تحليل الانحدار

يعتبر تحليل الانحدار أكثر طرق التحليل الإحصائى استخداما، حيث يتم من خلاله التنبؤ بقيمة احد المتغيرات (المتغير التابع) عند قيمة محددة لمتغير أو متغيرات أخرى (المتغيرات المستقلة).

وتسمى العلاقة الرياضية التى تصف سلوك المتغيرات محل الدراسة والتى من خلالها يتم التنبؤ بسلوك احد المتغيرين عند معرفة الاخر بمعادلة خط الانحدار.

وهناك صورتان أساسيتان لمعادلة الانحدار وهما:

الصورة الأولى: معادلة انحدار y|x (التى يطلق عليها معادلة انحدار y على x)

الصورة الثانية: معادلة انحدار x|y (التى يطلق عليها معادلة انحدار x على y)

معادلة انحدار y على x

وهى تلك المعادلة التي يطلق عليها معادلة انحدار y | x. أي تتحدد قيمة المتغير y تبعا لقيمة المتغير x لذلك يمكن التعبير عن تلك العلاقة الخطية بالمعادلة التالية:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

حيث يسمى b_0 ثابت الانحدار او الجزء الثابت او الجزء المقطوع من محور الصادات بينما b_1 يطلق عليها معامل الانحدار أو معدل التغير في الدالة .

ولتحديد المعادلة الدالة على العلاقة بين المتغيرين y و x لابد من تقدير قيمة للثابتين و الذين يمكن تقديرهما من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى كما يلى:

تقوم نظرية المربعات الصغرى على تدنية مجموع مربعات الأخطاء في التقدير إلى اقل حد ممكن.

ويمكن استخدام المعادلات التالية لحساب معامل الانحدار باستخدام طريقة المربعات الصغرى:

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$b_0 = \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n}$$

$$= \bar{y} - b_1 \bar{x}$$

مثال

عند دراسة العلاقة بين عدد غرف المسكن وكمية الكهرباء المستهلكة بالألف كيلو وات فكانت كما يلي:

عدد الغرف x	9	7	10	5	3	7	8	10	4	6
استهلاك كهرباء y	12	9	14	6	4	7	10	10	5	8

المطلوب أوجد:

١. معادلة انحدار y على x ؟
٢. تحديد معدل التزايد أو التناقص في استهلاك الكهرباء؟
٣. ماهو الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من ٨ غرف؟

الحل:

نقوم بعمل الجدول التالى:

y^2	x^2	xy	y	x
144	81	108	12	9
81	49	63	9	7
196	100	140	14	10
36	25	30	6	5
16	9	12	4	3
49	49	49	7	7
100	64	80	10	8
100	100	100	10	10
25	16	20	5	4
64	36	48	8	6
811	529	650	85	69

من خلال الجدول السابق يمكن تقدير معادلة انحدار x على y كما يلي:

اولاً- يتم تقدير قيمة معامل الانحدار b_1

$$b_1 = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum x^2 - \left(\sum x\right)^2} = \frac{10(650) - (69)(850}{10(529) - (69)^2} = 1.2003$$

وبالتالى يكون معدل التزايد فى استهلاك الكهرباء هو لأنها موجبة ويساوى1.2003 أى أن كل غرفة بالمسكن تعمل على زيادة استهلاك الكهرباء بمقدار 1200.3 كيلو وات.

ثانياً – تقدير قيمة b_0

$$b_0 = \frac{\sum y}{n} - b_1 \frac{\sum x}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{69}{10} = 6.9 \quad , \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{85}{10} = 8.5$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 8.5 - (1.2003)(6.9) = 0.21793$$

معادلة انحدار x على y هي:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x$$

$$\hat{y} = 0.21793 + 1.2003\ x$$

الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من ٨ غرف:
يتم التعويض فى معادلة الانحدار التى سبق إيجادها عندما تكون x = ٨ كما يلي:

$$\hat{y} = 0.21793 + 1.2003\,(8) = 9.8203$$

أى أن الاستهلاك المتوقع لمسكن مكون من 8 غرف هو 9820.3 كيلو وات

معادلة انحدار x على y

وهى التى يطلق عليها معادلة انحدار x | y. أى تتحدد قيمة المتغير x تبعا لقيمة المتغير y لذلك يمكن التعبير عن تلك العلاقة الخطية بالمعادلة التالية:

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y$$

حيث يسمى c_0 ثابت الانحدار او الجزء الثابت بينما c_1 يطلق عليها معامل الانحدار أو معدل التغير فى الدالة

ولتحديد المعادلة الدالة على العلاقة بين المتغيرين x و y لابد من تقدير قيمة للثابتين c_0 و c_1 الذين يمكن تقديرهما من خلال تطبيق طريقة المربعات الصغرى فتكون النتيجة كما يلي:

$$c_1 = \frac{n\sum xy - \sum x \sum y}{n\sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$c_0 = \frac{\sum x}{n} - c_1 \frac{\sum y}{n}$$
$$= \bar{x} - c_1 \bar{y}$$

مثال

باستخدام بيانات المثال السابق لعدد الغرف واستهلاك الكهرباء، وعلى اعتبار هو المتغير المستقل وعدد الغرف هو المتغير التابع، أوجد التالي:

عدد الغرف x	9	7	10	5	3	7	8	10	4	6
استهلاك كهرباء y	12	9	14	6	4	7	10	10	5	8

المطلوب أوجد:

١. معادلة انحدار x على y ؟
٢. ماهو عدد الغرف المتوقع لأستهلاك 25000 كيلو وات ؟

الحل:

نقوم بعمل الجدول التالى:

y^2	x^2	xy	y	x
144	81	108	12	9
81	49	63	9	7
196	100	140	14	10
36	25	30	6	5
16	9	12	4	3
49	49	49	7	7
100	64	80	10	8
100	100	100	10	10
25	16	20	5	4
64	36	48	8	6
811	529	650	85	69

من خلال الجدول السابق يمكن تقدير معادلة انحدار x على y كما يلي:

اولاً- يتم تقدير قيمة معامل الانحدار c_1

$$c_1 = \frac{n\sum xy - \left(\sum x\right)\left(\sum y\right)}{n\sum y^2 - \left(\sum y\right)^2} = \frac{10\left((650\right) - (69)(85)}{10\,(811) - (85)^2} \cong 0.718$$

ثانياً – تقدير قيمة c_0

$$c_0 = \frac{\sum x}{n} - c_1 \frac{\sum y}{n}$$

$$c_0 = \bar{x} - c_1\bar{y} = 6.9 - 0.718\,(8.5) \cong 0.797$$

معادلة انحدار x على y هي:

وبالتالي تكون معادلة انحدار x على y

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y$$

$$\hat{x} = c_0 + c_1 y \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = 0.797 + 0.718\, y$$

إذا كان الاستهلاك للمنزل ٢٥٠٠٠ كيلوات

فإن عدد الغرف المتوقعة هو:

يتم التعويض في معادلة الانحدار التي سبق إيجادها عندما تكون y = ٢٥ كما يلي:

$$\hat{x} = 0.797 + 0.718(25) = 18.747 \cong 19$$

أي أنه إذا كان استهلاك الكهرباء في احد المنازل ٢٥٠٠٠ كيلوات فإن عدد الغرف المتوقع في هذا المنزل = 19 غرفة تقريبا.