- حل الانظمة الخطية -

نشأت فكرة نظام يتكون من المعادلات الخطية الجبرية من تطبيقات عديدة له في الرياضيات والاقتصاد والهندسة والعلوم الفيزيائية والعلوم الاجتماعية.

تنقسم الطرق العددية لحل الأنظمة الخطية إلى قسمين:

١- طرق مباشرة

هذه الطرق تعطي الحل المضبوط في عدد محدود من العمليات الحسابية وتدعى الطريقة الأساسية هنا بطريقة غاوس للحذف.

٢ـ طرق تكرارية :

هذه تعطي متسلسلة من التقريبات باستخدام تقريب ابتدائي ويتم ايقاف الطريقة على أساس يكتشف الدقة المطلوبة ومن أمثلة هذه الطرق طريقة جاكوبي وطريقة كاوس سيدل

طريقة الحذف :

يكون المطلوب كتابة المعادلات الخطية والمطلوب حلها بشكل مصفوفي :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

a_{ij}

(1) $\quad - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$

الصف ، والعمود

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n$$

إن المعادلات (1) تكتب بالشكل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

أو بالشكل:

$$A \cdot X = B$$

حيث:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$ مصفوفة العوامل أو مصفوفة الأمثال

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ الشعاع المجهول (المتجه)

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$ الطرف الثاني المعلوم

- التحويلات الأولية على الصفوف

هناك ثلاثة أنواع من التحويلات هي :

أ - ان ضرب أي معادلة في النظام بثابت لا تتغير الحل لهذا النظام .

$$5x = 10 \longrightarrow x = \frac{10}{5} = 2$$

لنضرب طرفي المعادلة بـ 3 نجد :

$$3(5x) = 3(10) \longrightarrow 15x = 30 \rightarrow x = 2$$

~~ب - يمكن استبدال أي معادلة بـ بمجموعة معادلات كمجموع مضاعف لهذه المعادلات دون أن يؤثر ذلك على الحل.~~

ج - يمكن تبديل ترتيب أي معادلتين دون أن يؤثر ذلك على الحل .

مثال: حل النظام التالي:

$$L_1 : 5x + 2y = 0 \quad (1)$$
$$L_2 : 2x - y = 5 \quad (2)$$

نريد أن نحذف x من النظام

$$2L_1 - 5L_2 \longrightarrow L_2 \quad (4)$$
عدم تغيير
$$L_1 \longrightarrow L_1 \quad (3)$$

وبذلك نحصل على النظام التالي المكافئ:

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} 5x + 2y = 0 & (3) \\ 9y = -25 & (4) \end{array} \right.$$

من (4) نجد: $y = -\frac{25}{9}$ بالتعويض في (3)

$$5x + 2\left(-\frac{25}{9}\right) = 0$$

$$5x = \frac{50}{9} \Rightarrow x = \frac{10}{9}$$

أخيراً فإن حل النظام هو:

$$\left[x = \frac{10}{9} \, , \, y = -\frac{25}{9} \right]$$

طريقة غوص لحل نظام معادلات خطية

مثال: أوجدي بطريقة غوص حل المعادلات:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_2 + 5x_3 = 3$$

$$x_1 + 3x_3 = 6$$

الحل: تعتمد فكرة غوص على انشاء المصفوفة الموسعة المكونة من مصفوفة العوامل والطرف الثاني:

$$\begin{array}{c} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

ونريد الآن الحصول على مصفوفة مثلثية سفلى

$$\begin{array}{c} -l_3 + l_1 \to l_1 \\ -\frac{5}{3} l_3 + l_2 \to l_2 \\ l_3 \to l_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & -4 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

$$-2\ell_2+\ell_1 \to \ell_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & & & 10 \\ -\frac{5}{3} & 1 & 0 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

عناصر القطر الرئيسي

وبذلك نكون قد حصلنا على مصفوفة

تحويل على شكل مصفوفة مثلثية سفلى أي (هي مصفوفة تكون العناصر فوق القطر الرئيسي أصفار) والآن نتحول من شكل

