رمي قطعة النقد عدد كبير جدًا من المرات. ونقول بأن احتمال ظهور الصورة (H) عند رمي قطعة نقد منتظمة = $\frac{1}{2}$

مثال : إذا كان طلبة إحدى الكليات موزعين على التخصصات المختلفة فيها حسب الجدول التالي:

التخصص	عدد الطلبة
إدارة أعمال	320
محاسبة	480
تسويق	300
علوم مالية ومصرفية	500

إذا قام احد المدرسين بمقابلة أحد الطلبة ,فما هو احتمال أن يكون من قسم المحاسبة؟

الحل: التكرار النسبي لطلبة تخصص المحاسبة يساوي $\frac{480}{320+480+300+500} = 0.3$

أن مفهوم التكرار النسبي يقودنا إلى تقديم التعريف التالي :

فضاء العينة ذو النقط المتساوية إمكانية الحدوث : إذا احتوى الفضاء العيني على عدد من النقاط n بحيث كانت فرصة الحصول على أي نتيجة بسيطة مساوية على أية نتيجة بسيطة أخرى فإنه يقال أن الفضاء العيني S فيه n من النقط إمكانية الحدوث ويكون كل حادث بسيط منفصلا عن أي حادث آخر بحيث يكون احتمال حدوث كل حادث مساويا للحادث الآخر . ومن هذا نحصل على النتيجة التالية : إذا احتوى حادث A على عدد من النقط n(A)، فإن احتمال هذا الحادث هو : $= p(A) = \frac{n(A)}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث A}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}}$

مثال : في تجربة القاء قطعة نقد متزنة ثلاث مرات أوجد احتمال كل من الحوادث التالية :

١/ إذا كان الحادث A يمثل ظهور الصورة (H) مرتين على الاقل ؟

٢/ إذا كان الحادث B يمثل ظهور الاوجه الثلاث متشابهة ؟

الحل : لاحظ أن عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة تكتب كما يلي :

S={(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,T,T),(T,T,H),(T,H,T),(T,H,H)}

لاحظ أن عدد عناصر الفضاء العيني يساوي 2×2×2 = 8 (من قاعدة الضرب).

1- $p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

احظ أن الحوادث التي ظهرت الصورة فيها مرتين على الاقل هي (H,H,H),(H,H,T),((T,H,H),(H,T,H)

2- $p(B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

لاحظ ظهور الاوجه الثلاث متشابه في حادثين .

قوانين الاحتمالات: في هذا البند سنورد القوانين الاولية في الاحتمال وهي :

نظرية (1) :

١- إذا كان لدينا المجموعة الخالية ورمزها Ø فإن احتمال هذه المجموعة يساوي صفر . بالرموز p(Ø) = 0

٢- إذا كان لدينا المجموعة الكلية ورمزها S فإن احتمال هذه المجموعة يساوي 1 . بالرموز p(S) = 1

٣- احتمال أي حادث E من الفضاء العيني S يكون محصور بين الصفر والواحد . بالرموز $0 \le p(s) \le 1$

نظرية (2) : إذا كان A حادثًا في s ، وكان $\bar{A}$ هو متممة ذلك الحادث فإن $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

مثال : إذا كان احتمال نجاح طال في مادة الحاسبة ما هو 80% ، فما احتمال عدم نجاحه في تلك المادة ؟

الحل : بفرض اننا رمزنا لنجاح الطالب في مادة المحاسبة بالرمز A ، فإن احتمال عدك نجاحه يساوي $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.20 = 0.08$

مثال : إذا كان احتمال وصول طالب إلى محاضراته في الوقت المحدد هو 0.75 فما احتمال وصول الطالب المتأخر ؟

