د. أ بسيوني

(١) العام

التكامل العددي

لإيجاد قيمة التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ نوجد كما نعلم الدالة الأصلية $F(x)$ للدالة المكاملة $f(x)$ حيث $f(x)$ دالة متصلة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

$f(x)=x$ دالة متصلة

$f(x)$ دالة نقطية (متقطعة)

ومن حالات كون الدالة نقطية فاننا

سنلجأ لحساب التكامل للدالة

النقطية المتقطعة باستخدام

إحدى طريقتين:

١- طريقة أشباه المنحرفات:

لحساب التكامل $\int_a^b f(x)dx$ نقسم

الفترة $[a,b]$ الى n جزءاً متساوياً

$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$

وبحيث يكون طول كل جزء

$h = \frac{b-a}{n} = \Delta x$ الخطوة

فإذا كانت $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$

هي قيم الدالة المعطاة (الدالة التي

تقع تحت رمز التكامل) وذلك في النقاط

أي : $x_0, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n$

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$$
$$\dots\ y_{n-1} = f(x_{n-1}),\ y_n = f(x_n)$$

أخيراً فإن قيمة التكامل هي :

حفظ
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) + y_n\right]}$$

تقدير الخطأ بطريقة أشباه المنحرفات :

$$h = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(x)$$

$$x \in [a, b]$$

مثال: احسب التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

بطريقة أشباه المنحرفات حيث $n=4$

ثم احسب الخطأ المرتكب.

الحل: نوجد أولاً طول الخطوة الواحدة

طول المجال الجزئي:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0,25 \quad (1$$

نشكل الجدول الآتي:

x	$x_0=a$	x_1	x_2	x_3	$x_4=b$
$y=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4

(2

نظرياً

x	0	$0,25$	$0,5$	$0,75$	1
$y=f(x)$	1	$0,94$	$0,8$	$0,64$	$0,5$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{h}{2}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4\right]$$

$$= \frac{0,25}{2}\left[1 + 2(0,94 + 0,8 + 0,64) + 0,5\right]$$

$$= 0,7875$$

تقدير الخطأ:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(1+x^2)}\,2x(-2x)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2) - 4x(-2x)}{(1+x^2)^3}$$

$$\cancel{f'''(x) = -\left[4x^2 + 4x + 2\right](-2x)}$$

$$\frac{4}{8} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}$$

x	0	0,25	0,5	0,75	1
$f''(x)$	-2	$-0,47$			$\frac{1}{2}$

$$E = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(x)$$

$$E \leq -\frac{1-0}{12} (0,25)^2 \underset{0 \leq x \leq 1}{\mathrm{Max}} |f''(x)|$$

$$E \leq \left| -\frac{1-0}{12} (0,25)^2 (-2) \right|$$

القيمة

$$E \leq 0,0104$$

وهو الخطأ المرتكب .

ان الخطأ المرتكب يعطى بالقانون:

$$E = -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(x)$$

[illegible]:

$$E \leq -\frac{(1-0)}{12} (0,25)^2 \underset{0 \leq x \leq 1}{\text{Max}} f''(x)$$

$$E \leq -\frac{1}{12} (0,25)^2 (-2)$$

$$E \leq 0,0104$$

واجب: احسب التكامل

بطريقة أشبه منحرف $\int_0^1 x e^x \, dx$

حيث $h = 0,1$ واعتبر $n=5$ 0,5

ثم احسب الخطأ المرتكب

group
٣ بنات ب

طريقة سيمبسون:

تتلخص طريقة سيمبسون بتجزئة المجال $[a,b]$ إلى عدد زوجي من الفترات الجزئية متساوية الطول عددها n فيكون طول كل فترة جزئية

$$n = \frac{b-a}{h}$$ h مقدار معلوم

وطالب التكامل $\int_a^b f(x)\,dx$ بيزأ بحسابه من x_0 الى $x_2 = x_0 + 2h$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + 2f_4 + 4f_5 + 2f_6 + \cdots + 4f_{n-1} + f_n\right]$$

$a = x_0$

تدعى هذه العلاقة بصيغة سيمبسون (1)

ويمكن كتابة الصيغة سيمبسون :

$$\int_{a=x_0}^{b} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f_0 + 4(f_1+f_3+f_5+\dots) + 2(f_2+f_4+f_6+\dots) + f_n\right]$$

حفظ

مثال: احسبي التكامل :

$$\int_0^1 e^x\,dx$$

بطريقة سيمبسون حيث $h=\frac{1}{6}$ واحسبي الخطأ المرتكب.

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{\frac{1}{6}} = 6$$

عدد زوجي

x	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1
$f(x)$	1	1,1814	1,3956	1,6487	1,9477	2,3010	2,71
	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6

$f(x)=e^x$

الدالة ما تحت التكامل

$$\int_0^1 e^x\,dx = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4(y_1+y_3+y_5) + 2(y_2+y_4) + y_6\right]$$

$$= \frac{1}{18}\left[1 + 4(1{,}1814 + 1{,}6487 + 2{,}3010) + 2(1{,}3956 + 1{,}9477) + 2{,}71\right]$$

$$= \underline{1{,}7183}$$ وهي القيمة التقريبية

وما هي القيمة الفعلية للتكامل:

$$\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$= 2{,}7183 - 1 = \boxed{1{,}7183}$$

وهي نفس القيمة التقريبية

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة سيمبسون

قانونه $E \leq -\frac{b-a}{180} h^4 f^{(4)}_{(x)}$

أما $f^{(4)}_{(x)}$ فهي أكبر قيمة للمشتق الرابع من أ

$\mathrm{Max}\, f^{(4)}(x)$

جمع قطعه

$$E \leq \left| -\frac{b-a}{180} h^4 \operatorname{Max} f^{(4)}(x) \right|$$

وذلك بأن نأخذ جميع قيم المشتق الرابع
ونأخذ بعد ذلك أكبر قيمة لهذا
المشتق وذلك حسب قيم x الواردة
في الجدول

x	0	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1
$f^{(4)}(x)$	1	نفس قيم الجدول السابق					2,7183

$$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x,\ f''(x) = e^x,\ f'''(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(x) = e^x$$

$$\operatorname{Max} f^{(4)}(x) = 2,7183$$

$$E \leq \left| -\frac{1-0}{180} \left[\left(\frac{1}{6}\right)^4 (2,7183) \right] \right|$$

$$E \leq \left| \frac{-1}{180} \frac{1}{64} (2,7183) \right| =$$

$$E \leq 1,16525 \times 10^{-5}$$

4)