المحاضرة السابعة

الطرائق غير المباشرة لحل جملة معادلات خطية:

نظيم مصفوفة:

نظيم المصفوفة $A=[a_{ij}]_n$ هو قيمة حقيقية ويرمز للنظيم بالرمز $\|A\|$ ويحقق الشروط التالية:

1) $\|A\| \geq 0 \quad \& \quad \|A\|=0 \Leftrightarrow A=0$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \cdot \|A\| \quad \& \quad \|-A\| = \|A\|$

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$ المتراجحة المثلثية

4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

نظم مشهورة:

$$\|A\|_1 = \max_{i} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

القيمة العظمى لمجموع القيم المطلقة لعناصر الأعمدة

2- $\|A\|_\infty = \max_{j} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$

القيمة ~~المطلقة~~ العظمى لمجموع

القيم المطلقة لعناصر الصفوف

3- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a^2_{ij}}$

نربع و نجمع جميع العناصر

مثال: اوجد $\|A\|_2 , \|A\|_\infty , \|A\|_1$

للمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = \max_{i}(18, 11, 8) = 18$$

$$\|A\|_\infty = \max_{j}(11, 8, 18) = 18$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{36+0+25+9+16+1+81+49+4} = \sqrt{221} = 14.866$$

نظيم متجه للبكتر :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

~~نظيم المتجه~~ متجه نعرف مايلي :

1) $\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

مجموع القيم المطلقة

2) $\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} (|x_i|) = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$

تعظيم القيم المطلقة العظمى

3) $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

$$= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

مثال: اوجد $\|X\|_2, \|X\|_\infty, \|X\|_1$ للمتجه

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_i| = |2| + |-3| + |0| + |4|$$

$$= 2 + 3 + 0 + 4 = 9$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le 4}(|x_i|) = \max(2, 3, 0, 4) = 4$$

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} x_i^2} =$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 0 + 16} = \sqrt{29}$$

$$= 5,385$$

طريقة جاكوبي:

طريقة جاكوبي:

مثال: المصفوفة المهيمنة:

$$A = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 15 & 25 & -3 \\ -2 & 4 & 10 \end{bmatrix}$$

العناصر المهيمنة في السهم القطرية

$$|a_{11}| = |-7| = 7 > |2| + |1| = 2 + 1 \rightarrow$$

$$7 > 3$$

$\rightarrow a_{11}$ مهيمن

$$|a_{22}| = |25| = 25 > |-3| + |15|$$

$$25 > 3 + 15 = 18$$

$\rightarrow a_{22}$ مهيمن

$$|a_{33}| = 10 > 4 + 2 = 6$$

$\rightarrow a_{33}$ مهيمن

اذن ان هذه المصفوفة مهيمنة لأن جميع عناصرها القطرية مهيمنة.

مثال: أوجدي حل جملة المعادلات الخطية التالية بطريقة جاكوبي:

$$x_1+5x_2-x_3=7$$

$$8x_1+x_2+x_3=26$$

$$x_1-x_2+5x_3=7$$

$X^0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^0\\x_2^0\\x_3^0\end{bmatrix}$ حيث التقريب الابتدائي

الابتدائي أول تقريبة صفر

وبحيث $\varepsilon=0,09$

$\boxed{\text{الحل:}}$ ان مصفوفة العوامل والتي هي

$$\begin{bmatrix}1&5&-1\\8&1&1\\1&-1&5\end{bmatrix}$$

ليست مهيمنة لأن:

$|a_{11}|=1\not>5+1,\ |a_{22}|=1\not>8+1$

$|a_{33}|=5>1+1$

نعيد كتابة المعادلات بحيث تصبح مصفوفة

الأمثال مصفوفة مهيمنة ولتكن:

$$8x_1 + x_2 + x_3 = 26$$

$$x_1 + 5x_2 - x_3 = 7$$

$$x_1 - x_2 + 5x_3 = 7$$

$a_{11} = 8 > 1+1$, $a_{22} = 5 > 1+1$

$a_{33} = 5 > 1+1$

إذن المصفوفة مهيمنة، ولذلك يمكن حلها باستخدام طريقة جاكوبي:

$$x_1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2 - \frac{1}{8}x_3$$

$$x_2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_3$$

$$x_3 = \frac{7}{\;} - \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{5}x_2$$

$$\alpha = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \frac{26}{8} \\ \frac{7}{5} \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$$

