

المحاضرة الرابعة – الأسبوع الثاني

نظرية الاحتمالات

قوانين ديمورغان De Morgan's Laws

من خواص العمليات الجبرية على المجموعات ما يسمى بقوانين ديمورغان والتي تنص على أن

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

ومنها نستنتج أن:

$$P(\overline{(A \cup B)}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$P(\overline{(A \cap B)}) = P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

مثال: إذا كان $P(A \cup B) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(A) = 0.3$

أوجد ما يلي:

- 1- احتمال حدوث الحادتين معا؟
- 2- عدم حدوث أي من الحادتين A, B؟
- 3- عدم حدوث الحادث A أو الحادث B؟
- 4- حدوث الحادث A وعدم حدوث الحادث B؟
- 5- حدوث الحادث B وعدم حدوث الحادث A؟
- 6- احتمال حدوث الحادث A أو الحادث B إذا كان A, B حادثين منفصلين؟

الحل:

$$1- P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$0.5 = 0.3 + 0.4 - P(A \cap B)$$

$$\rightarrow P(A \cap B) = 0.7 - 0.5 = 0.2$$

$$2- P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{(A \cup B)}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$3- P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{(A \cap B)}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8$$

$$4- P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.3 - 0.2 = 0.1$$

$$5- P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B) = 0.4 - 0.2 = 0.2$$

$$6- P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.4 = 0.7$$

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

يعرف الاحتمال الشرطي على انه احتمال وقوع الحدث A مشروطا بوقوع حادث آخر وليكن B, ويرمز للاحتمال الشرطي بالرمز $P(A/B)$ ويعرف كالآتي:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) > 0$$

وكذلك يمكن تعريف الاحتمال الشرطي للحدث B مشروطا بحدوث الحادث A على النحو الآتي:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) > 0$$

مثال: رميت قطعة نقد ثلاث مرات, فإذا رمزنا لظهور الصورة بالحرف H وظهور الكتابة بالحرف T. إذا علم أن الوجه الأول في الرمية الأولى H فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H,H؟
الحل: نلاحظ ان الفضاء العيني يساوي:

$$S = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,T,T), (T,T,H), (T,H,T), (T,H,H)\}$$

نفرض أن A يمثل الحادث " ظهور H في الرمية الأولى "

B تمثل الحادث ظهور الوجهان H,H في الرمية الثانية والثالثة.

المطلوب: $P(B/A)$ ؟

بالنظر إلى فضاء العينة S فإن

$$P(A \cap B) = \frac{1}{8}$$

وكذلك

$$P(A) = \frac{4}{8}$$

ومن قانون الاحتمال الشرطي, نحصل على

$$P(B/A) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}} = \frac{1}{4}$$

سؤال: اعتمادا على المثال السابق, إذا علمت أن الوجه الأول كان T فما احتمال أن يكون الوجهان الآخران H,T?

قاعدة الضرب Multiplication Rule

من خلال تعريف الاحتمال الشرطي نجد أن

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B)$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

حيث يطلق على هذه القوانين ما يسمى بقوانين الضرب ويستفاد منها في احتساب احتمالات التقاطع إذا علمنا أن الاحداث مشروطة بعضها ببعض.

مثال: إذا كان $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, وكان $P(A/B)=0.4$ أوجد

$$P(A \cap B) \text{ (أ)}$$

$$P(B/A) \text{ (ب)}$$

الحل:

(أ) من قاعدة الضرب

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

(ب) من قانون الاحتمال الشرطي

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2$$

الحوادث المستقلة Independent Events

تعريف: يقال بأن الحادثان A, B حادثان مستقلان إذا كان حصول احدهما لا يؤثر على حدوث الآخر, أي أن:

$$P(A/B) = P(A)$$

لاحظ أن حدوث A لا يتأثر بوجود الحادث B, وكذلك

$$P(B/A) = P(B)$$

وبتعويض هذه القيم في قانون الاحتمال الشرطي

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},$$

نحصل على

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

مثال: إذا كان A, B حادثين مستقلين وكان $P(A)=0.4$, $P(B)=0.6$
أوجد:

$$1 - P(A \cap B)$$

$$2 - P(\overline{A \cap B})$$

الحل: بما أن الحادثين مستقلين, إذن

$$1 - P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.6 = 0.24$$

$$2 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0.24 = 0.76$$

مثال: إذا كان $P(A)=0.6$, $P(A/B)=0.6$, $P(B/A)=0.5$, هل الحادثان A, B مستقلان؟ وما احتمال الحادث B؟

الحل:

بما أن $P(A/B) = P(A) = 0.6$ فإن A, B حادثان مستقلان. ومن ذلك نجد أن

$$.P(B)=P(B/A) =0.5$$

تمرين: إذا كان $P(B)=0.8, P(A)= 0.7$

أوجد ما يلي:

- 1- $P(A \cup B)$ إذا كان A, B حادثين مستقلين؟
- 2- $P(A \cup B)$ إذا كان A, B حادثين منفصلين؟
- 3- $P(\overline{A \cap B})$ إذا كان حادثين مستقلين؟
- 4- $P(A/B)$ إذا كان A, B حادثين مستقلين؟
- 5- $P(B/A)$ إذا كان A, B حادثين منفصلين؟

تمرين المحاضرة الثانية

- 1- بكم طريقة يمكن ترتيب كلمة "MISSISSPPI"؟
- 2- بكم طريقة يمكن اختيار رقمين من العدد 3159
أ- مع الترتيب؟
ب- بدون ترتيب؟

تمرين المحاضرة الثالثة

- في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرتين, أوجد احتمال ما يلي:
- 1- ظهور عددين متشابهين
 - 2- ظهور عددين مختلفين
 - 3- ظهور عددين مجموعهما أكبر من 12؟
 - 4- ظهور عددين بحث يكون الأول عدد فردي؟

تمرين المحاضرة الرابعة

إذا كان $P(B)=0.8, P(A)= 0.7$

أوجد ما يلي:

- 1- $P(A \cup B)$ إذا كان A, B حادثين مستقلين؟
- 2- $P(A \cup B)$ إذا كان A, B حادثين منفصلين؟
- 3- $P(\overline{A \cap B})$ إذا كان حادثين مستقلين؟
- 4- $P(A/B)$ إذا كان A, B حادثين مستقلين؟
- 5- $P(B/A)$ إذا كان A, B حادثين منفصلين؟