بسم الله الرحمن الرحيم

① ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P(x_1,y_1)$ و $Q(x_2,y_2)$

$$\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}}$$

مثال

أوجد ميل المستقيم الواصل بين النقطتين $Q(3,7)$ و $P(1,-3)$

الحل

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{7-(-3)}{3-1} = \frac{10}{2} = 5$$

لاحظ

① إذا كان الميل = صفر ∴ المستقيم يوازي محور السينات

② ،، ،، الميل = ∞ (من الناتج $\frac{\text{رقم}}{\text{صفر}}$) ∴ المستقيم يوازي محور الصادات

② ميل المستقيم الذي معادلته الصورة $ax+by+c=0$ حيث $a, b \neq$ صفر هو

$$\boxed{m = \frac{-a}{b} = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y}}$$

مثال

أوجد ميل المستقيم الذي معادلته $2x+4y-7=0$

الحل $a=2$ ، $b=4$

$$\therefore m = \frac{-a}{b} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

المستقيمات المتوازية: يقال أن المستقيم L_1 موازي للمستقيم L_2 إذا كان $m_1 = m_2$

مثال هل المستقيمان $4x-y-2=0$ و $y=4x+1$ متوازيان؟

الحل $m_1 = \frac{-4}{-1} = 4$ و $m_2 = \frac{-4}{-1} = 4$ ∴ المستقيمان متوازيان

المستقيمات المتعامدة: يقال أن المستقيم L_1 متعامد مع المستقيم L_2 إذا كان $m_1 \times m_2 = -1$

مثال هل المستقيمان $y-3x-2=0$ و $3y+x-15=0$ متعامدان

$m_1 = \frac{-(-3)}{1} = \frac{3}{1} = 3$ و $m_2 = \frac{-1}{3}$

$m_1 \times m_2 = 3 \times \frac{-1}{3} = -1$

∴ المستقيمان متعامدان

(١) معادلة الخط المستقيم بمعلومية نقطة $P(x_1, y_1)$ وميل m هي

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(5, -3)$ وميله يساوي -2

الحل $y_1 = -3$ ، $x_1 = 5$ و $m = -2$

$\therefore y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-3) = -2(x - 5)$

$y + 3 = -2x + 10$

$\therefore y = -2x + 10 - 3 \Rightarrow \boxed{y = -2x + 7}$

(٢) معادلة الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ هي

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال

أوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $\underset{x_1, y_1}{(1, -2)}$ ، $\underset{x_2, y_2}{(5, 6)}$

الحل

$\therefore \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \therefore \frac{y - (-2)}{x - 1} = \frac{6 - (-2)}{5 - 1} \quad \therefore \frac{y + 2}{x - 1} = \frac{6 + 2}{4} = \frac{8}{4}$

$\frac{y + 2}{x - 1} = \frac{2}{1} \quad \therefore y + 2 = 2x - 2 \quad \boxed{\therefore y = 2x - 4}$

(٣) معادلة الخط المستقيم بدلالة ميل والمحور الصادي هي

$\boxed{y = mx + b}$ حيث m هو الميل و b الجزء المقطوع من المحور الصادي

مثال أوجد معادلة الخط المستقيم الذي ميله $m = 3$ (ويقطع جزءاً من محور الصادات) ومقطوعه الصادي $b = -2$

الحل

$\therefore y = mx + b$

$\boxed{\therefore y = 3x - 2}$

إذا طلب الميل والمقطع الصادي

مثال أوجد الميل والمقطوع الصادي للمستقيم $2x + 3y = 6$

الحل نجعل المعادلة على الشكل $y = mx + b$ كالتالي

$3y = -2x + 6$ نقسم المعادلة ÷ ٣

$\frac{3y}{3} = \frac{-2x}{3} + \frac{6}{3}$

$\therefore y = \frac{-2}{3}x + 2$

الرقم الذي بجانب x هو الميل $\therefore m = \frac{-2}{3}$

الرقم الحر هو المقطوع الصادي $\therefore b = 2$

(٢)

٤) معادلة الخط المستقيم بدلالة الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات هي

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

حيث a الجزء المقطوع من محور السينات

b " " " " الصادات

مثال: أوجد معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءاً طوله ٣ سم ومن محور الصادات جزءاً طوله ٢ سم

الحل $a=3$ ، $b=2$

$\therefore \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$ توحيد المقامات $\therefore \frac{2x}{6}+\frac{3y}{6}=1$ ، $\frac{2x+3y}{6}=1$

$$\boxed{\therefore 2x+3y=6}$$

إذا طلب الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات لمستقيم معادلته $ax+by=c$

مثال: أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والجزء المقطوع من محور الصادات للمستقيم الذي معادلته

$$2x-3y=5$$

$\therefore a=\frac{\text{العدد الحر}}{\text{معامل } x}$ ، $b=\frac{\text{العدد الحر}}{\text{معامل } y}$