مصفوفة التكرار

$\boxed{\text{يجب}}$ أن يكون نظيم مصفوفة التكرار

α ✓ أصغر من الواحد أي أن :

$$\max_{1 \le j \le 3} \sum_{i=1}^{3} |a_{ij}| = \boxed{\text{Max}(\ )}$$

مجا الأعمدة

$$= \max_j \left[\underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}, \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{5}}, \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right]$$

$$= \max_j \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right] = \frac{2}{5} < 1 \checkmark$$

~~power point~~

~~power paper~~ (4)

أي أن شرط مصفوفة التكرار تحقق

$$x_1^1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}x_2^0 - \frac{1}{8}x_3^0$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^0 + \frac{1}{5}x_3^0$$

$$x_3^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}x_1^0 + \frac{1}{5}x_2^0$$

ان التقريب من المرتبة ١ سيعتمد على التقريب من المرتبة صفر

$$x_1^1 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1) - \frac{1}{8}(1) = 3$$

$$x_2^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(1) = 1,4$$

$$x_3^1 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(1) + \frac{1}{5}(1) = 1,4$$

اذاً التقريب من المرتبة الاولى هو :

$$X^1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1,4 \\ 1,4 \end{bmatrix}$$

التقريب من المرتبة 2

$$x_1^2 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8} x_2^1 - \frac{1}{8} x_3^1$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} x_1^1 + \frac{1}{5} x_3^1$$

$$x_3^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} x_1^1 + \frac{1}{5} x_2^1$$

$$x_1^2 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1,4) - \frac{1}{8}(1,4) = 2,9$$

$$x_2^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}(1,4) = 1,08$$

$$x_3^2 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(3) + \frac{1}{5}(1,4) = 1,08$$

اذن حصلنا على التقريب من المرتبة الثانية:

وهو:

$$X^2 = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,9 \\ 1,08 \\ 1,08 \end{bmatrix}$$

ويتوقف الحساب اذا تحقق الشرط:

$$|x^2 - x^1| < 0,09$$

أي

$$|x_1^2 - x_1^1| = |2,9 - 3| \not< 0,09$$

$$|x_2^2 - x_2^1| = |1,08 - 1,4| \not< 0,09$$

$$|x_3^2 - x_3^1| = |1,08 - 1,4| \not< 0,09$$

لذلك نتابع الحل ونأخذ التقريب

$\boxed{\text{الثالث}}$:

$$x_1^3 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8} x_2^2 - \frac{1}{8} x_3^2$$

$$x_2^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} x_1^2 + \frac{1}{5} x_3^2$$

$$x_3^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5} x_1^2 + \frac{1}{5} x_2^2$$

$$x_1^3 = \frac{26}{8} - \frac{1}{8}(1,08) - \frac{1}{8}(1,08) = 2,98$$

$$x_2^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2,9) + \frac{1}{5}(1,08) = 1,036$$

$$x_3^3 = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}(2,9) + \frac{1}{5}(1,08) = 1,036$$

إذاً التقريب الثالث هو :

$$X^3 = \begin{bmatrix} 2,98 \\ 1,036 \\ 1,036 \end{bmatrix}$$

ندرس الآن تحقق الشرط فنجد :

$$|x_1^3 - x_1^2| = |2,98 - 2,9| = 0,08 < 0,09$$

$$|x_2^3 - x_2^2| = |1,036 - 1,08| = 0,04 < 0,09$$

$$|x_3^3 - x_3^2| = |1,036 - 1,08| = 0,04 < 0,09$$

إذن من أن حل المعادلات والمحقق للشرط هو :

$$X = X^3 = \begin{bmatrix} 2,98 \\ 1,036 \\ 1,036 \end{bmatrix}$$