المصفوفي إلى الشكل المعادلاتي:

(أي نظام معادلات خطية)

$$\frac{10}{3}x_1 = 10 \quad (1)$$

$$-\frac{5}{3}x_1 + x_2 = -7 \quad (2)$$

$$x_1 + 3x_3 = 6 \quad (3)$$

$$(1) \to x_1 = 10 \times \left(\frac{3}{10}\right) = 3 \quad \boxed{x_1 = 3}$$

$$-\frac{5}{\cancel{3}}(\cancel{3}) + x_2 = -7 \to x_2 = -7+5$$

$$\boxed{x_2 = -2}$$

$$3 + 3x_3 = 6 \to 3x_3 = 6-3 = 3 \to$$

$$x_3 = 1 \qquad x_3 = 1$$

مثال - أوجدي حل نظام المعادلات التالية وفقاً لطريقة غوص:

$$5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 23$$

$$7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 32$$

$$6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 = 33$$

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 31$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 7 & 10 & 8 & 7 & 32 \\ 6 & 8 & 10 & 9 & 33 \\ 5 & 7 & 9 & 10 & 31 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_1 \to L_1 \\ -\frac{7}{5}L_1 + L_2 \\ -\frac{6}{5}L_1 + L_3 \\ -L_1 + L_4 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\ 0 & 0,2 & -0,4 & 0 & -0,2 \\ 0 & -0,4 & 2,8 & 3 & 5,4 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} 2L_2 + \\ L_3 \end{array}$$

ورشة عمل 1

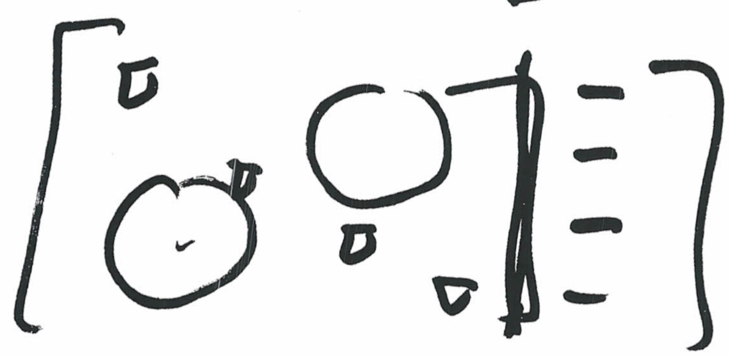
١- طريقة كوص مصفوفة مثلثية عليا

٢- طريقة كوص مصفوفة مثلثية سفلى

٣- طريقة كوص_معرف

الحصول على مصفوفة قطرية

$1 + 2 = 3$



درجات

واجب ١

واجب 2

4
4
6

12
38
51

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\
0 & 0{,}2 & -0{,}4 & 0 & -0{,}2 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 3 & 5 & 8
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ \\ -\frac{3}{2}L_3+L_4 \\ \to L_4 \end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc|c}
5 & 7 & 6 & 5 & 23 \\
0 & 0{,}2 & -0{,}4 & 0 & -0{,}2 \\
0 & 0 & 2 & 3 & 5 \\
0 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5
\end{array}\right]
$$

$0{,}5\,x_4 = 0{,}5 \rightarrow \boxed{x_4 = 1}$

$2x_3 + 3x_4 = 5 \rightarrow 2x_3 = 5-3 = 2$

$\rightarrow \boxed{x_3 = 1}$

$0{,}2x_2 - 0{,}4 = -0{,}2 \rightarrow 0{,}2x_2 = -0{,}2 + 0{,}4$

$0{,}2x_2 = 0{,}2 \rightarrow \boxed{x_2 = 1}$

$5x_1 + 7 + 6 + 5 = 23 \Rightarrow$

$5x_1 = 23 - 18 = 5 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

$\boxed{x_1 = 1,\quad x_2 = 1,\quad x_3 = 1,\ x_4 = 1}$