$\therefore a=\frac{5}{2}$ ، $b=\frac{5}{-3}$

المتباينات

١) فترة مغلقة $[a,b]=\{x\in R: a\le x\le b\}$

٢) فترة مفتوحة $(a,b)=\{x\in R: a<x<b\}$

٣) فترة نصف مغلقة نصف مفتوحة $[a,b)=\{x\in R\ a\le x<b\}$

٤) فترة نصف مفتوحة نصف مغلقة $(a,b]=\{x\in R\ a<x\le b\}$

حل المتباينة ① $4x+7 \geq 2x-3$

الحل

$4x-2x \geq -3-7$

$\frac{2x}{2} \geq \frac{-10}{2}$ $\quad x \geq -5$

مجموعة الحل هي الفترة $[-5, \infty)$

② حل المتباينة $-5 < 3x-2 < 1$

الحل

$+2-5 < 3x < 1+2$

$\frac{-3}{3} < \frac{3x}{3} < \frac{3}{3}$

$-1 < x < 1$

مجموعة الحل هي الفترة $(-1, 1)$

حل المتباينة $x^2+x-12 > 0$

$x \quad 3$
$x \quad 4$

$\therefore (x+4)(x-3) > 0 \therefore x>3$ و $x>-4$

او $(x+4)(x-3) < 0$

$\therefore x<3$ ، $x<-4$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$

$\therefore$ ما لم > او ≥ من العمود المقابل

حل المتباينة $x^2 \leq 4x+12$ الحل

$x^2-4x-12 \leq 0$

$x \quad 6$
$x \quad 2$

$(x-6)(x+2) \leq 0$

$\therefore x \leq 6$ او $x \leq 2$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $[-2, 6]$

القيمة المطلقة $|\ |$

حل المتباينة $|2x+4| \leq 3$

الحل

$-3 \leq 2x+4 \leq 3$

$-4-3 \leq 2x \leq 3-4$

$\frac{-7}{2} \leq \frac{2x}{2} \leq \frac{-1}{2}$

$-\frac{7}{2} \leq x \leq -\frac{1}{2}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي الفترة $[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}]$

حل المتباينة $|2x-5| > 3$

الحل

$-3 > 2x-5 > 3$

$+5-3 > 2x > 3+5$

$\frac{2}{2} > \frac{2x}{2} > \frac{8}{2}$

$1 > x > 4$

$\therefore$ مجموعة الحل هي عدا ... عناصر ...

$(-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

$(1, 4)$

الدوال ① الدالة الأسية $f(x) = 2^x$

② الدوال المثلثية $y=\sin x$ ، $y=\cos x$

$y=\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$y=\sec x \Leftarrow \frac{1}{\cos x}$

③ الدالة اللوغاريتمية $f(x)=\log_4(2x+4)$

~~$\log_b x$~~

$y=\csc x \Rightarrow \frac{1}{\sin x}$

$y=\cot x \Rightarrow \frac{\cos x}{\sin x}$

(5)

التفسير الهندسي للدوال المثلثية

$\sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}}$

مثال: إذا كان $\cot\theta = \frac{3}{4}$ فأوجد الدوال المثلثية الآتية $\sin\theta$ ، $\cos\theta$ ، $\tan\theta$

من فيثاغورث: $25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2 = AC^2$ $\therefore AB = \sqrt{25} = 5$

$\therefore \sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{4}{5}$ ، $\cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{3}{5}$ ، $\tan\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{4}{3}$

الدالة النسبية $\frac{\text{مقام}}{\text{بسط}}$ مثال $f(x) = \frac{x+7}{x+5}$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$

الدالة الصريحة مثال $y = 2x + 3$

الدالة الضمنية مثال $x^2 + y^2 = 25$ ، $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

الدالة الزوجية: تعتبر الدالة $y = f(x)$ زوجية إذا كانت $f(-x) = f(x)$

مثال: هل الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية؟

الحل:

$f(-x) = (-x)^2$

$f(-x) = x^2 = f(x)$

$\therefore$ الدالة زوجية

الدالة الفردية: تعتبر الدالة $y = f(x)$ فردية إذا كانت $f(-x) = -f(x)$

مثال: هل الدالة $f(x) = x^3 + x$ فردية؟

الحل:

$f(-x) = (-x)^3 + (-x)$

$= -x^3 - x = -(x^3 + x)$

$\therefore f(-x) = -f(x)$ $\therefore$ الدالة فردية

تطبيقات اقتصادية

دالة الطلب على سلعة معينة

$Q_D = 25 - 5P$

1) أوجد الكمية المطلوبة من هذه السلعة عندما $P = 3$

2) سعر الوحدة إذا كانت الكمية المطلوبة $Q_D = 18$

3) الكمية المطلوبة من هذه السلعة إذا كانت توزع مجانًا $P = 0$

4) أعلى سعر يمكن أن يدفعه شخص لهذه السلعة

1) $Q_D = 25 - 5 \times 3 = 25 - 15$

$Q_D = 10$

2) $18 = 25 - 5P$ $\quad 18 - 25 = 5P$ $\quad -7 = 5P$

$\therefore P = \frac{7}{5}$

3) $Q_D = 25 - 5 \times 0 = 25$

4) أعلى سعر $Q_D = 0$

$\therefore 0 = 25 - 5P$ $\quad \therefore \frac{25}{5} = \frac{5P}{5}$ $\quad \therefore P = 5$

(٦)

دالة العرض (الإنتاج) الخطية Q_s

إذا كانت $Q_s = 3P - 2$

أوجد

1) Q_s إذا كانت $P = 5$

$Q_s = 3 \times 5 - 2 = 15 - 2$

$Q = 13$

2) P إذا كانت $Q_s = 10$

$10 = 3P - 2 \quad \therefore 10 + 2 = 3P$

$\frac{12}{3} = \frac{3P}{3}$

$\therefore P = 4$

3) أقل سعر يمكن أن ينتج به ويعرض السلعة في السوق

هو سعر الإنتاج الذي عنده $Q_s = 0$

$0 = 3P - 2 \quad \therefore \frac{3P}{3} = \frac{2}{3} \quad \therefore P = \frac{2}{3}$