الحل : نفرض أن A = وصول الطالب على الموعد المحدد

$\bar{A}$ = وصول الطالب متأخرًا

$P(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.75 = 0.25$

نظرية (3) : إذا كان A,B أي حادثين في الفضاء العيني S فإن $p(AUB) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال غياب طالب عن المحاضرة الأولى هو 0.30 وغيابه عن المحاضرة الثانية هو 0.15 واحتمال غيابه عن المحاضرة الأولى والثانية يساوي 0.20، أجب عن الاسئلة التالية :

أ) ما احتمال غياب الطالب عن أحد المحاضرتين على الأقل ؟

ب) ما احتمال عد غياب الطالب عن أي من المحاضرتين ؟

ج) ما احتمال حضور الطالب للمحاضرة الأولى ؟

الحل : نفرض أن A تمثل غياب طالب عن المحاضرة الأولى ونفرض أن B تمثل الغياب عن المحاضرة الثانية . وبذلك فأن $A \cap B$ يمثل الغياب عن كلا المحاضرتين

أ) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0.30 + 0.15 - 0.20 = 0.25$

ب) عدم غياب الطالب عن أي محاضرتين يعني أنه حضر المحاضرتين، وهذا يعني متممة الحادث "غياب الطالب عن إحدى المحاضرتين على الأقل" أي أنه متممة $(A \cup B)$ ومن قانون المتممة

$$p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0.25 = 0.75$$

ج) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.30 = 0.70$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.5$, $p(B) = 0.8$, $p(A \cup B) = 0.9$. أوجد

أ) $p(A \cap B)$

ب) $p(\bar{A})$

ج) $p(\overline{A \cap B})$

الحل :

١) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0.9 = 0.5 + 0.8 - p(A \cap B)$

$\downarrow$

$p(A \cap B) = 1.3 - 0.9 = 0.4$

٢) $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0.5 = 0.5$

٣) $p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0.4 = 0.6$

ملاحظة : في حال كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فإن تقاطعهما **= Ø** وبذلك تصبح النظرية (3) على الصورة

$$p(A \cup B) = p(A) + P(B)$$

مثال : إذا كان $p(A) = 0.3$ ، $p(B) = 0.4$ بحيث كان الحادثين B,A حادثين منفصلين ، فأوجد احتمال حدوث الحادث A أو حدوث الحادث B ؟

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

لاحظ أن احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B او حدوث احدهما على الأقل تعني $p(A \cup B)$ أما في حال السؤال عن احتمال حدوث الحادث A والحادث B أو حدوث كليهما معًا فهذا يعني $p(A \cap B)$

نظرية (4) : إذا كان B,A أي حادثين في الفضاء العيني S فإن

أ) $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

ب) $p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B)$

مثال : إذا كان احتمال حضور مدير شركة معينة في يوم ما يساوي 0.9 واحتمال حضور مساعد في ذلك اليوم هو 0.95 واحتمال حضور واحد منهما على الاقل يساوي أو أوجد احتمال

1- حضور المدير ومساعده؟

2- حضور المدير وحده؟

3- حضور المساعد وحده؟

الحل : نعبر عن حضور المدير بالحادث A وحضور المساعد بالرمز ، وحضور احدهما على الأقل بالرمز $A \cup B$

١- من نظرية رقم ثلاث نجد أن :

الحل : $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

$0.97 = 0.90 + 0.95 - p(A \cap B)$

$\downarrow$

$p(A \cap B) = 1.85 - 0.97 = 0.88$

٢- حضور المدير وحده تعني أن المدير حضور وغيابك مساعد ، وهذا يعني حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث

$p(A \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) - p(A \cap B)\ 0.90 - 0.88 = 0.02$

٣- حضور المساعد وحده تعني أن المساعد حضر والمدير غاب حدوث B وعدم حدوث A .

$p(B \cap \bar{A}) = p(B) - p(A \cap B) = 0.95 - 0.88 = 0.07$

تمارين : في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين اوجد احتمال ما يلي :

1- ظهور عددين متشابهين

2- ظهور عددين مختلفين

3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من12 ؟

4- ظهور عدين بحيث يكون الأول عدد فردي؟