طريقة لاغرانج في الاستيفاء الداخلي:

لتكن الدالة $y=f(x)$ معرفة بالجدول التالي:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$y_0=f(x_0)$	y_1	y_2		y_n

ان صيغة لاغرانج العامة لمتعددات الحدود الملائمة للدالة $y=f(x)$ تعطى بالشكل

$$P_o(x)=\sum_{j=0}^{n} L_j(x)f(x_j)$$

$$=L_0(x)f(x_0)+L_1(x)f(x_1)+\dots+L_n(x)f(x_n)$$

حيث $L_j(x)$ متعددات من الدرجة n وتسمى متعددات لاغرانج وتعطى بالعلاقة:

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_n)}$$

4) =

بدون (x_j-x_j) لانه صفر

مثال : باستخدام صيغة لاجرانج عين الحدودية الملائمة للدالة $f(x)$ والمعرفة بالجدول:

	x_0	x_1
x	1	3
$f(x)$	4	-2

الحل : $\boxed{n=1}$

$x_0 = 1 \quad , x_1 = 3$

$f(x_0) = 4 \quad , f(x_1) = -2$

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{x-3}{1-3} = -\frac{1}{2}(x-3)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{x-1}{3-1} = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$P_1(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1)$$

$$= -\frac{1}{2}(x-3)\,4 + \frac{1}{2}(x-1)(-2)$$

5) $= -3x + 7$ دالة من الدرجة الأولى

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_j - x_i)} ; j = 0,1,2..n$$

ان قيمة الحدودية $P_n(x)$ عند اي نقطة

من نقط الاندكاز $x_i \; (i = 0,1,..n)$ تساوي

قيمة الدالة $f(x)$ أي أن:

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n} L_j(x_i) f(x_j)$$

$$= L_0(x_i) f(x_0) + L_1(x_i) f(x_1) + \cdots$$

$$+ L_i(x_i) f(x_i) + \cdots + L_n(x_i) f(x_n)$$

$$= f(x_i)$$

هذا يعني أن الحدودية $P_n(x)$

حدودية لاغرانج هي حدودية ملائمة

للدالة $f(x)$.

6)

مثال (2): باستخدام صيغة لاغرانج عيني الحدودية الملائمة للدالة $f(x)$ المعرفة بالجدول:

	x_0	x_1	x_2
x	-1	0	2
$f(x)$	2	-1	5

ثم أوجدي القيمة التقريبية لـ $f(1)$.

الحل: $n=2$

$$P_2(x) = L_0(x) f(x_0) + L_1(x) f(x_1) + L_2(x) f(x_2) \quad (*)$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}$$

$$L_0(x) = \frac{x(x-2)}{-(-3)} = \frac{1}{3} x(x-2)$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}$$

$$L_1(x) = -\frac{1}{2}(x+1)(x-2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x)}{(2+1)(2)}$$

$$L_2(x) = \frac{1}{6}x(x+1)$$

بالتبديل بجميع القيم بالعلاقة (*) نجد :

$$P_2(x) = \frac{1}{3}x(x-2)(2) - \frac{1}{2}(x+1)(x-2)(-1)$$

$$+ \frac{1}{6}x(x+1)5 = 2x^2 - x - 1$$

لما

$$P_2(x) = 2x^2 - x - 1 \qquad \forall x$$

بقي حساب $f(1)$ ؟ :

$$P_2(1) = f(1) = 2 - 1 - 1 = 0$$

8)

تقدير الخطأ المرتكب بطريقة لاغرانج في الاستيفاء الداخلي:

نظرية: اذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة وقابلة للاشتقاق $(n+1)$ مرة ونفرض أن النقطة $x=\bar{x}$ واقعة داخل الفترة التي تكون النقاط $x_0, x_1, \dots, x_n$ بحيث أن

$$\bar{x} \neq x_i \; ; \; i=0,1,2,\dots n$$

فان الخطأ المرتكب يُعطى بالعلاقة التالية:

$$e(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\mu)\, w(\bar{x})}{(n+1)!}$$

حيث

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

وُ $P_n(x)$ كثيرة الحدود الملائمة للدالة $f(x)$ في النقط $x_i \; i=0,1,\dots,n$

مثال: (حبيبا) موجود في الكتاب ص 202

أوجدي الحدودية الملائمة للدالة:

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

والمعرفة بالجدول التالي:

	x_0	x_1	x_2
x	2	2,5	4
$y=f(x)$	0,5 $f(x_0)$	0,4 $f(x_1)$	0,25 $f(x_2)$

$n=2$

ثم اوجدي القيمة التقريبية لـ $f(3)$

$\boxed{\text{وأوجدي الخطأ المرتكب}}$

الحل: باتباع طريقة المثال السابق تماماً خطوة خطوة نجد أن الحدودية (كمية خدود لاغرانج) هي

$$P_2(x) = 0,05\,x^2 - 0,425\,x + 1,15$$

القيمة التقريبية لـ $f(3)$ هي:

$$f(3) = P_2(3) = 0,05(9) - 0,425(3) + 1,15$$
$$= 0,325$$

حساب الخطأ المرتكب :

لدينا $n=2$ ومنه :

$$y = f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

وحسب النظرية :

$$f^{(n+1)}(\mu) = f'''(\mu) = -\frac{6}{\mu^4}$$

أي : $2 < \mu < 4 \Leftarrow$ تنقلب جهة المتراجحة عندما نأخذ المقلوب

$\Leftarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{\mu} < \frac{1}{2}$ بالرفع للقوة 4

نجد : $\frac{1}{4^4} < \frac{1}{\mu^4} < \frac{1}{2^4} \Rightarrow \frac{6}{256} < \frac{6}{\mu^4} < \frac{6}{16}$

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$W(3) = (3-2)(3-2,5)(3-4) = -0,5$$

فالخطأ :

$$|e(3)| \leq \left(\frac{6}{16} / 3!\right) |-0,5| = 0,031$$