[٣] التوازن في السوق بين دالتي العرض والطلب الخطيتين

مثال: إذا كانت دالة الطلب على سلعة معينة هي $Q_D = 2 - P$ وأن دالة العرض لنفس السلعة هي $Q_s = P - 1$

أوجد سعر التوازن والكمية التي يحدث عندها التوازن

الحل

يحدث التوازن عند تساوي الكميتين المعروضة والمطلوبة

$\therefore Q_s = Q_D$

$\therefore P - 1 = 2 - P \quad \therefore P + P = 2 + 1 \quad \therefore \frac{2P}{2} = \frac{3}{2}$

$\therefore P = \frac{3}{2}$ سعر التوازن

نعوض بسعر التوازن في إحدى الدالتين ولتكن دالة العرض

$Q_s = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

رسم الدوال

① رسم منحنى الصيغة القياسية للدالة

$y = f(x) = x$

① نكون الجدول

$x = 1$

$f(x) = 1$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3

نرسم الدالة

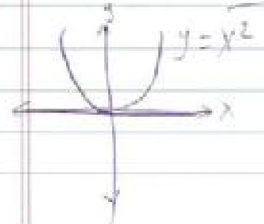
② الدالة التربيعية مثال: ارسم الدالة

$y = f(x) = x^2$

الحل: نكون الجدول

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
y f(x)	9	4	1	0	1	4	9

نرسمها



(٧)

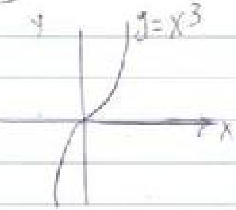
③ الدالة التكعيبية

مثال / ارسم الدالة $y = f(x) = x^3$

الحل / نكون الجدول

x	-2	-1	0	1	2
y f(x)	8	1	0	1	8

② نرسم الدالة من الجدول



④ الدالة الجذر التربيعي

مثال / ارسم الدالة $y = f(x) = \sqrt{x}$

الحل / نكون الجدول

x	0	1	2	3	4
y f(x)	0	1	1.4	1.7	2

② نرسم الدالة من الجدول

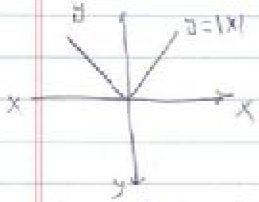
⑤ دالة القيمة المطلقة

ارسم الدالة $y = f(x) = |x|$

الحل

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y f(x)	3	2	1	0	1	2	3

② نرسم الدالة من الجدول

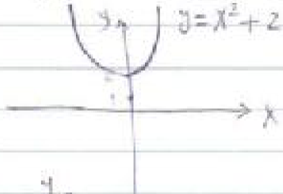


الدالة التربيعية

الإزاحة إلى الأعلى

مثال / ارسم منحنى الدالة $y = x^2 + 2$

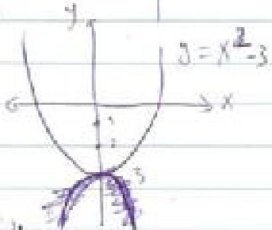
سهل نلاحظ أنها دالة تربيعية تحتوي $y = x^2$ مزاحة إلى الأعلى بمقدار وحدتين



الإزاحة إلى الأسفل

مثال / ارسم الدالة $y = x^2 - 3$

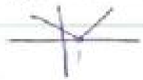
الحل / نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y = x^2$ ثلاث وحدات للأسفل



الإزاحة إلى اليمين

ارسم الدالة $y=|x-1|$

نحصل على منحنى الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=|x|$ وحدة واحدة لليمين



الإزاحة إلى اليسار

ارسم الدالة $y=|x+3|$

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=|x|$ ٣ وحدات إلى اليسار

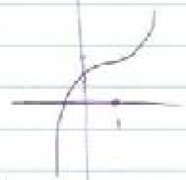
الإزاحة لليمين واليسار هنا دالة القيمة المطلقة عكس الإشارة

(8)

امامى الدالة x^3 بمقدار ... للأزاحة لليمين واليسار وبنفس ... للإزاحة لأعلى وأسفل

مثال ارسم الدالة $y=(x-1)^3 \pm 2$ — للإنتبه الإشارة مع الأس، $-$ لليمين، $+$ لليسار

نحصل على منحنى هذه الدالة بإزاحة منحنى الدالة $y=x^3$ وحدة واحدة لليمين ثم وحدتين لأعلى — ② الإشارة خارج القوس: $+$ لأعلى، $-$ لأسفل



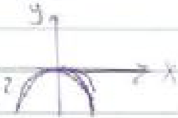
⑤ الانعكاس على محور X — السينات

— يتم الحصول على منحنى $y=-f(x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور X

مثال ارسم الدالة $y=-x^2$

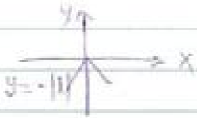
∴ نحصل بانعكاس لمنحنى الدالة $y=x^2$ على محور X

