بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة القدس المفتوحة

اسم المقرر: جبر خطي
رقم المقرر: ٥٣٦١
مدة الامتحان: ساعتان
عدد الأسئلة: ستة

اسم الدارس: ....
رقم الدارس: ....
تاريخ الامتحان: 7/ 7./ ٢٠٠٧

الإجابة النموذجية للامتحان النهائي
للفصل الثاني "١٠٦٢"
٢٠٠٦ / ٢٠٠٧
نظري

جدول رقم (١)

إجابة السؤال رقم (١) من نوع (أجب بنعم أو لا) او (√ او ×) (٢٤ علامة)

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
الصحيحه	×	×	√	√	×	√	√	√												

جدول رقم (٢)

إجابة السؤال رقم ( ) من نوع (اختيار من متعدد)

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
الصحيحه																				

جدول رقم (٣)

إجابة السؤال رقم ( ) من نوع (وفق بين عمودين)

الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩	٢٠
الصحيحه																				

السؤال الثاني: (١٦ علامة)

١) إذا كانت A مصفوفة مربعة أثبت أن المصفوفة AA^t هي مصفوفة متماثلة . (٥ علامات)

$(AA^t)^t = (A^t)^t A^t = AA^t$ و هو المطلوب

٢) لتكن A مصفوفة حجمها ٢×٢ و محددها يساوي ٤ جد (٦ علامات)

أ) $\left|2A^{-1}\right| = (2\times 2)/4 = 1$

ب) $|3A| = 3\times 3\times 4 = 36$

ج) $\left|(2A)^{-1}\right| = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

٣) أوجد قيمة K التي تجعل المصفوفة غير قابلة للانعكاس (٥ علامات)

$$\begin{bmatrix} K-2 & -2 \\ -2 & K-2 \end{bmatrix}$$

$K = 0,4$

السؤال الثالث : **(٢٠ علامة)**

١) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & -1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}10 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 1\\ 19 & 3 & -1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}1 & 10 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 19 & -1\end{bmatrix}$ (١٢ علامة)

$A_3=\begin{bmatrix}1 & 2 & 10\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & 3 & 19\end{bmatrix}$ **بما أن** $|A|=9,|A_1|=27,|A_2|=36,|A_3|=-9$

فان :

$$x_1=\frac{27}{9}=3, x_2=\frac{36}{9}=4, x_3=\frac{-9}{9}=-1$$

٢) $A=\begin{bmatrix}1 & -5 & -6\\ -5 & 2 & 4\\ -6 & 4 & 3\end{bmatrix}$ (٤ علامات)

٣) حسب القاعدة $A.adj(A)=|A|I$ ضرب الطرفين A^{-1} (بالنظير الضربي) (٤ علامات)

$adj(A)=|A|IA^{-1}$ نأخذ المحددة للطرفين

$|adj(A)|=\left||A|IA^{-1}\right|=|A|^n|A^{-1}|=|A|^{n-1}$ علما بان

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$$

السؤال الرابع : **(٢٠ علامة)**

١) أوجد بعد و أساس الفضاء الخطي الذي تولده المتجهات ؟ (١٠ علامات)

$$(1,-2,5,-3),(2,3,1,-4),(3,8,-3,-5)$$

نجد المصفوفة $\begin{bmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 2 & 3 & 1 & -4\\ 3 & 8 & -3 & -5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 0 & 7 & -9 & 2\\ 0 & 14 & -18 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & 5 & -3\\ 0 & 7 & -9 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

إذاً المتجهات $(1,-2,-5,-3),(7,0,-9,2)$ تشكل أساسا للفضاء الذي تولده المتجهات المعطاة ، مما يعني أن بعد ذلك الفضاء هو ٢ .

٢) قرر فيما إذا كانت مجموعة المصفوفات القطرية (١٠ علامات)

$$w=\{A=(a_{ij})\in M : a_{ij}=0 \quad \forall i\neq j\}$$

فضاء جزئياً من مجموعة جميع المصفوفات المربعة $M=M_{n,n}$ ذات الحجم $n\times n$

تشكل فضاء جزئي لأنها تحقق الشروط التالية :

١) من الواضح أن المصفوفة الصفرية مصفوفة قطرية

٢) إذا كانت $A=(a_{ij})\quad ,B=(b_{ij})$ مصفوفتين قطريتين فان $a_{ij}=b_{ij}=0\quad \forall i\neq j$ و بالتالي فان

$$ca_{ij}+db_{ij}=0 \qquad \forall i\neq j$$

السؤال الخامس : **(٢٠ علامة)**

١) لتكن $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

أ) أوجد جميع القيم المميزة للمصفوفة A (٧ علامات)

الحل $lI-A=\begin{bmatrix}l-1 & -4\\ -2 & l-3\end{bmatrix}$

$$|lI-A|=(l-5)(l-3)-8 \qquad l=5,-1$$

ب) أوجد كل الفضاءات المميزة للمصفوفة A (٧ علامات)

$$l_5 \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & -4\\ -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$x-y=0$$

أي أن $(1,1)$ أساس للفضاء المميز V_5 و عليه فان $V_5=\{K(1,1),K\in R\}$

و أيضا نجد أن

$$V_{-1}=\{b(2,-1),b\in R\}$$

ج) بين أن المصفوفة A تشابه مصفوفة قطرية (٦ علامات)

الحل : بما أن المصفوفة A من الحجم ٢×٢ و لها قيمتان مميزتان مختلفتان فان A تشابه مصفوفة قطريه قطرها القيم المميزة . للتوضيح نأخذ المصفوفة

$$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$D=p^{-1}Ap=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

السؤال السادس : **(٢٠ علامة)**

أ) بين أن التحويل $F:R^2\to R$ و المعرف بواسطة القاعدة $F(x,y)=xy$ يعتبر تحويلا خطيا أم لا ؟ (١٠ علامات)

يعتبر تحويلا غير خطي

ليكن

$$w=(3,4),v=(1,2)$$

$$w+v=(4,6)$$

$$F(v)=1\times 2=2$$

$$F(w)=3\times 4=12$$

$$F(w+v)=F(4,6)=24\neq F(v)+F(w)$$

ب) أوجد نواة (T) و مدى (T) للتحويل الخطي $T: R^3 \to R^3$ و المعرف بالقاعدة : (١٠ علامات)

$$T(x,y,z) = (x+y+2z, x+z, 2x+y+3z)$$

لايجاد المصفوفة A التي تعمل نفس عمل T نكتب معاملات x في الصورة (المدى) كعمود أول في A و معاملات Y كعمود ثاني و معاملات z كعمود ثالث

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

أي أن :

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

لايجاد نواة T نجد أساسا لفضاء حلول النظام

$$x+y+2z=0$$
$$x+z=0$$
$$2x+y+3z=0$$

و بحل هذا النظام نجد أن بعد الفضاء يساوي ١ و أن المتجه $(-1,-1,1)$ يمكن اختياره كأساس للنواة . و عليه فان

نواة $T = Ker(T) = \{a(-1,-1,1) : a \in R\}$

و لايجاد مدى T و الذي هو فضاء أعمدة المصفوفة A ، نجد أساسا لفضاء منقول المصفوفة A. أي فضاء صفوف المصفوفة

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

و بعد تبسيط A^t بالعمليات البسيطة نجد أن بعد فضاء أعمدة A يساوي ٢ و يمكن اختيار $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ كأساس للمدى . و عليه فان

مدى $T = Rang(T) = \{a(1,0,1) + b(0,1,1) : a,b \in R\}$

انتهت الإجابات