المحاضرة المباشرة الثالثة

الاحصـــــاء للإدارة

د. رائـــد الخصاونة

المحاضرة العاشرة والثالثة
الفصل الخامس : التقدير

فترات الثقة للتباين Confidence Intervals for Variance

نظرية (7) : اذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للتباين σ^2 هي :-

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[1-\alpha/2 ; n-1\right]} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[\alpha/2 ; n-1\right]} \right)$$

حيث S^2 : هو تباين العينة .

n : حجم العينة .

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري ، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي فترة الثقة للتباين .

مثال :- عينة عشوائية حجمها 20 أخذت من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فاعطت التباين $S^2 = 15$ ، اوجد فترة 90% ثقة للتباين σ^2 ؟

الحل :-

$$1-\alpha = 90\%$$
$$\alpha = 10\%$$
$$\alpha/2 = 5\% = 0.05$$
$$1-\alpha/2 = 1-0.05 = 0.95$$

من جدول كربيع كاي نجد أن:

$$\chi^2[0.05, 19] =$$

$$\chi^2[0.95, 19] =$$

وحسب النظرية السابقة، فإن فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{19 \times 15}{30.144} , \frac{19 \times 15}{10.117} \right]$$

$$= [9.45 , 28.17]$$

أما فترة 90% ثقة للانحراف المعياري فهي

$$\left[\sqrt{9.45} , \sqrt{28.17} \right]$$

$$= [3.07 , 5.31]$$

فترات الثقة للنسبة بين تباينين :-

نظرية (8) : إذا كانت $X_1, X_2, \dots, X_n$ عينة عشوائية من $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ عينة عشوائية من $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن المجتمع الأول، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ هي :-

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} F\left[\alpha/2 ; n_1-1, n_2-1\right] , \frac{S_2^2}{S_1^2} F\left[1-\alpha/2 ; n_1-1, n_2-1\right] \right)$$

مثال :- اخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 9$ من مجتمع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ فاعطت تباين $S_1^2 = 65.4$ واخذت عينة عشوائية اخرى حجمها $n_2 = 11$ من مجتمع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فاعطت تباين $S_2^2 = 127.3$ ، اوجد فترة 90% ثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ؟

الحل :-

$1-\alpha = 90\%$

$\alpha = 10\%$

$\alpha/2 = 5\% = 0.05$

$1-\alpha/2 = 1-0.05 = 0.95$

من جدول توزيع F نجد أن :-

$$F[0.05; 8, 10] = \frac{1}{F[0.95; 10, 8]}$$

$$= \frac{1}{3.35} = 0.3$$

$$F[0.95; 8, 10] = 3.07$$

ومن صيغة القانون للنظرية السابقة نجد أن :-

$$\left[\frac{127.3}{65.4} \times 0.3 \; , \; \frac{127.3}{65.4} \times 3.07\right]$$

$$[0.583 \; , \; 5.98] \; ,$$

نهاية الفصل الخامس

المثلة :-

1 اخذت عينة عشوائية حجمها 400 من طلاب المرحلة الابتدائية فوجد أن 80 منهم حاصلون على شهادة الكالوريوس :-

أ) قدر نسبة الطلاب في المرحلة الابتدائية الحاصلين على شهادة الكالوريوس .

ب) اوجد فترة 99% ثقة للنسبة الحقيقية للطلاب في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة الكالوريوس ؟

الحل :-

أ) نقدر نسبة الطلاب هذه المرحلة كالتالي :-

النسبة $= \frac{80}{400} = 0.2$.

(لاحظ أن $\bar{P} = \frac{X}{n}$). التقدير النقطي لنسبة النجاح P هي $\bar{P}$.

ب) من خلال استخدام النظرية رقم (5) نجد أن

$$\left(0.2 - Z_{0.995}\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}} \;,\; 0.2 + Z_{0.995}\sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{400}}\right)$$

$1-\alpha = 99\%$
$\alpha = 1\%$
$= 0.01$
$\alpha/2 = 0.005$
$1-\alpha/2 = 0.995$

$$\left(0.2 - 2.58 \times 0.02 \;,\; 0.2 + 2.58 \times 0.02\right)$$

$$\left(0.148 \;,\; 0.252\right)$$

El ينتج احد المصانع مصابيح كهربائية تخضع اعمارها تقريباً لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 35 ساعة.
اخذت عينة عشوائية حجمها 25 مصباحاً فكان الوسط الحسابي لاعمار هذه المصابيح 890 ساعة. اوجد فترة 98% ثقة لمعدل اعمار المصابيح ؟

الحل:- نلاحظ أن:

لاحظ أن الانحراف المعياري للمجتمع معلوم

$\bar{X} = 890$ ، $n = 25$ ، $\sigma = 35$

من نظرية رقم (1) نلاحظ أن

$$\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \; , \; \bar{X} + Z_{1-\alpha} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

$$\left(890 - Z_{0.99} \times \frac{35}{\sqrt{25}} \; , \; 890 + Z_{0.99} \times \frac{35}{\sqrt{25}} \right)$$

$$\left(890 - 2.33 \times 7 \; , \; 890 + 2.33 \times 7 \right)$$

$$\left(890 - 16.31 \; , \; 890 + 16.31 \right)$$

$$\left(873.69 \; , \; 906.31 \right)$$

ملاحظات :-

عند إيجاد فترات التقدير للوسط الحسابي للمجتمع μ نلاحظ أن :-

١- اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه معلوم فإننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري .

٢- اذا كان السحب من مجتمع ما تباينه معلوم فإننا نستخدم ايضاً جداول التوزيع الطبيعي المعياري بشرط $n \geq 30$.

٣- اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فإننا نستخدم جداول توزيع t .

٤- في حال السؤال عن التقدير للنسبة سواء لمجتمع واحد أو لمجتمعين فإننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي .

٥- في حال السؤال عن التقدير للتباين :-

أ) اذا كان السؤال عن مجتمع واحد ، فإننا نستخدم توزيع كاي تربيع

ب) اذا كان السؤال عن النسبة بين تباينين لمجتمعين فإننا نستخدم توزيع F .

- شاكراً حسن حضوركم واستماعكم