$y=-x^2$

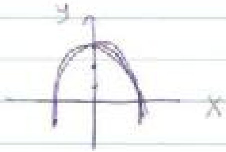


ارسم الدالة $y=-|x|$ بانعكاس ∴ نحصل بانعكاس للدالة $y=|x|$

$y=-|x|$



ارسم الدالة $y=-x^2+3$ ∴ نحصل بانعكاس لمنحنى الدالة $y=x^2$ على محور X ثم إزاحته ٣ وحدات لأعلى



الانعكاس على محور y — الصادات

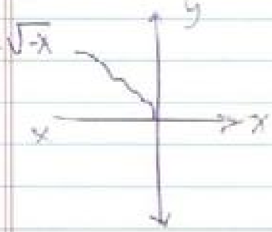
— يتم الحصول على منحنى $y=f(-x)$ بانعكاس منحنى $y=f(x)$ على محور y

مثال

ارسم الدالة $y=\sqrt{-x}$

نحصل على منحنى هذه الدالة بانعكاس منحنى الدالة $y=\sqrt{x}$ على محور الصادات y كالتالي

$y=\sqrt{-x}$



9

النهايات

أوجد ① $\lim_{x \to 5} 27$ ② $\lim_{x \to -2} (1-2x)$ ③ $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x-5)$

الحل ① $\lim_{x \to 5} 27 = 27$

2) $\lim_{x \to -2} (1-2x) = 1 - (2 \times -2) = 1+4 = 5$

3) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} (8x-5) = 8 \times \frac{1}{2} - 5 = 4 - 5 = -1$

عمليات على النهايات

إذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = L$ وكانت $\lim_{x \to a} g(x) = K$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x) = L \pm K$$

مثال إذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ ، $\lim_{x \to 2} g(x) = -8$ ، $\lim_{x \to 2} h(x) = 10.5$

أوجد ① $\lim_{x \to 2} [h(x) - f(x)]$

الحل

$$\lim_{x \to 2} [h(x) - f(x)] = 10.5 - 5 = 5.5$$

أوجد ② $\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)]$

الحل

$$\lim_{x \to 2} [f(x) + h(x) + g(x)] = 5 + 10.5 + (-8) = 15.5 - 8 = 7.5$$

$$\lim_{x \to a} c \cdot f(x) = c \times \lim_{x \to a} f(x) = c \times L$$

مثال أوجد $\lim_{x \to 2} 8f(x)$ ، $f(x) = 5$

الحل

$$\lim_{x \to 2} 8 f(x) = 8 \lim_{x \to 2} f(x) = 8 \times 5 = 40$$

$$\lim_{x \to a} [f(x) \times g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x) = L \times K$$

مثال

أوجد $\lim_{x \to 2} [g(x) \times h(x)]$ الحل

$$\lim_{x \to 2} g(x) \times \lim_{x \to 2} h(x) = -8 \times 10.5 = -84$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L}{K}$$

مثال أوجد ① $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

الحل $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{5}{-8}$

مثال أوجد $\lim_{x \to 2} [f(x) - g(x) \times h(x)]$ الحل $\Leftarrow$ $[f(x) - g(x) \times h(x)] = 5 - (-8 \times 10.5) = 5 - (-84) = 5 + 84 = 89$

10

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

مثال

$$\lim_{x\to 1}[3x-1]^6 = \left[\lim_{x\to 1} 3x-1\right]^6 = [3\times 1-1]^6 = (3-1)^6 = 2^6 = 64$$

أوجد ارجو نعوض عن كل س بالعدد الثابت

1) $\lim_{x\to 2}(3x^3+5x^2-7) = 3\times 2^3+5\times 2^2-7 = 3\times 8+5\times 4-7 = 24+20-7 = 37$

2) $\lim_{x\to 3}\frac{3x^2+7}{x-5} = \frac{3\times 3^2+7}{3-5} = \frac{3\times 9+7}{-2} = \frac{27+7}{-2} = \frac{34}{-2} = -17.$

3) $\lim_{x\to 2} e^x = e^2$ | 4) $\lim_{x\to 1} e^{x^2+2x+1} = e^{1^2+2\times 1+1} = e^{1+2+1} = e^4$

5) $\lim_{x\to 2}[\log(3x^2+5)] = \log(3\times 2^2+5) = \log(3\times 4+5) = \log 17$

6) $\lim_{x\to 3}[\ln(2x-5)] = \ln(2\times 3-5) = \ln(6-5) = \ln 1 = 0$

مثال اذا كانت

$$F(x) = \begin{cases} 3x^2+5 & , x<1 \\ 7x-2 & , x>1 \end{cases}$$

فأوجد

1) $\lim_{x\to 3} f(x)$

الحل تقع ٣ ضمن مجال الفاصلة الثانية لأنه $1 < 3$

نعوض عن ٣ في الثانية

$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} 7x-2 = 7\times 3-2 = 21-2 = 19$

2) $\lim_{x\to 1/2} f(x)$

الحل تقع $\frac{1}{2}$ ضمن مجال الفاصلة الأولى لأن $\frac{1}{2} < 1$

$\therefore \lim_{x\to 1/2} f(x) = \lim_{x\to 1/2} 3x^2+5 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+5$

$= 3\times\frac{1}{4}+5 = \frac{3}{4}+5$

$= \frac{3}{4}+\frac{20}{4} = \frac{23}{4}$

11

نهايات المقادير غير المحددة عند نقطة

هي التي تظهر عند حساب النهايات والناتج يكون $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

أولاً عندما تكون نتيجة التعويض المباشر $\frac{0}{0}$ نعالج الحالة كالآتي

① إذا كان البسط والمقام كثيرات حدود

الحل التحليل ثم الاختصار ثم التعويض

مثال أوجد نهاية

1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$

الحل بالتعويض كمية غير معينة

$\lim_{x\to -1} = \frac{(-1)^2-1}{-1+1} = \frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط

$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = \lim_{x\to -1} (x-1)$

ثم نعوض $= -1-1 = -2$

2) $\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$

الحل بالتعويض

$= \frac{3^2-9}{3-3} = \frac{9-9}{3-3} = \frac{0}{0}$

لإزالة هذه الحالة نحلل البسط الفرق بين مربعين

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$

$= \lim_{x\to 3} (x+3)$

$= 3+3 = 6$

x^2-3x+2 تحليل البسط بالتحليل

$x(x+1) = x^2+x$ والتحليل بإخراج العامل المشترك

② إذا احتوت الدالة على جذر

مثال أوجد نهاية الدالة

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

الحل

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \frac{\sqrt{9}-3}{9-9} = \frac{3-3}{9-9} = \frac{0}{0}$ كمية غير معينة

في هذه الحالة نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $(\sqrt{x}+3)$

$\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9} = \lim_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3}$

$= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$

3) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2} = \frac{0}{0}$

نضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$\lim_{x\to 2} \frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$

ثانيا عندما $x \to \infty$

إذا كانت $f(x)$ & $g(x)$ وكثيرات حدود و $x \to \infty$ فإن

الحالة الأولى
إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام الناتج صفر

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

مثال
$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$$
∵ درجة البسط أقل من درجة المقام
∴ الناتج = صفر

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1} = 0$$

مثال آخر
$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

الحالة الثانية
درجة البسط = درجة المقام ∴ الناتج = $\frac{\text{معامل الأس من البسط}}{\text{معامل الأس من المقام}}$

مثال أوجد نهاية
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5}$$
درجة البسط ٣ = درجة المقام ٣
∴ الحل = $\frac{1}{٣}$

$$\therefore \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{3x^3 + x^2 + 5} = \frac{1}{3}$$

الحالة الثالثة
درجة البسط أكبر من درجة المقام ∴ الناتج = ∞

مثال أوجد قيمة النهاية
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5}$$
∵ درجة البسط أكبر من درجة المقام
∴ $\lim_{x \to \infty} \frac{x^3 + x}{x^2 + 5} = \infty$

الاتصال
هل الدالة
$$f(x) = \begin{cases} x - 9 & x \neq -3 \\ -6 & x = -3 \end{cases}$$
متصلة عند $x = -3$

الحل أولا نعوض في الدالة المعطاة $x = -3$ وهي الدالة الثانية

$f(-3) = -6$

ثانيا نعوض في الدالة الأخرى بالنهايات $\lim_{x \to -3}$

$$\lim_{x \to -3} f(x) = \lim_{x \to -3} x - 9 = -3 - 9 = -12$$

إذا كان الناتج من أولا ≠ الناتج من ثانيا ∴ الدالة غير متصلة

$$\therefore \lim_{x \to -3} f(x) \neq f(-3)$$

∴ الدالة غير متصلة عند $x = -3$

مثال: هل الدالة المعرفة بـ $f(x) = \begin{cases} 6x & 0<x<5 \\ 25+2x & x \geq 5 \end{cases}$ متصلة في $x=5$

الحل: $x=5$ في الدالة الثانية ∴ نعوض في الدالة الثانية عند $x=5$

$f(5) = 25+2\times5 = 25+10 = 35$

ثم نعوض في الدالة الأولى بالنهاية $x \to 5^-$ ثم نجد النهاية

$\lim_{x\to5^-} 6x = \lim_{x\to5} 6\times5 = 30$

ثم نعوض في الدالة الثانية بـ $x \to 5^+$

$\lim_{x\to5^+} f(x) = \lim_{x\to5} (25+2x) = 25+2\times5 = 35$

∴ نهاية اليسار $\neq$ نهاية اليمين ∴ الدالة غير متصلة في $x=5$

لاحظ

مثال: أثبت أن الدالة $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ غير متصلة في $x=-2$

هنا دالة واحدة فقط ∴ نعوض عند $x=-2$

إذا كانت الدالة غير معرفة ∴ تكون غير متصلة

$f(-2) = \frac{(-2)^2-4}{-2+2} = \frac{4-4}{-2+2} = \frac{0}{0} =$ غير معرفة

∴ الدالة غير متصلة في $x=-2$

الاشتقاق متوسط التغير النسبة بين المتغير y الى المتغير x

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = x^2 + 2$ عندما تتغير x من 1 الى 1.5

الحل: $x_1 = 1$ و $x_2 = 1.5$

$\therefore f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3$

$f(1.5) = (1.5)^2 + 2 = 2.25 + 2 = 4.25$

$\therefore$ متوسط الدالة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{4.25 - 3}{1.5 - 1} = \dfrac{1.25}{0.5} = 2.5$

مثال: أوجد متوسط التغير للدالة $f(x) = 3x + 2$ عندما تتغير x من 1 الى 2

الحل: $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$

$f(1) = 3 \times 1 + 2 = 5$

$f(2) = 3 \times 2 + 2 = 6 + 2 = 8$

$\therefore \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \dfrac{8 - 5}{2 - 1} = \dfrac{3}{1} = 3$

المشتقة الأولى: نهاية متوسط التغير للدالة عندما $\Delta x \to 0$ تسمى المشتقة الأولى للدالة $y = f(x)$ بالنسبة للمتغير x ويرمز لها بأحد الرموز
$\frac{d}{dx} f(x)$ ، y' ، $f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وتسمى المبادئ الأولية للتفاضل

مثال: إذا كانت $f(x) = x^2$ أوجد $f'(x)$ من المبادئ الأولية

الحل: مربع الأول + 2×الأول×الثاني + مربع الثاني

$\therefore f(x) = x^2$

$\therefore f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\overset{\text{مشترك}}{\Delta x}(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

بالتعويض

جبرياً: قاعدة (١) إذا كانت $y = x^n$ فإن $\left(\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}\right)$

ننزل الأس مضروباً X وننقص الأس 1

مثال: أوجد المشتقة الأولى للدوال الآتية

1) $y = x^5$ $\quad \frac{dy}{dx} = 5x^4$

2) $y = x^{-3}$ $\quad \frac{dy}{dx} = -3x^{-4}$

3) $y = x^{1/2}$ $\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

4) $y = 5$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

5) $y = \frac{3}{4}$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

6) $y = 3x^4$ $\quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3 \times 4 x^3 = 12x^3$

7) $y = 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 + 7x + 20$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \overset{4\times 3}{12}x^3 + \overset{3\times 5}{15}x^2 - \overset{2\times 2}{4}x + 7$$

إذا كانت $y = [f(x)]^n$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\text{الأس}\times}{n}\underset{\text{(الدالة)}}{[f(x)]}^{n-1} \cdot \underset{\times\text{مشتقة الداخل}}{f'(x)}$$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = (2x^2+5)^8$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \overset{\text{الأس}}{8}(2x^2+5)^7 \cdot 4x = 32x(2x^2+5)^7$$

إذا كانت $y = (f(x) \cdot g(x))$ ضرب دالتين فإن

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

= مشتقة الأولى × الثانية + مشتقة الثانية × الأولى

مثال: إذا كانت $y = (x^2+1)(2x^3-2)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2x(2x^3-2) + 6x^2(x^2+1)$$

$$= 4x^4 - 4x + 6x^4 + 6x^2 = 10x^4 + 6x^2 - 4x$$

إذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ قسمة دالتين

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

(المقام × مشتقة البسط − البسط × مشتقة المقام) / مربع المقام

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-4}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3x-4)(2) - (2x+5)(3)}{(3x-4)^2} = \frac{6x - 8 - 6x - 15}{(3x-4)^2} = \frac{-23}{(3x-4)^2}$$

إذا كانت $y = \frac{c}{f(x)}$ (عدد) فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{-c \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$ (مشتقة المقام × العدد) / (المقام)²

مثال أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{3}{x^2-2}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3(2x)}{(x^2-2)^2} = \frac{-6x}{(x^2-2)^2}$$

إذا كانت $y = f(u)$ ، $u = g(x)$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

قانون السلسلة

مثال إذا كانت $y = u^2 + 5u$ ، $u = x + 3$ أوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل $\frac{dy}{du} = 2u + 5$ ، $\frac{du}{dx} = 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u+5)(1) =$$

نعوض عن قيمة u

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2(x+3) + 5 = 2x + 6 + 5 = 2x + 11$$

المشتقات العليا

— المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ أو y' المشتقة الثانية y'' أو $\frac{d^2y}{dx^2}$

مثال أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5x^3 - 4x + 1$

الحل

$$y' = 4x^3 + 15x^2 - 4$$

$$y'' = 12x^2 + 30x$$

$$y''' = 24x + 30$$

(١٧)

مشتقة الدالة الأسية

— إذا كانت $y=e^{u}$ حيث $u=f(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx}=e^{u}\cdot\frac{du}{dx}$$ = الدالة الأسية × مشتقة الأس

مثال: $y=e^{x^2+2x+1}$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$\frac{dy}{dx}$ = مشتقة الأس × الدالة الأسية $= e^{x^2+2x+1}(2x+2) = (2x+2)\cdot e^{x^2+2x+1}$

* إذا كانت $y=a^{x}$ (عدد) فإن

$$\frac{dy}{dx}=a^{x}\cdot \ln a$$

الدالة × مشتقة الأس × ln العدد الأساسي

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من

1) $y=3^{x}$

الحل $\frac{dy}{dx}$ = الدالة × مشتقة الدالة × ln العدد الأساسي

$= 3^{x}(1)\ln 3 = 3^{x}\ln 3$

2) $y=9^{2x^2}$

$\frac{dy}{dx}$ = الدالة × مشتقة الدالة × ln العدد الأساسي $= 9^{2x^2}(4x)\ln 9$

مشتقة الدوال اللوغاريتمية

— إذا كانت $y=\ln x$ فإن

$$\frac{dy}{dy}=\frac{1}{x}$$ $= \frac{1}{\text{الدالة}}$ × مشتقة الدالة

مثال: إذا كانت $y=\ln(1+x^2)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{الدالة}}$ × مشتقة الدالة $=\frac{1}{1+x^2}(2x)=\frac{2x}{1+x^2}$.

لاحظ: إذا كانت $y=\log_{a} x$ (العدد) فإن $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln a}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{الدالة}}\times(\text{مشتقة الدالة})\frac{1}{\ln \text{العدد}}$

مثال: أوجد $\frac{dy}{dx}$ لكل من الدوال التالية

1) $y=\log_{2} x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}(1)\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{x\ln 2}$

2) $y=\log_{2}(1+x^2)$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\text{الدالة}}(\text{مشتقة الدالة})\left(\frac{1}{\ln \text{العدد}}\right)$

$=\frac{1}{1+x^2}(2x)\frac{1}{\ln 2}=\frac{2x}{(1+x^2)\ln 2}$

(١٧)

مشتقة الدوال المثلثية

① إذا كانت $y = \sin x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (مشتقة الزاوية) $\cos$ (الزاوية) مشتقة الزاوية

مثال إذا كانت $y = \sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ الحل

$\frac{dy}{dx} = (\cos$ الدالة) (مشتقة الدالة) $= \cos 4x\,(4) = 4\cos 4x.$

② إذا كانت $y = \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\sin$ (الزاوية) (مشتقة الزاوية)

مثال إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$ الحل

$\frac{dy}{dx} = -\sin 5x\,(5) = -5\sin 5x$

(لاحظ) إذا كانت $y = \cos^2 x$ ... الدالة المثلثية فإن

$\frac{dy}{dx} =$ (أس الدالة المثلثية) (الدالة المثلثية بنقص أس) (مشتقة الدالة بدون الأس)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\cos x \sin x.$

إذا كانت $y = \sin x \cos x$ فإن

$\frac{dy}{dx} =$ (تفاضل) الأولى $\times$ مشتقة الثانية $+$ الثانية $\times$ مشتقة الأولى

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية

1) $y = \tan^2 x$

$\frac{dy}{dx} = 2\tan x \sec^2 x$ (1)

2) $y = \cot^3(2x+1) \therefore \frac{dy}{dx} = 3\cot^2(2x+1)\left[-\csc^2(2x+1)\right]\cdot 2$

$= 3\cot^2(2x+1)\cdot\left[-\csc^2(2x+1)\right]\cdot 2$

$= -6\cot^2(2x+1)\cdot\csc^2(2x+1)$

3) $y = \sec(x+1)$ $\frac{dy}{dx} = \sec(x+1)\cdot\tan(x+1)\,(1)$

4) $y = \csc 2x$ $\frac{dy}{dx} = -\csc 2x \cdot \cot 2x\,(2)$

$= -2\csc 2x \cot 2x.$

1) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2$ (الزاوية) (مشتقة الزاوية)

2) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (مشتقة الزاوية)

3) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$= -\csc^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$ (مشتقة الزاوية)

(١١)

مشتقة الدوال المثلثية

1) إذا كانت $y = \sin x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \cos x$ (مشتقة الزاوية)

مثال: إذا كانت $y = \sin 4x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = (\cos \text{الدالة})(\text{مشتقة الزاوية}) = \cos 4x\,(4) = 4\cos 4x.$

2) إذا كانت $y = \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\sin$ الزاوية (مشتقة الزاوية)

مثال: إذا كانت $y = \cos 5x$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

الحل: $\frac{dy}{dx} = -\sin 5x\,(5) = -5\sin 5x$

لاحظ: إذا كانت $y = \cos^2 x$ مربع الدالة المثلثية فإن

$\frac{dy}{dx} =$ (الأس) (الدالة المثلثية بدون أس) (مشتقة الدالة المثلثية)

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -2\cos x \sin x.$

* إذا كانت $y = \sin x \cos x$ فإن

$\frac{dy}{dx} =$ الأول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الأول

$\therefore \frac{dy}{dx} = \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$

* 1) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$ (مشتقة الزاوية)

2) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$ (مشتقة الزاوية)

3) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

4) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

أمثلة: أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدوال الآتية

1) $y = \tan^2 x$

$\frac{dy}{dx} = 2\tan x \sec^2 x$ (1)

2) $y = \cot^3(2x+1) \therefore \frac{dy}{dx} = 3\cot^2(2x+1)[-\csc^2(2x+1)]$

$= 3\cot^2(2x+1)\cdot[-\csc^2(2x+1)]\cdot 2$

$= -6\cot^2(2x+1)\cdot\csc^2(2x+1)$

3) $y = \sec(x+1)$, $\frac{dy}{dx} = \sec(x+1)\cdot\tan(x+1)(1)$

4) $y = \csc 2x$, $\frac{dy}{dx} = -\csc 2x \cdot \cot 2x\ (2)$

$= -2\csc 2x \cot 2x.$

C

التكامل

قواعد التكامل

(*) $\int dx = x + C$

2) $\int a\,dx = ax + C$

مثال: أوجد $\int 5\,dx$

الحل: $\int 5\,dx = 5x + C$

مثال: $\int (7x+3)\,dx = \frac{7x^2}{2} + 3x + C$

3) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ نزيد الأس واحد ونقسم المقدار على الأس الجديد

مثال: أوجد $\int 3x^2\,dx$ $\cancel{\int (7x+3)\,dx}$

$\int 3x^2\,dx = \frac{3x^3}{3} + C = x^3 + C$

$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

مثال: أوجد $\int (3\sin x + 2x)\,dx$

الحل: $\int (3\sin x + 2x)\,dx = -3\cos x + \frac{2x^2}{2} + C = -3\cos x + x^2 + C$

تابع قواعد التكامل

* $\int e^x\,dx = e^x + C$
* $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$
* $\int \cos x\,dx = \sin x + C$
* $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$
* $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
* $\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$
* $\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

أمثلة

* $\int (x + \sec^2 x)\,dx = \frac{x^2}{2} + \tan x + C$
* $\int (x^{\frac{1}{2}} + 4)\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1)} + 4x + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x + C$
* $\int (4e^x + x^{-1})\,dx = \int (4e^x + \frac{1}{x})\,dx = 4e^x + \ln|x| + C$

$$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int 3(x^3+4)^4 x^2\,dx = \frac{(x^3+4)^5}{5} + C$$

$$\int (x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\int 2(x^2+1)^3 x\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^4}{4} + C = \frac{(x^2+1)^4}{8} + C$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$$

$$\int \sin^2 x \cos x\,dx = \frac{\sin^3 x}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

اذا كان $\int [f(x)]^n \cdot f'(x)\,dx$ وكانت $n=-1$ بناتج لوغ
$\ln|f(x)| + C$

$$\int x^3 (1+x^4)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}\int 4x^3(1+x^4)^{-1}\,dx = \frac{1}{4}|1+x^4| + C$$

$$\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \int 2x(1+x^2)^{-1}\,dx = |1+x^2| + C$$

$$\boxed{\int f'(x)\cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C}$$

$$\int x^2 e^{3x^3}\,dx = \frac{1}{9}\int 9x^2 e^{3x^3}\,dx = \frac{1}{9}e^{3x^3} + C$$

$$\int x e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\int e^{\sin x}\cdot\cos x\,dx = e^{\sin x} + C$$

٢٢

حل المعادلات التفاضلية

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=xy^{-2}$ الحل

$\frac{dy}{dx}=xy^{-2} \Rightarrow \frac{x}{y^2}$ ∴ $y^2\,dy=x\,dx$ بإجراء التكامل للطرفين

$\int y^2dy=\int x\,dx$ $\boxed{\therefore \frac{y^3}{3}=\frac{x^2}{2}+c}$

مثال: حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=4x^3y^3$ الحل

$\frac{dy}{dx}=4x^3y^3=\frac{4x^3}{y^{-3}}$

∴ $y^{-3}dy=4x^3dx$ بإجراء التكامل للطرفين $\int y^{-3}dy=\int 4x^3dx$

$\therefore \frac{y^{-2}}{-2}=\frac{4x^4}{4}+c$ $\boxed{\therefore \frac{y^{-2}}{-2}=x^4+c}$

التكامل المحدود: أوجد $\int_1^3 x^3dx$ الحل

$$\int_1^3 x^3dx=\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=\frac{81-1}{4}=\frac{80}{4}=20$$

بعض خواص التكامل المحدود

① $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

نخرج العدد خارج التكامل ونشتغل كالعادة

مثال:

$$\int_1^2 4x^3dx=4\int_1^2 x^3dx=4\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2=\left[x^4\right]_1^2=2^4-1^4=16-1=15$$

② $\int_a^a f(x)dx=0$ مثال: $\int_5^5 3x^2dx=0$

③ $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

مثال:

$$\int_0^2(3x^2+e^x)dx=\int_0^2 3x^2dx+\int_0^2 e^xdx=3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[e^x\right]_0^2$$

$$=\left[x^3\right]_0^2+\left[e^x\right]_0^2=2^3+e^2=8+e^2$$

④ $\int_c^d f(x)dx = -\int_d^c f(x)dx$

مثال إذا كان $\int_2^4 f(x)dx = 8$ فإن $\int_4^2 f(x)dx = -8$

⑤ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ مثال $\int_2^4 x^2dx + \int_4^2 x^2dx = \int_2^2 x\,dx = 0$

6) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi}$

$= -\cos\pi - (-\cos 0) = -(-1)+1 = 2$

7) $\int_0^2 (2x+1)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2(2x+1)^3 dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{(2x+1)^4}{4}\right]_0^2 = \frac{1}{8}[2(2)+1)^4 - 1$

$= \frac{1}{8} \times 624 = 78$

إذا كان $\int_1^3 f(x)dx = 10$ و $\int_1^2 f(x)dx = 5$

أوجد

1) $\int_2^3 f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx$

$= -5 + 10 = 5$

2) $\int_1^1 f(x)dx = 0$

③ $\int_3^1 f(x)dx = -\int_1^3 f(x)dx = -10$

4) $\int_1^2 6f(x)dx = 6\int_1^2 f(x)dx$

$= 6(5) = 30$

أوجد التكاملات التالية

1) $\int_0^3 2\,dx = [2x]_0^3 = 2(3) - 0 = 6$

2) $\int_0^2 (x+6)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 6x\right]_0^2$

$= \frac{2^2}{2} + 6(2) = \frac{4}{2} + 12 = 2+$

$= 14$

3) $\int_1^3 (3x^2 - 4x - 5)dx$

$= \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} - 5x\right]_1^3 = x^3 - 2x^2 - 5$

$= [3^3 - 2(3)^2 - 5(3)] - [1^3 - 2(1)^2 - 5(1)]$

$= (27 - 18 - 15) - (1 - 2 - 5)$

$= -6 + 6 = 0$

④ $\int_{-2}^{2} (5x+4)dx = \left[\frac{5x^2}{2} + 4x\right]_{-2}^{2}$

$= \left[\frac{5(2)^2}{2} + 4(2)\right] - \left[\frac{5(-2)^2}{2} + 4(-2\right.$

$= [10+8] - [10-8] = 18 - 2 = 16$

⑤ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2$

$= \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$